Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 512.54

О ГРУППАХ С КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИМ ЦЕНТРАЛИЗАТОРОМ КОНЕЧНОЙ ИНВОЛЮЦИИ

А. И. Созутов

Аннотация. Доказано, что группа с не максимальным квазициклическим централизатором конечной инволюции локально конечна.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.518

Ключевые слова: бесконечная группа, конечная инволюция, квазициклический централизатор.

Как доказал Бернсайд, в конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. Для бесконечных периодических групп это утверждение неверно даже в случае, когда силовская 2-подгруппа имеет порядок 2 и является центром группы [1]. Как выяснилось в последнее время [2, 3], для периодических групп неверны такие ключевые результаты теории конечных групп, связанные с инволюциями, как Z^*-теорема Глаубермана и теорема Бэра — Судзуки (в четном варианте). С другой стороны, на класс групп с конечной инволюцией некоторые интересные результаты теории конечных групп переносятся без потерь [4–7]. Группы с конечными инволюциями и периодические группы с элементарными абелевыми, примарными абелевыми и абелевыми централизаторами инволюций были изучены в [4, 5, 7], за исключением групп 2-ранга 1. В 2002 г. В. Д. Мазуров в «Коуровской тетради» [8] поставил следующий вопрос.

15.54. *Предположим, что периодическая группа G содержит инволюцию i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Верно ли, что множество всех элементов нечетного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, составляет подгруппу?*

В настоящей заметке получен положительный ответ на этот вопрос для групп, в которых централизатор инволюции i не является максимальной подгруппой.

Напомним, что инволюция i в группе G называется *конечной*, если для любого элемента $g \in G$ порядок коммутатора $[i, g] = ig^{-1}ig$ конечен. Понятно, что в периодической группе каждая инволюция конечна.

Теорема. *Пусть группа G содержит конечную инволюцию и централизатор некоторой инволюции i — локально циклическая 2-группа, не максимальная в G. Тогда множество всех элементов нечетного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, составляет подгруппу. В частности, группа G локально конечна,*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–04897-а).

и либо $G = C_G(i)$, либо G является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и неинвариантным множителем $C_G(i)$.

Поскольку любая локально циклическая 2-группа или конечна, или счетна, из теоремы вытекает решение вопроса 15.54 В. Д. Мазурова для несчетных групп.

Следствие. *Если несчетная группа G содержит конечную инволюцию и централизатор некоторой ее инволюции i — локально циклическая 2-группа, то i инвертирует каждый элемент нечетного порядка из G и группа G является локально конечной группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и неинвариантным множителем $C_G(i)$.*

1. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Пусть группа G содержит конечную инволюцию и централизатор некоторой инволюции i — локально циклическая 2-группа. Тогда подгруппа $C_G(i)$ сильно изолирована, все инволюции в G сопряжены и порядок произведения любых двух инволюций из G конечен и нечетен.*

Доказательство. Поскольку $C_G(u) \leq C_G(i)$ для любого неединичного элемента $u \in C_G(i)$, подгруппа $C_G(i)$ сильно изолирована по определению.

Пусть k — произвольная конечная отличная от i инволюция из G. Из определения конечной инволюции следует, что подгруппа $D = \langle i, k\rangle = \langle k, k^i\rangle \cdot \langle i\rangle$ — конечная группа диэдра. По условиям в $C_G(i)$ нет элементарных абелевых подгрупп порядка 4, следовательно, их нет и в подгруппе D. Это означает, что $|ik|$ нечетен и инволюции i и k сопряжены в D. В частности, инволюция i конечна в G. Пусть k — произвольная отличная от i инволюция из G. Тогда $D = \langle i, k\rangle = \langle i, i^k\rangle \cdot \langle k\rangle$ — конечная группа диэдра, как и выше, порядок элемента ik нечетен и инволюции i, k сопряжены в D. Это доказывает лемму.

Собственная подгруппа B группы G называется *сильно вложенной*, если B содержит инволюцию и для любого элемента $g \in G \setminus B$ подгруппа $B \cap B^g$ не содержит инволюций.

Лемма 2. *Пусть i — конечная инволюция группы G и $C_G(i)$ — локально циклическая 2-группа. Тогда любая собственная подгруппа B группы G, содержащая подгруппу $C_G(i)$, сильно вложена в G.*

Доказательство. При $B = C_G(i)$ утверждение леммы очевидно. Пусть $B \neq C_G(i)$, $g \in G \setminus B$, и предположим, что $k = j^g \in B \cap B^g$ для некоторой инволюции $j \in B$. В силу леммы 1 $k, j \in i^B = j^B$ и $k^t = j$ для некоторого $t \in B$. Но тогда $gt \in C_G(j) < B$, что противоречит выбору элемента g. Следовательно, B сильно вложена в G. Лемма доказана.

Напомним, что $[i, G]$ по определению есть группа, порожденная всеми коммутаторами $[i, g] = i^{-1}g^{-1}ig$, где g пробегает G. Хорошо известно, что подгруппа $[i, G]$ нормальна в G (см., например, [9, предложение 2.16]).

Из теоремы В. В. Беляева [10] (см., также [11; 9, следствие 2.30]) вытекает

Лемма 3. *Если подгруппа $C_G(i)$ конечна, то либо $C_G(i) = G$, либо $G = [i, G] \leftthreetimes C_G(i)$ — локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i, G]$ и дополнением $C_G(i)$.*

На основании леммы 3 будем предполагать, что подгруппа $C_G(i)$ бесконечна и потому является квазициклической группой C_{2^∞} [12]. Обозначим через J множество инволюций группы G.

Лемма 4. *Пусть G — группа с квазициклическим централизатором конечной инволюции i и $C_G(i) < B < G$ ($C_G(i) \neq B \neq G$). Тогда $B = [i,B] \leftthreetimes C_G(i)$ — локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i,B]$ и дополнением $C_G(i)$, при этом $[i,B] = B \cap B^j$ для каждой инволюции $j \in G \setminus B$.*

Доказательство. По лемме 2 подгруппа B сильно вложена в G, и по определению сильно вложенной подгруппы множество $J \setminus B$ непусто. Пусть j — произвольная инволюция из $G \setminus B$. По лемме 2.1 из [5] в подгруппе B существует множество M_j строго вещественных относительно j элементов той же мощности, что и множество инволюций из B (очевидно, что при сделанных предположениях $|J \cap B| = |B|$). В частности, подгруппа $H = B \cap B^j$ неединична, при этом $H^j = H$ и ввиду условий $C_H(j) = 1$. По лемме Бусаркина [9, лемма 2.20] H — периодическая абелева группа без инволюций. По лемме 2.2 из [5] $B = H \cdot C_G(i)$, т. е. группа B факторизуема двумя абелевыми подгруппами H и $C_G(i)$. По известной теореме Ито [13] коммутант T группы B абелев. Из $i \in T$ следовало бы $T \leq C_G(i)$ и $B \leq C_G(i)$ вопреки предположению $B \neq C_G(i)$. Поэтому $i \notin T$ и ввиду условий $T \cap C_G(i) = 1$. По лемме Бусаркина T — периодическая абелева группа без инволюций, каждый элемент которой инвертируется инволюцией i. Поскольку фактор-группа B/T абелева, то $[i,B] = T$ и очевидно, что $B = [i,B] \leftthreetimes C_G(i)$ — локально конечная группа Фробениуса с ядром $[i,B]$ и дополнением $C_G(i)$. В частности, $H \leq [i,B]$, и ввиду равенства $B = H \cdot C_G(i)$ имеем $H = B \cap B^j = [i,B]$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Случай $G = C_G(i)$ тривиален, в случае, когда подгруппа $C_G(i)$ конечна, теорема следует из леммы 3. Пусть подгруппа $C_G(i)$ бесконечна, B — подгруппа из леммы 4 и j — произвольная инволюция из $G \setminus B$. По лемме 4 $B \cap B^j = [i,B] \neq 1$ и j инвертирует каждый элемент b из $[i,B]$. Пусть $b \neq 1$ и $A = C_G(b)$. Тогда $i, j \in N_G(A)$, $A \cap C_G(i) = 1$. По лемме Бусаркина A — периодическая абелева группа без инволюций и инволюции i, j инвертируют каждый элемент из A. Ввиду произвольности инволюции $j \in G \setminus B$ заключаем, что $J = Ai$, $J = i^A$ и $A = [i,G]$. По аргументу Фраттини $G = [i,G] \leftthreetimes C_G(i)$. По теореме Шмидта из [12] группа G локально конечна и очевидно, что она является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i,G]$ и дополнением $C_G(i)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
2. *Созутов А. И., Дураков Е. Б.* О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 5. С. 632–637.
3. *Мазуров В. Д., Ольшанский А. Ю., Созутов А. И.* О бесконечных группах конечного периода // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 243–251.
4. *Мазуров В. Д.* О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
5. *Созутов А. И.* О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 602–617.
6. *Созутов А. И., Сучков Н. М.* О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 2. С. 272–285.
7. *Сучков Н. М.* О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 153–160.
8. *Коуровская тетрадь*: Нерешенные вопросы теории групп. 15 изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.
9. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011.

10. *Беляев В. В.* Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 531–535.

11. *Созутов А. И.* О группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 3. С. 360–368.

12. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

13. *Ito N.* Über das Product von zwei abelschen Gruppen // Math. Z. 1955. Bd 62, Heft 4. S. 400–401.

Статья поступила 9 декабря 2015 г.

Созутов Анатолий Ильич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
sozutov_ai@mail.ru