Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 512.552

ОБ n–КОММУТИРУЮЩИХ И n–АНТИКОММУТИРУЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ С ОБОБЩЕННЫМИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯМИ НА ПЕРВИЧНЫХ И ПОЛУПЕРВИЧНЫХ КОЛЬЦАХ

Н. ур Рехман, В. Де Филиппис

Аннотация. Пусть R — кольцо с центром $Z(R)$, n — фиксированное положительное целое число и I — ненулевой идеал R. Отображение $h : R \to R$ называется *n-централизующим* (*n-коммутирующим*) на множестве $S \subset R$, если $[h(x), x^n] \in Z(R)$ ($[h(x), x^n] = 0$ соответственно) для всех $x \in S$. В настоящей статье доказаны следующие результаты:

(1) если существуют обобщенные дифференцирования F и G на полупервичном кольце R без $n!$-кручения такие, что $F^2 + G$ является n-коммутирующим на R, то R содержит ненулевой центральный идеал;

(2) если существуют обобщенные дифференцирования F и G на первичном кольце R без $n!$-кручения такие, что $F^2 + G$ является n-антикоммутирующим на I, то R коммутативно.

Ключевые слова: первичное кольцо, полупервичное кольцо, обобщенное дифференцирование.

1. Введение

Пусть R — ассоциативное кольцо с центром $Z(R)$, а n — фиксированное положительное целое число. Для $x, y \in R$ обозначим коммутатор $xy - yx$ через $[x, y]$, а антикоммутатор $xy+yx$ — через $x \circ y$. Напомним, что кольцо R первично, если $aRb = \{0\}$ влечет $a = 0$ или $b = 0$ для любых $a, b \in R$. Пусть $h : R \to R$ — отображение, S — подмножество в R. Тогда h называется *коммутирующим* на S, если $[h(x), x] = 0$ для всех $x \in S$, и *централизующим*, если $[h(x), x] \in Z(R)$ для всех $x \in S$. Более того, h называется *антикоммутирующим* на S, если $h(x)x + xh(x) = 0$ для всех $x \in S$, и *антицентрализующим*, если $h(x)x+xh(x) \in Z(R)$ для всех $x \in S$. Напомним, что аддитивное отображение $d : R \longrightarrow R$ называется *дифференцированием*, если $d(xy) = d(x)y+xd(y)$ для любых $x, y \in R$. В частности, для фиксированного $a \in R$ отображение $I_a : R \longrightarrow R$, заданное правилом $I_a(x) = [x, a]$, является дифференцированием, которое называется *внутренним дифференцированием.*

В [1] Познер доказал, что не существует ненулевых дифференцирований первичного кольца R, которые являются централизующими на R. Начиная с этой работы, некоторые авторы изучали взаимосвязь между структурой первичного или полупервичного кольца R и поведением аддитивных отображений

Данная работа поддержана грантом Индии No. 36-8/2008(SR).

на R. В [2] Бресар доказал, что не существует ненулевых аддитивных отображений на первичном кольце R характеристики, отличной от 2, которые являются антикоммутирующими на R.

Денг и Белл [3] обобщили понятие коммутирующего отображения до n-коммутирующего, называя отображение $h : R \to R$ *n-коммутирующим* на S, если $[h(x), x^n] = 0$ для всех $x \in S$, и *n-централизующим*, если $[h(x), x^n] \in Z(R)$ для всех $x \in S$. Аналогично отображение $h : R \to R$ называется *n-антикоммутирующим* (*n-антицентрализующим*) на S, если $h(x)x^n + x^n h(x) = 0$ (соответственно $h(x)x^n + x^n h(x) \in Z(R)$) для всех $x \in S$; читатель может найти некоторые результаты об отображениях этого типа в [4, 5].

Недавно, Ли, Юнг и Чанг доказали следующий результат: пусть n — положительное целое число, а R — полупервичное кольцо без $n!$-кручения; если D и G — дифференцирования на R такие, что $[D^2(x) + G(x), x^n] = 0$ для всех $x \in R$, то $[D(x), x] = [G(x), x] = 0$ для всех $x \in R$ [6, теорема 2.1]. Наша цель — обобщить в некотором смысле цитированный выше результат на случай двух обобщенных дифференцирований D и G. Напомним, что аддитивное отображение $F : R \longrightarrow R$ называется *обобщенным дифференцированием*, если существует дифференцирование d кольца R такое, что $F(xy) = F(x)y + xd(y)$ для всех $x, y \in R$. В частности, $F : R \longrightarrow R$ называется *обобщенным внутренним дифференцированием*, если $F(x) = ax + xb$ при фиксированных $a, b \in R$. Легко видеть, что для такого отображения F справедливо

$$F(xy) = F(x)y + x[y, b] = F(x)y + xI_b(y) \quad \text{для всех } x, y \in R.$$

Заметим, что как любое дифференцирование, так и операторы левого и правого умножения являются обобщенными дифференцированиями. Поскольку сумма двух обобщенных дифференцирований вновь является обобщенным дифференцированием, отображения вида $F(x) = cx + d(x)$, где c — фиксированный элемент из R и d — дифференцирование на R, являются обобщенными дифференцированиями на R. Отметим, что по теореме 3 из [7] любое обобщенное дифференцирование F на плотном правом идеале из R может быть продолжено единственным образом на кольцо частных Утуми U кольца R и, таким образом, можем считать, что обобщенные дифференцирования кольца R определены на всем U и имеют вид $F(x) = ax + d(x)$ для некоторых $a \in U$ и дифференцирования d на U (F называется *обобщенным дифференцированием, ассоциированным с d*).

В дальнейшем, R — кольцо с центром $Z(R)$, n — фиксированное положительное целое число, I — ненулевой идеал в R, F и G — обобщенные дифференцирования на R.

2. Предварительные результаты

Приведем элементарные факты, которые в дальнейшем будут часто использоваться.

(A) В любом кольце R выполняются равенства $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$ и $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$ для всех $x, y, z \in R$.

(B) В любом кольце справедливы равенства $x \circ yz = (x \circ y)z - y[x, z] = y(x \circ z) + [x, y]z$ и $xy \circ z = x(y \circ z) - [x, z]y = (x \circ z)y + x[y, z]$ для всех $x, y, z \in R$.

Лемма 2.1 [3, лемма 1]. *Пусть n — положительное целое число, R — кольцо без $n!$-кручения, а ϕ — аддитивное отображение на R. Пусть $\lambda_i(X, Y)$ —*

обобщенный многочлен, который однороден степени i, $i = 1, 2, \dots, n$, от некоммутирующих переменных X и Y. Обозначим через (a) аддитивную подгруппу, порожденную $a \in R$. Если

$$\lambda_n(x, \phi(x)) + \lambda_{n-1}(x, \phi(x)) + \dots + \lambda_1(x, \phi(x)) \in Z(R) \quad \text{для всех } x \in (a),$$

то $\lambda_i(a, \phi(a)) \in Z(R)$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 2.2 [3, теорема 2]. *Пусть n — фиксированное положительное целое число, R — полупервичное кольцо без $n!$-кручения, а I — ненулевой левый идеал в R. Если R допускает дифференцирование d, которое является ненулевым на I и n-централизующим на I, то R содержит ненулевой центральный идеал.*

Лемма 2.3 [3, лемма 3]. *Если R — первичное кольцо и I — его ненулевой левый идеал без ненулевых нильпотентных элементов, то I не содержит ненулевых элементов, которые являются левыми делителями нуля в R.*

3. n-Коммутирующие отображения на полупервичных кольцах

В этом разделе проанализируем очень естественный случай в теории аддитивных отображений полупервичных колец, когда отображение $F^2 + G$ является n-коммутирующим. Начнем со следующей леммы.

Лемма 3.1. *Пусть n — фиксированное целое положительное число, R — полупервичное кольцо без $n!$-кручения, а I — ненулевой идеал в R. Если R допускает дифференцирование d, ненулевое на I и такое, что $[d(x)yd(x), x^n] = 0$ для всех $x, y \in I$, то R содержит ненулевой центральный идеал.*

Доказательство. Имеем

$$d(x)yd(x)x^n - x^n d(x)yd(x) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in I. \tag{3.1}$$

Заменяя y на yz в (3.1), получаем

$$d(x)yzd(x)x^n - x^n d(x)yzd(x) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in I. \tag{3.2}$$

Снова заменяя z на $d(x)z$ в (3.2), приходим к равенству

$$d(x)yd(x)zd(x)x^n - x^n d(x)yd(x)zd(x) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in I. \tag{3.3}$$

В соответствии с (3.1) в соотношении (3.3) можем записать $x^n d(x)zd(x)$ вместо $d(x)zd(x)x^n$ и $d(x)yd(x)x^n$ вместо $x^n d(x)yd(x)$, что дает

$$d(x)y[d(x), x^n]zd(x) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in I. \tag{3.4}$$

Теперь заменим y на $x^n y$ в выражении выше, получая $d(x)x^n y[d(x), x^n]zd(x) = 0$ и, следовательно, $[d(x), x^n]y[d(x), x^n]zd(x) = 0$ для всех $x, y, z \in I$. Далее, используя тот же метод, приходим к равенству $[d(x), x^n]y[d(x), x^n]z[d(x), x^n] = 0$. Последнее влечет

$$[d(x), x^n]y[d(x), x^n]w[d(x), x^n]y[d(x), x^n] = 0 \quad \text{для всех } x, y, z, w \in I,$$

и из полупервичности I получаем $[d(x), x^n] = 0$ для всех $x \in I$. Используя лемму 2.2, приходим к требуемому результату. □

Замечание 3.1. Пусть R — примитивное кольцо, изоморфное плотному кольцу линейных преобразований векторного пространства V над телом D такого, что $\dim_D V \geq 2$, и пусть $a \in R$. Если для любого $v \in V$ векторы v и va линейно D-зависимы, то $a \in Z(R)$.

Действительно, во-первых, покажем, что существует $\alpha \in D$ такое, что $va = \alpha v$ для любого $v \in V$. Пусть $v, w \in V$ линейно D-независимы. По предположению существуют $\alpha_v, \alpha_w \in D$ такие, что $va = \alpha_v v$ и $wa = \alpha_w w$. Более того, $(v + w)a = \alpha_{v+w}(v + w)$ для подходящего $\alpha_{v+w} \in D$. Тогда $0 = (a_{v+w} - a_v)v + (a_{v+w} - a_w)w$ и, так как v и w линейно независимы, $a_w = a_v = a_{v+w} = \alpha \in D$.

Далее, пусть $r \in R$ и $v \in V$. Согласно предыдущему рассуждению $va = \alpha v$, $(vr)a = \alpha(vr)$, а также $var = \alpha vr$. Таким образом, $0 = v[a, r]$ для любого $v \in V$, т. е. $V[a, r] = 0$. Так как V является точным неприводимым правым R-модулем, $[a, r] = 0$ для всех $r \in R$, т. е. $a \in Z(R)$.

Лемма 3.2. *Пусть n — фиксированное положительное целое число, а R — полупервичное кольцо. Если R допускает ненулевое обобщенное дифференцирование H, ассоциированное с дифференцированием h на R, такое, что $[H(x), x^n] = 0$ для всех $x \in R$, то либо R коммутативно, либо $H(x) = ax + h(x)$ для всех $x \in R$, где $a \in C$ и $h(R) \subseteq Z(R)$.*

Доказательство. Согласно теореме 3 из [7] существуют $a \in U$ и дифференцирование h на R такие, что $H(x) = ax + h(x)$ для всех $x \in R$. Предположим сначала, что R первично. Положим $[ax + h(x), x^n] = P(x, h(x))$. Используя теорему 2.4.1 из [8], замечаем справедливость одного из следующих утверждений:

(1) h является внутренним дифференцированием кольца частных Утуми U кольца R, т. е. h индуцировано $q \in U$ и R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x, [q, x])$,

(2) R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x, y)$.

В последнем случае R удовлетворяет тождеству $[ax + y, x^n]$, т. е. $[ar_1 + r_2, r_1^n] = 0$ для любых $r_1, r_2 \in R$. В частности, при $r_2 = 0$ получаем $[ar_1, r_1^n] = 0$ для всех $r_1 \in R$ и, как следствие, $[r_2, r_1^n] = 0$ для всех $r_1, r_2 \in R$. Поскольку R является PI-кольцом, существует поле F такое, что R и $M_t(F)$ (кольцо квадратных матриц порядка t над F) удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам. Предположим, что $t \geq 2$, и возьмем $r_1 = e_{11}$, а $r_2 = e_{21}$. Тогда получаем следующее противоречие: $0 = [e_{21}, e_{11}] = e_{21} \neq 0$. Следовательно, $t = 1$, и потому R коммутативно.

Далее, пусть h — внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $q \in U$. Тогда $[ar + [q, r], r^n] = 0$ для всех $r \in R$, т. е. R удовлетворяет нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству $[ax + [q, x], x^n]$. Из теоремы 3 в [9] следует, что $S = RC$ примитивно и $\mathrm{soc}(R) \neq 0$, где $C = Z(U)$ — обобщенный центроид R, а кольцо частных Утуми U является центрально замкнутой C-алгеброй. Поскольку R и U удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам (см. [10]), без ограничения общности можем заменить R на U и $Z(R)$ на C и R является центрально замкнутой C-алгеброй. Тогда R является плотным кольцом линейных преобразований векторного пространства V над C. Если $\dim_C V = 1$, то все доказано, поскольку R и U оба коммутативны. Предположим, что $\dim_C V \geq 2$. Возьмем v из V. Если v и $v(a + q)$ линейно C-независимы, то из плотности R следует существование $r \in R$ такого, что $vr = 0, \quad v(a + q)r = v(a + q)$. Значит, получаем следующее противоречие:

$$0 = v\,[ar + [q, r], r^n] = v(a + q) \neq 0.$$

Таким образом, v и $v(a+q)$ линейно C-зависимы для всех $v \in V$. В этом случае, по замечанию 3.1 имеем $a + q \in C$ и R удовлетворяет обобщенному тождеству $[xa, x^n]$.

Предположим теперь, что существует $w \in V$ такой, что w и $w(a)$ линейно C-независимы. Тогда из плотности R следует существование $r \in R$ такого, что $wr = w, \quad w(a)r = 0$. Теперь получаем следующее противоречие:

$$0 = w\,[ra, r^n] = -w(a) \neq 0.$$

Следовательно, v и $v(a)$ линейно C-зависимы для всех $v \in V$. Как и выше, в этом случае также заключаем, что $a \in C$, поэтому $q \in C$. Последнее означает, что $h = 0$ и $H(x) = ax$ для всех $x \in R$ и подходящего $a \in C$.

Далее, пусть R — полупервичное кольцо. Известно, что дифференцирование h может быть единственным образом продолжено на U; более того, R и U удовлетворяют как одним и тем же дифференциальным тождествам (см. теорему 2 из [11]), так и одним и тем же обобщенным тождествам (см. теорему 2 из [10]). Следовательно, $[ax + h(x), x^n] = 0$ для любого $x \in U$. Пусть M — произвольный максимальный идеал полной булевой алгебры идемпотентов C, обозначаемой через B. Известно, что MU — первичный идеал в U. Пусть $\bar{h}$ — дифференцирование, индуцированное h в $\overline{U} = U/MU$. Тогда $\bar{h}$ удовлетворяет на $\overline{U}$ тем же свойствам, что и h на U. По первой части леммы 3.1 для любого максимального идеала M в B либо $h(U) \subseteq MU$ и $[a, U] \subseteq MU$, либо $[U, U] \subseteq MU$. В любом случае $h(U)[U, U] \subseteq \bigcap\limits_M MU = 0$, а также $[a, U][U, U] \subseteq \bigcap\limits_M MU = 0$. Без ограничения общности можем предполагать, что $h(R)[R, R] = 0$, а также $[a, R][R, R] = 0$. В частности, $h(R)[R^2, R] = 0$, т. е.

$$0 = h(R)R[R, R] + h(R)[R, R]R = h(R)R[R, R].$$

Следовательно, $[R, h(R)]R[R, h(R)] = 0$, и полупервичность R влечет $[R, h(R)] = 0$, т. е. $h(R) \subseteq Z(R)$. Аналогично $[a, U][U^2, U] = 0$, поэтому

$$0 = [a, U]U[U, U] + [a, U][U, U]U = [a, U]U[U, U].$$

Значит, $[a, U]U[a, U] = 0$, и в силу полупервичности U будет $[a, U] = 0$, т. е. $a \in C$. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть n — фиксированное положительное целое число, R — полупервичное кольцо без $n!$-кручения. Если R допускает такие обобщенные дифференцирования F и G, ассоциированные с ненулевыми дифференцированиями f и g соответственно, что $F^2 + G$ является n-коммутирующим на R, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *R содержит ненулевой центральный идеал;*

(2) *$f = 0$, $g(R) \subseteq Z(R)$ и существуют $a, b \in U$ такие, что $F(x) = ax$ и $G(x) = bx + g(x)$ для всех $x \in R$, при этом $a^2 + b \in C$.*

Доказательство. Будем писать Δ вместо $F^2 + G$. Поскольку отображение Δ является n-коммутирующим на I, то

$$[\Delta(x), x^n] = 0 \ \text{ для всех } \ x \in R. \tag{3.5}$$

Рассмотрим целое число μ такое, что $a \leq \mu \leq n$. Подставляя $x + \mu y$ вместо x в (3.5), получаем

$$\mu\lambda_1(x, y) + \mu^2\lambda_2(x, y) + \mu^3\lambda_3(x, y) + \dots + \mu^n\lambda_n(x, y) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in R, \tag{3.6}$$

где $\lambda_i(x, y)$ обозначает сумму тех слагаемых, в которых y появляется i раз. По лемме 2.1 имеем

$$\lambda_1(x, y) = [\Delta(y), x^n] + [\Delta(x), x^{n-1}y] + [\Delta(x), x^{n-2}yx] + \dots + [\Delta(x), yx^{n-1}] = 0. \tag{3.7}$$

Заменяя y на xy в (3.7), получаем

$$x[\Delta(x), x^{n-1}y] + [\Delta(x), x]x^{n-1}y + x[\Delta(x), x^{n-2}yx] + [\Delta(x), x]x^{n-2}yx + \dots + x[\Delta(x), yx^{n-1}] + [\Delta(x), x^n]yx^{n-1} + x[\Delta(y), x^n] + [2f(x)F(y), x^n] + [H(x), x^n]y + H(x)[y, x^n] = 0, \quad (3.8)$$

где $H(x) = (f^2 + g)(x)$. С другой стороны, умножая (3.7) слева на x, получаем

$$x[\Delta(y), x^n] + x[\Delta(x), x^{n-1}y] + x[\Delta(x), x^{n-2}yx] + \dots + x[\Delta(x), yx^{n-1}] = 0. \quad (3.9)$$

Вычитая (3.9) из (3.8), приходим к равенству

$$[\Delta(x), x]x^{n-1}y + [\Delta(x), x]x^{n-2}yx + [\Delta(x), x]x^{n-3}yx^2 + \dots + [\Delta(x), x^n]yx^{n-1} + [2f(x)F(y), x^n] + [H(x), x^n]y + H(x)[y, x^n] = 0 \quad \text{для всех } x, y \in R. \quad (3.10)$$

Далее, заменяя y на yx в (3.10), получаем

$$[\Delta(x), x]x^{n-1}yx + [\Delta(x), x]x^{n-2}yx^2 + [\Delta(x), x]x^{n-3}yx^3 + \dots + [\Delta(x), x^n]yx^{n-1}x + [2f(x)F(y), x^n]x + [2f(x)yf(x), x^n] + [H(x), x^n]yx + H(x)[y, x^n]x = 0. \quad (3.11)$$

Умножая (3.10) справа на x, находим, что

$$[\Delta(x), x]x^{n-1}yx + [\Delta(x), x]x^{n-2}yx^2 + [\Delta(x), x]x^{n-3}yx^3 + \dots + [\Delta(x), x^n]yx^{n-1}x + [2f(x)F(y), x^n]x + [H(x), x^n]yx + H(x)[y, x^n]x = 0 \quad \text{для всех } x, y \in R. \quad (3.12)$$

Сравнивая (3.12) и (3.11), выводим $2[f(x)yf(x), x^n] = 0$ для всех $x, y \in R$, поэтому по лемме 3.1 R содержит ненулевой центральный идеал, за исключением случая, когда $f = 0$.

В этом последнем случае существуют $a, b \in U$ такие, что $F(x) = ax$, $F^2(x) = a^2x$ и $G(x) = bx + g(x)$ для всех $x \in R$. Более того, из условий теоремы вытекает, что $[a^2x + bx + g(x), x^n] = 0$ для всех $x \in R$. По лемме 3.2 если R не является коммутативным, то $(a^2 + b) \in C$ и $g(R) \subseteq Z(R)$. $\square$

Мы закончим этот раздел простым следствием из теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть R — полупервичное кольцо без 2-кручения. Если R допускает такие обобщенные дифференцирования F и G, ассоциированные с ненулевыми дифференцированиями f и g соответственно, что $F^2 + G$ является антицентрализующим на R, то R содержит ненулевой центральный идеал.*

Доказательство. Поскольку $(F^2(x) + G(x)) \circ x \in Z(R)$ для всех $x \in R$, то $[(F^2(x) + G(x)) \circ x, x] = 0$ для всех $x \in R$. Из соотношения

$$0 = [(F^2(x) + G(x)) \circ x, x] = [F^2(x) + G(x), x] \circ x = [F^2(x) + G(x), x^2]$$

видим, что $F^2 + G$ является 2-коммутирующим, и получаем требуемое по теореме 3.1, за исключением случая, когда $g(R) \subseteq Z(R)$ и существуют $a, b \in U$ такие, что $F(x) = ax$, $G(x) = bx + g(x)$ для всех $x \in R$, при этом $a^2 + b \in C$. В этом случае имеем

$$((a^2 + b)x + g(x)) \circ x = 2(a^2 + b)x^2 + 2g(x)x \in Z(R). \quad (3.13)$$

Если $a^2 + b = 0$, то $2g(x)x \in Z(R)$, т. е. $x \in Z(R)$ для всех $x \in R$, и R коммутативно. Предположим, что $0 \neq \alpha = a^2 + b \in C$. Заменив x на $x + y$ в (3.13), получим

$$2\alpha x^2 + 2\alpha y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yx + 2g(x)x + 2g(y)y + 2g(x)y + 2g(y)x \in Z(R),$$

т. е.

$$2\alpha xy + 2\alpha yx + 2g(x)y + 2g(y)x \in Z(R).$$

Поскольку g является дифференцированием и $g(R) \subseteq Z(R)$, то $2g(x)y+2g(y)x = 2g(xy) \in Z(R)$, поэтому

$$2\alpha xy + 2\alpha yx \in Z(R).$$

Так как $\operatorname{char}(R) \neq 2$ и $\alpha \neq 0$, легко видеть, что R должно быть коммутативным. $\square$

4. n-Антикоммутирующие отображения на первичных кольцах

В этом разделе продолжим исследование обобщенных дифференцирований F и G, рассматривая свойство n-антикоммутирования. Начнем со следующей простой леммы, которая существенна в доказательстве нашей теоремы.

Лемма 4.1. *Пусть n — фиксированное положительное целое число, R — первичное кольцо, I — ненулевой идеал в R, а H — ненулевое обобщенное дифференцирование, ассоциированное с дифференцированием h на R. Если H является n-антицентрализующим на I, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *R коммутативно;*

(2) $\operatorname{char}(R) = 2$, $h(R) = 0$ *и существует $a \in C$ такой, что $H(x) = ax$ для всех $x \in R$.*

Доказательство. Имеем $x^n \circ H(x) \in Z(R)$ для всех $x \in I$. Известно, что существует $a \in U$ такой, что $H(x) = ax + h(x)$ для всех $x \in R$. Таким образом, $x^n \circ (ax + h(x)) \in Z(R)$ для всех $x \in I$.

Пусть $[x^n ax + x^n h(x) + ax^{n+1} + h(x)x^n, y] = P(x, y, h(x))$. Тогда $P(x, y, h(x))$ — дифференциальное тождество на I. Поскольку R и I удовлетворяют одним и тем же дифференциальным тождествам (см. [11, теорема 2]), то $P(x, y, h(x))$ также является дифференциальным тождеством на R.

По теореме 2.4.1 из [8] справедливо одно из следующих утверждений:

(1) h является внутренним дифференцированием на U, т. е. h индуцировано $q \in U$ и R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x, y, [q, x])$;

(2) R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x, y, z)$.

В последнем случае R удовлетворяет тождеству $[x^n ax + x^n z + ax^{n+1} + zx^n, y]$, т. е. $\left[r_1^n ar_1 + r_1^n r_2 + ar_1^{n+1} + r_2 r_1^n, r_3\right] = 0$ для любых $r_1, r_2, r_3 \in R$. В частности, при $r_2 = 0$ имеем $\left[r_1^n ar_1 + ar_1^{n+1}, r_3\right] = 0$ для всех $r_1, r_3 \in R$. Значит, R удовлетворяет полиномиальному тождеству $[x^n ax + ax^{n+1}, y]$. Как следствие, R удовлетворяет также тождеству $[x^n z + zx^n, y]$.

Поскольку R — PI-кольцо, существует поле F такое, что R и $M_t(F)$ удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам. Предположим, что $t \geq 2$, и возьмем $x = e_{11}$, $z = e_{12}$ и $y = e_{22}$. Тогда получаем следующее противоречие:

$$0 = [e_{12}, e_{22}] = e_{12} \neq 0.$$

Следовательно, $t = 1$, а потому R коммутативно.

Далее, пусть h — внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $q \in U$. Тогда

$$[r^n ar + ar^{n+1} + r^n[q, r] + [q, r]r^n, s] = 0$$

для всех $r, s \in R$, т. е. R удовлетворяет нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству. По теореме 3 из [9] $S = RC$ является примитивным кольцом и $\mathrm{soc}(R) \neq 0$, а U — центрально замкнутая C-алгебра. Как и в лемме 3.2, без ограничения общности мы можем заменить R на U, а $Z(R)$ на C, и R является центрально замкнутой C-алгеброй. Тогда R — плотное кольцо линейных преобразований векторного пространства V над C. Если $\dim_C V = 1$, то все доказано, поскольку R и U коммутативны. Предположим, что $\dim_C V \geq 2$. Пусть v — произвольный вектор из V. Если v и $v(a+q)$ линейно C-независимы, то из плотности R следует существование $r, s \in R$ таких, что

$$vr = 0, \quad v(a+q)r = v(a+q), \quad v(a+q)s = v, \quad vs = 0.$$

Тем самым получаем следующее противоречие:

$$0 = v[r^n ar + ar^{n+1} + r^n[q, r] + [q, r]r^n, s] = v \neq 0.$$

Значит, v и $v(a+q)$ линейно C-зависимы для всех $v \in V$. В этом случае стандартные аргументы показывают, что $a + q \in C$. Тогда по предположению R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$[x^{n+1}(a+q) + ax^{n+1} - xqx^n, y].$$

Если существует $w \in V$ такой, что w и wa линейно C-независимы, то из плотности R следует существование $r, s \in R$ таких, что

$$wr = 0, \quad war = wa, \quad was = w, \quad ws = 0.$$

Тем самым приходим к следующему противоречию:

$$0 = w[r^{n+1}(a+q) + ar^{n+1} - rqr^n, s] = w \neq 0.$$

Значит, w и wa линейно C-зависимы для всех $w \in V$, и, как и выше, это влечет $a \in C$. Таким образом, $q \in C$, т. е. $h = 0$ и $H(x) = ax$.

Далее, имеем $x^n \circ ax \in C$ для $a \in C$, т. е. $2ax^{n+1} \in C$, что означает $2x^{n+1} \in C$. Следовательно, либо $\mathrm{char}(R) = 2$, либо R коммутативно. □

Следствие 4.1. *Пусть n — фиксированное положительное целое число, R — первичное кольцо, I — ненулевой идеал в R, d — ненулевое дифференцирование на R. Если d является n-антицентрализующим на I, то R коммутативно.*

Теорема 4.1. *Пусть n — фиксированное положительное целое число, R — первичное кольцо без $n!$-кручения, а I — ненулевой идеал в R. Если R допускает такие обобщенные дифференцирования F и G, ассоциированные с ненулевыми дифференцированиями f и g соответственно, что $F^2 + G$ является n-антикоммутирующим на I, то R коммутативно.*

Доказательство. Для удобства будем писать Δ вместо $F^2 + G$. По условию теоремы отображение Δ является n-коммутирующим на I, т. е.

$$\Delta(x) \circ x^n = 0 \quad \text{для всех } x \in I. \tag{4.1}$$

Рассмотрим целое число μ такое, что $a \leq \mu \leq n$. Подставляя $x + \mu y$ вместо x в (4.1), получаем

$$\mu\lambda_1(x, y) + \mu^2\lambda_2(x, y) + \cdots + \mu^n\lambda_n(x, y) = 0 \quad \text{для всех } x, y \in I, \tag{4.2}$$

где $\lambda_i(x,y)$ обозначает сумму тех слагаемых, в которых y появляется i раз. По лемме 2.1 имеем

$$\lambda_1(x,y) = (\Delta(y)\circ x^n) + (\Delta(x)\circ x^{n-1}y) + \cdots + (\Delta(x)\circ yx^{n-1}) = 0. \tag{4.3}$$

Заменяя y на xy в (4.2), получаем

$$x(\Delta(x)\circ x^{n-1}y) + [\Delta(x),x]x^{n-1}y + \cdots + x(\Delta(x)\circ yx^{n-1}) + [\Delta(x),x^n]yx^{n-1} \\ + x(\Delta(y)\circ x^n) + (2f(x)F(y)\circ x^n) + (H(x)\circ x^n)y + H(x)[y,x^n] = 0, \tag{4.4}$$

где $H(x) = (f^2+g)(x)$. Умножение (4.2) слева на x дает

$$x(\Delta(y)\circ x^n) + x(\Delta(x)\circ x^{n-1}y) + \cdots + x(\Delta(x)\circ yx^{n-1}) = 0. \tag{4.5}$$

Вычитая (4.4) из (4.5), приходим к равенству

$$[\Delta(x),x]x^{n-1}y + [\Delta(x),x]x^{n-2}yx + [\Delta(x),x]x^{n-3}yx^2 + \cdots + [\Delta(x),x^n]yx^{n-1} \\ + (2f(x)F(y)\circ x^n) + (H(x)\circ x^n)y + H(x)[y,x^n] = 0 \text{ для всех } x,y\in I. \tag{4.6}$$

Далее, заменяя y на yx в (4.6), получаем

$$[\Delta(x),x]x^{n-1}yx + [\Delta(x),x]x^{n-2}yx^2 + \cdots + [\Delta(x),x^n]yx^{n-1}x + (2f(x)F(y)\circ x^n)x \\ + (2f(x)yf(x)\circ x^n) + (H(x)\circ x^n)yx + H(x)[y,x^n]x = 0. \tag{4.7}$$

Умножение (4.6) справа на x дает

$$[\Delta(x),x]x^{n-1}yx + [\Delta(x),x]x^{n-2}yx^2 + [\Delta(x),x]x^{n-3}yx^3 + \cdots + [\Delta(x),x^n]yx^{n-1}x \\ + (2f(x)F(y)\circ x^n)x + (H(x)\circ x^n)yx + H(x)[y,x^n]x = 0 \quad \text{для всех } x,y\in I. \tag{4.8}$$

Сравнивая (4.7) и (4.8), выводим $2(f(x)yf(x)\circ x^n) = 0$ для всех $x,y\in I$, т. е.

$$f(x)yf(x)x^n + x^nf(x)yf(x) = 0. \tag{4.9}$$

Заменяя y на yz в выражении выше, получаем $f(x)yzf(x)x^n + x^nf(x)yzf(x) = 0$ для всех $x,y,z\in I$. Снова заменяя z на $f(x)z$, приходим к равенству

$$f(x)yf(x)zf(x)x^n + x^nf(x)yf(x)zf(x) = 0. \tag{4.10}$$

Согласно (4.9) в (4.10) можем записать $-x^nd(x)zd(x)$ вместо $d(x)zd(x)x^n$ и $d(x)yd(x)x^n$ вместо $-x^nd(x)yd(x)$, что дает $f(x)y(f(x)\circ x^n)zf(x) = 0$.

Заменяя y на x^ny в выражении выше, получаем $f(x)x^ny(f(x)\circ x^n)zf(x) = 0$, поэтому $x^nf(x)y(f(x)\circ x^n)zf(x) = 0$. Складывая два последних выражения, выводим равенство

$$(f(x)\circ x^n)y(f(x)\circ x^n)zf(x) = 0 \quad \text{для всех } x,y,z\in I,$$

и, используя далее ту же самую технику, приходим к равенству $(f(x)\circ x^n)y(f(x)\circ x^n)z(f(x)\circ x^n) = 0$. Последнее влечет

$$(f(x)\circ x^n)y(f(x)\circ x^n)w(f(x)\circ x^n)y(f(x)\circ x^n) = 0 \quad \text{для всех } x,y,z,w\in I,$$

поэтому из первичности I следует $(f(x)\circ x^n) = 0$ для всех $x\in I$. Таким образом, по следствию 4.1 получаем коммутативность R, за исключением случая, когда $f = 0$.

В последнем случае существуют $a,b\in U$ такие, что $F(x) = ax$ и $G(x) = bx + g(x)$ для всех $x\in R$. Из нашего предположения следует, что R удовлетворяет $((a^2+b)x + g(x)\circ x^n)$. В итоге из леммы 4.1 и условия $\mathrm{char}(R)\neq 2$ получаем коммутативность R также и в этом случае, что и завершает доказательство. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Posner E. C.* Derivations in prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 1093–1100.
2. *Bresar M.* On skew-commuting mappings of rings // Bull. Austral. Math. Soc. 1993. V. 47. P. 291–296.
3. *Deng Q., Bell H. E.* On derivations and commutativity in semiprime rings // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 10. P. 3705–3713.
4. *Jung Y. S., Chang I. S.* On (α, β)-skew-commuting and (α, β)-skew-centralizing maps in rings with left identity // Comm. Korean Math. Soc. 2005. V. 20, N 1. P. 23–34.
5. *Sharma R. K., Dhara B.* Skew commuting and commuting mappings in rings with left identity // Result. Math. 2004. V. 46, N 1–2. P. 123–129.
6. *Lee E. H., Jung Y. S., Chang I. S.* Derivations on prime and semiprime rings // Bull. Korean Math. Soc. 2002. V. 39. P. 485–494.
7. *Lee T. K.* Generalized derivations of left faithful rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27, N 8. P. 4057–4073.
8. *Kharchenko V. K.* Automorphisms and derivations of associative rings. London: Kluwer Acad. Publ., 1991.
9. *Martindale III W. S.* Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.
10. *Chuang C. L.* GPI's having coefficients in Utumi quotient rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103, N 3. P. 723–728.
11. *Lee T. K.* Semiprime rings with differential identities // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 1992. V. 20. P. 27–38.

Статья поступила 1 апреля 2010 г.

Nadeem ur Rehman (Рехман Надеем)
Department of Mathematics, Aligarh Muslim University
Aligarh, 202002 India
rehman100@gmail.com

Vincenzo De Filippis (Де Филиппис Винченцо)
DI.S.I.A., Faculty of Engineering, University of Messina
Contrada Di Dio, Messina, 98166 Italy
defilippis@unime.it