Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 515.162

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ НАКРЫТИЯ ЛИНЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. Ю. Веснин, Т. А. Козловская

Аннотация. Строится бесконечное семейство замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p,q)$, где $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$ и $(p,q) = 1$, таких, что $M_n(p,q)$ является n-листным циклическим накрытием линзового пространства $L(p,q)$, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, разветвленное накрытие, диаграмма Хегора.

Введение

В работе исследуется класс замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий, являющихся разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств. При этом накрытия разветвлены над двухкомпонентными зацеплениями. Напомним, что по теореме Александера [1] каждое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие является разветвленным накрытием трехмерной сферы S^3. Многообразия, представимые как циклические накрытия S^3, разветвленные над узлами или зацеплениями, являются объектами интенсивных исследований. В частности, актуальна проблема определения для многообразия, заданного в терминах фундаментального многогранника, хирургии Дена, диаграммы Хегора, или кристаллизации, является ли оно разветвленным циклическим накрытием S^3, и описания соответствующего множества ветвления.

Наиболее изучен случай, когда множеством ветвления является двухмостовый узел или двухмостовое зацепление. Примеры такого рода хорошо известны: додекаэдральное гиперболическое пространство Вебера — Зейферта [2], которое является пятилистным строго циклическим накрытием S^3, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением Уайтхеда; многообразия Фибоначчи [3], являющиеся циклическими накрытиями S^3, разветвленными над узлом «восьмерка»; дробные многообразия Фибоначчи [4], являющиеся циклическими накрытиями S^3, разветвленными над двухмостовыми $\left(2k + \frac{1}{2k}\right)$-узлами. Различные описания (в терминах фундаментальных многогранников, хирургий Дэна, сплетений Хегора, кристаллизаций, двухлистных разветвленных накрытий сферы) трехмерных многообразий, являющихся циклическими накрытиями S^3, разветвленными над двухмостовыми узлами и зацеплениями, приведены в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10–01–00642 и 10–01–91056), а также Интеграционного гранта СО РАН и УрО РАН.

Интерес к получению различных описаний трехмерных многообразий с циклической симметрией был связан, в частности, с вопросом Данвуди из работы [6], где построено семейство трехмерных многообразий, диаграммы Хегора которых имеют циклическую симметрию. Замкнутые ориентируемые трехмерные многообразия этого семейства принято называть *многообразиями Данвуди*. Данвуди нашел представления их фундаментальных групп как групп с циклическим представлением в смысле [7]. Оказалось, что полиномы, ассоциированные с циклическими представлениями, совпадают с полиномами Александера некоторых узлов в S^3. Вопрос Данвуди состоял в следующем: являются ли рассматриваемые многообразия циклическими накрытиями S^3, разветвленными над узлами с указанными полиномами Александера? Положительные ответы на вопрос Данвуди для многих частных случаев получены в работах [4, 8–12]. В общем случае результат оказался следующим [13]: многообразия Данвуди являются в точности циклическими разветвленными накрытиями $(1,1)$-узлов, т. е. узлов, допускающих 1-мостовое представление рода 1. Другими словами, многообразия Данвуди — это циклические накрытия многообразий, допускающих сплетение Хегора рода один, разветвленные над 1-мостовыми узлами, лежащими в этих многообразиях. Напомним, что многообразия, допускающие сплетение Хегора рода один, — это сфера S^3, пространство $S^2 \times S^1$ и линзовые пространства $L(p,q)$. Класс $(1,1)$-узлов содержит двухмостовые узлы и торические узлы в S^3.

Существование и единственность циклических разветвленных накрытий $(1,1)$-узлов исследованы в [14]; там же приведен алгоритм вычисления фундаментальной группы накрытия. Основанный на этом алгоритме подход к построению полинома Александера для $(1,1)$-узлов реализован в [15]. Оценки сложности многообразий Данвуди получены в [16].

Таким образом, циклические разветвленные накрытия двухмостовых узлов и зацеплений, а также $(1,1)$-узлов изучены достаточно подробно. Циклические разветвленные накрытия линзовых пространств, разветвленные над зацеплениями с двумя и более компонентами, исследованы значительно меньше. Отметим лишь, что двулистные накрытия над линзовыми пространствами, соизмеримые с многогранниками Коксетера, рассмотрены в [17, 18]. Цель данной работы — разработать универсальный подход к построению фундаментальных многогранников таких многообразий. А именно, определяя попарные отождествления граней симплициальных комплексов, мы построим бесконечное семейство замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p,q)$, где $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, $0 < q < p$ и $(p,q) = 1$.

В разд. 1 приводится пример трехмерного гиперболического многообразия $M_3(3,1)$, трехлистно циклически разветвленно накрывающего линзовое пространство $L(3,1)$. Фундаментальным многогранником для этого многообразия является правильный гиперболический $2\pi/3$-икосаэдр. Обобщения конструкции многообразия $M_3(3,1)$, изучавшиеся в [19–21], позволили построить многообразия $M_n(3,1)$ для $n \geqslant 2$. В разд. 2 многообразия $M_n(3,1)$ обобщаются до многообразий $M_n(p,1)$, а в разд. 3 — до многообразий $M_n(p,q)$. В теореме 3.1 устанавливается, что $M_n(p,q)$ действительно является многообразием, а в теореме 3.2 — что $M_n(p,q)$ является n-листным циклическим накрытием линзового пространства $L(p,q)$, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением. В разд. 4 подробно обсуждается типичный частный случай — многообразия $M_3(5,q)$, $q = 1, 2, 3, 4$.

1. Гиперболический $2\pi/3$-икосаэдр и многообразие $M_3(3,1)$

Хорошо известно, что для построения первых примеров замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий постоянной отрицательной кривизны использовались правильные многогранники, реализованные в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. А именно [2], додекаэдральное гиперболическое пространство Вебера — Зейферта получено попарным отождествлением граней правильного $2\pi/5$-додекаэдра изометриями $\mathbb{H}^3$. Другие многообразия, получающиеся из гиперболического $2\pi/5$-додекаэдра, строились в [22, 23]. Вторым правильным гиперболическим многогранником, являющимся источником интересных примеров, служит $2\pi/3$-икосаэдр. Три гиперболических многообразия, для которых $2\pi/3$-икосаэдр является фундаментальным многогранником, построены в [22].

Полный список замкнутых ориентируемых трехмерных гиперболических многообразий, для которых фундаментальным многогранником является $2\pi/5$-додекаэдр или $2\pi/3$-икосаэдр, получен Ричардсоном и Рубинштейном в 1982 г. [24]. Однако, насколько известно авторам, эта работа до сих пор существует только в виде препринта. Одним из источников, где можно найти список многообразий Ричардсона — Рубинштейна, является работа [25]. Этот список содержит шесть многообразий, для которых $2\pi/3$-икосаэдр является фундаментальным многогранником. В [25] они обозначены через M_{23}, M_{24}, M_{25}, M_{26}, M_{27}, M_{28}. Как видно из построения, многообразия M_{24} и M_{25} обладают симметриями третьего порядка. Более того, в [19, 20] показано, что оба эти многообразия — трехлистные циклические разветвленные накрытия линзового пространства $L(3,1)$ (подробнее о линзовых пространствах см., например, [26, § 60]).

Для многообразия M_{24} из [25] здесь и далее будем применять обозначение $M_3(3,1)$, что будет согласовано с дальнейшими обозначениями, используемыми в этой статье. Напомним построение этого многообразия.

Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathscr{P}_3(3)$, изображенный на рис. 1, где предполагается, что правая и левая стороны, обозначенные $P_1R_1S_1$, должны быть отождествлены; $\mathscr{P}_3(3)$ имеет 12 вершин, 30 ребер и 20 граней и комбинаторно совпадает с икосаэдром.

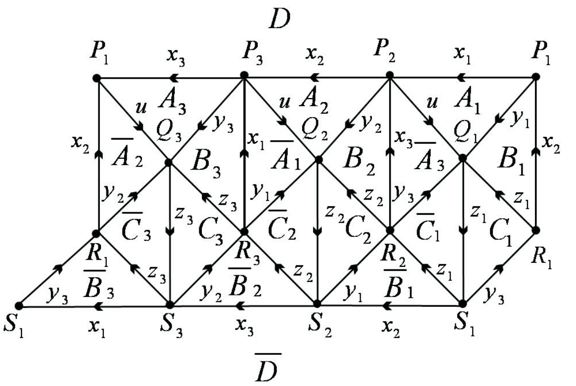

Рис. 1. Комплекс $\mathscr{P}_3(3)$ для многообразия $M_3(3,1)$.

Пусть $\varphi_3(3,1)$ — попарное отождествление граней $\mathscr{P}_3(3)$, которое в обозначениях рис. 1 имеет вид

$$a_i : \mathbf{A}_i \to \overline{\mathbf{A}}_\mathbf{i}\ [P_iP_{i+1}Q_i \to R_{i+2}P_{i+2}Q_{i+1}], \quad b_i : \mathbf{B}_i \to \overline{\mathbf{B}}_\mathbf{i}\ [R_iP_iQ_i \to S_iS_{i+1}R_{i+1}],$$

$$c_i : \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}\ [Q_iR_iS_i \to S_iQ_iR_{i+1}], \quad d : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}\ [P_1P_2P_3 \to S_3S_1S_2],$$

где $i = 1, 2, 3$ и все индексы берутся по модулю 3. Обозначим фактор-пространство $\mathscr{P}_3(3)/\varphi_3(3,1)$ через $M_3(3,1)$. Хорошо известно, что комплекс $\mathscr{P}_3(3)$ может быть реализован как правильный икосаэдр в $\mathbb{H}^3$ со всеми двугранными углами $2\pi/3$. При этом отождествления $\varphi_3(3,1)$ могут быть реализованы сохраняющими ориентацию изометриями пространства H^3 и группа, порожденная этими изометриями, дискретна и не содержит элементов конечного порядка. Таким образом, $M_3(3,1)$ является замкнутым ориентируемым трехмерным гиперболическим многообразием. Его геометрические и топологические свойства изучались в [19–21]. В частности, установлено, что $M_3(3,1)$ является трехлистным циклическим накрытием линзового пространства $L(3,1)$, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением. Обобщения этого примера — многообразия $M_n(3,1)$, являющиеся n-листными циклическими накрытиями $L(3,1)$, разветвленными над 2-компонентными зацеплениями, изучались в [20, 21] (в этих работах многообразия $M_n(3,1)$ обозначены через $M_{24}(n)$).

2. Многообразия $M_n(p,1)$

Построим бесконечное семейство трехмерных многообразий, являющихся циклическими накрытиями линзового пространства $L(p,1)$, разветвленными над некоторыми двухкомпонентными зацеплениями. Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathscr{P}_n(p)$, где $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, изображенный на рис. 2. Он имеет $6n+2$ граней, $(7+p)n$ ребер и $(p+1)n$ вершин. Комплекс $\mathscr{P}_3(p)$ отличается от комплекса $\mathscr{P}_3(3)$, изображенного на рис. 1, тем, что его грани $\mathbf{C}_i$ и $\overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}$ являются p-угольными, а не треугольными. Это сделано с помощью добавления на каждом ребре S_iQ_i, $i = 1, \ldots, n$, вспомогательных точек $T_i^1, T_i^2, \ldots, T_i^s$ (нумерация идет от S_i к Q_i), где $s = p - 3$.

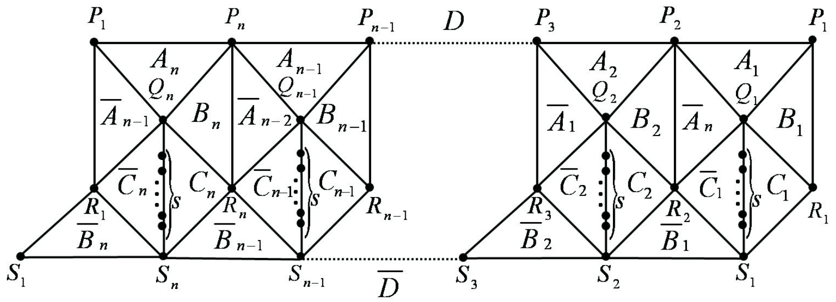

Рис. 2. Построение многообразия $M_n(p)$.

Зададим попарное отождествление $\varphi_n(p,1)$ граней $\mathscr{P}_n(p)$ по правилу

$$a_i : \mathbf{A}_i \to \overline{\mathbf{A}}_\mathbf{i}\ [P_iP_{i+1}Q_i \to R_{i+2}P_{i+2}Q_{i+1}],$$
$$b_i : \mathbf{B}_i \to \overline{\mathbf{B}}_\mathbf{i}\ [R_iP_iQ_i \to S_iS_{i+1}R_{i+1}],$$
$$c_i : \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}\ \left[Q_iR_iS_iT_i^1 \ldots T_i^s \to T_i^sQ_iR_{i+1}S_iT_i^1 \ldots T_i^{s-1}\right],$$
$$d : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}\ [P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n \to S_3S_4 \ldots S_1S_2],$$

где $i = 1, \ldots, n$, все индексы берутся по модулю n и грани отождествляются в соответствии с указанным порядком вершин. Очевидно, $\varphi_n(p,1)$ задает отношение эквивалентности на гранях, ребрах и вершинах $\mathscr{P}_n(p)$.

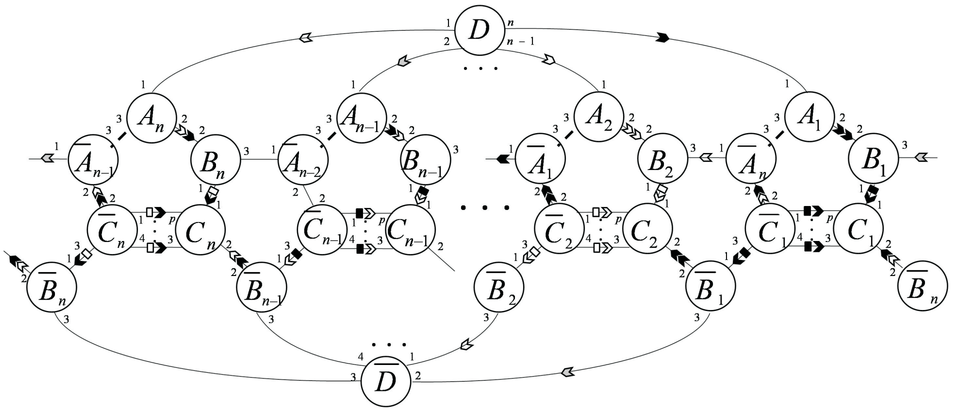

Рис. 3. Диаграмма Хегора многообразия $M_n(p,1)$.

Предложение 2.1. *Фактор-пространство* $M_n(p,1) = \mathscr{P}_n(p)/\varphi_n(p,1)$, *где* $n \geqslant 2$ *и* $p \geqslant 3$, *является ориентируемым трехмерным многообразием.*

Доказательство. Напомним, что согласно теореме Зейферта — Трельфалля [26, с. 267] $M_n(p,1)$ является многообразием тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика равна нулю. Обозначим через σ_k, $k = 0,1,2,3$, число k-мерных клеток в $M_n(p,1)$. Очевидно, $\sigma_3 = 1$. Поскольку 2-клетки разбиваются на классы эквивалентности, соответствующие a_i, b_i, c_i, d, где $i = 1,\dots,n$, получаем $\sigma_2 = 3n+1$. Все 1-клетки распадаются на классы эквивалентности четырех типов:

$$(x_i) : P_iP_{i+1} \xrightarrow{a_i} R_{i+2}P_{i+2} \xrightarrow{b_{i+2}} S_{i+2}S_{i+3} \xrightarrow{d^{-1}} P_iP_{i+1};$$

$$(y_i) : P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$

$$(z_i) : R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^1S_i \xrightarrow{c_i^{-1}} \dots \xrightarrow{c_i^{-1}} Q_iT_i^s \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$

$$(u) : P_2Q_1 \xrightarrow{a_1} P_3Q_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} P_1Q_n \xrightarrow{a_n} P_2Q_1,$$

где $i = 1,\dots,n$. Следовательно, $\sigma_1 = 3n+1$. Нетрудно видеть, что все вершины лежат в одном классе эквивалентности, значит, $\sigma_0 = 1$. Таким образом, $\chi(M_n(p,1)) = 1-(3n+1)+(3n+1)-1 = 0$, и $M_n(p,1)$ — замкнутое ориентируемое 3-многообразие.

Напомним (см., например, [27]), что представление фундаментальной группы трехмерного многообразия называется *геометрическим*, если оно соответствует диаграмме Хегора многообразия.

Предложение 2.2. *Фундаментальная группа многообразия* $M_n(p,1)$, *где* $n \geqslant 2$ *и* $p \geqslant 3$, *имеет следующее геометрическое представление:*

$$\pi_1(M_n(p,1)) = \big\langle a_1,\dots,a_n; b_1,\dots,b_n; c_1,\dots,c_n; d \mid a_1a_2\dots a_n = 1,$$
$$a_ib_{i+2}d^{-1} = 1,\ a_ic_{i+1}^{-1}b_i^{-1} = 1,\ b_ic_i^{-(p-1)} = 1;\ i = 1,\dots,n\big\rangle.$$

Доказательство. Известно [26, § 63], что если трехмерное многообразие задано попарным отождествлением граней многогранника и число пар граней равно h, то для этого многообразия существует сплетение Хегора рода h. В нашем случае $h = 3n+1$. Открытая диаграмма Хегора многообразия $M_n(p,1)$ имеет вид, как на рис. 3.

Отождествим диски A_1 и $\overline{A}_1$ таким образом, чтобы указанные на границе одного диска метки 1, 2, 3 совпали с такими же метками на границе второго диска. Проделаем подобные отождествления дисков $A_2, \dots, A_n$, $B_1, \dots, B_n$, $C_1, \dots, C_n$, D с парными им дисками $\overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$, $\overline{B}_1, \dots, \overline{B}_n$, $\overline{C}_1, \dots, \overline{C}_n$, $\overline{D}$. В результате из открытой диаграммы Хегора получим диаграмму Хегора рода $3n+1$ многообразия $M_n(p,1)$. Дуги на открытой диаграмме Хегора, концы которых находятся на границах дисков, объединяются в $3n+1$ замкнутые кривые на поверхности Хегора. Каждая такая кривая задает соотношение в представлении фундаментальной группы многообразия, которое имеет вид произведения меток на дисках, встречающихся на пути движения вдоль кривой [28]. Например, если при движении вдоль кривой встречается переход от диска A_i к диску $\overline{A}_i$, то метка имеет вид a_i.

Предложение 2.3. *Многообразие $M_n(p,1)$, $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, является n-листным циклическим накрытием линзового пространства $L(p,1)$, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением.*

Доказательство. Очевидно, что диаграмма Хегора, изображенная на рис. 3, обладает циклической симметрией n-го порядка, переводящей A_i в A_{i+1}, $\overline{A}_i$ в $\overline{A}_{i+1}$, B_i в B_{i+1}, $\overline{B}_i$ в $\overline{B}_{i+1}$, C_i в C_{i+1}, $\overline{C}_i$ в $\overline{C}_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, и переводящей диски D и $\overline{D}$ в себя. Эта симметрия индуцирует симметрию на многообразии $M_n(p,1)$, которую обозначим через ρ_n. Фактор-пространство $M_n(p,1)/\rho_n$ является трехмерным орбифолдом. Этот орбифолд характеризуется своим носителем (трехмерным многообразием), сингулярным множеством и порядком сингулярности. Открытая диаграмма Хегора носителя орбифолда $M_n(p,1)/\rho_n$ приведена в верхней левой части на рис. 4. На этом рисунке пунктирными линиями изображены две компоненты $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$ сингулярного множества $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ орбифолда. Компонента $\mathscr{L}_1$ идет от диска D до диска $\overline{D}$ и является образом оси симметрии n-го порядка. Компонента $\mathscr{L}_2$ идет от диска A к диску $\overline{A}$ вдоль дуги, соединяющей точки с метками 3 на границах этих дисков.

Покажем, что носителем орбифолда $M_n(p,1)/\rho_n$ является линзовое пространство $L(p,1)$. Для этого с помощью движений Зингера [29] приведем диаграмму Хегора носителя орбифолда к канонической диаграмме линзового пространства $L(p,1)$. Опишем последовательность движений в соответствии с рис. 4.

Начнем с диаграммы в верхней левой части на рис. 4. Род этой диаграммы равен четырем. Склеим диски A и $\overline{A}$, образуя 1-ручку. При этом кривая, соединяющая эти диски, соответствует 2-ручке. Приклеивание 2-ручки «заклеит» 1-ручку. В результате получим диаграмму Хегора рода 3. При этом компонента $\mathscr{L}_2$ сингулярного множества образует тривиальный узел. Далее на диаграмме мы его изображать не будем.

При склеивании двух 1-ручек, соответствующих парам дисков B и $\overline{B}$, а также D и $\overline{D}$, кривая, соединяющая диск B с диском D и диск $\overline{B}$ с диском $\overline{D}$, соответствует 2-ручке. Эта 2-ручка «склеит» две указанные выше 1-ручки в одну. Разрезая эту ручку, получим диаграмму рода 2, где диски B и D объединены в диск B, а диски $\overline{B}$ и $\overline{D}$ — в диск $\overline{B}$.

Разрежем диаграмму вдоль кривой, делящей ее на части G и $\overline{G}$. При этом возникнут два новых диска G, $\overline{G}$. Часть $\overline{G}$ приклеим к основной части диаграммы, отождествляя C и $\overline{C}$.

Склеим 1-ручки, соответствующие парам дисков B, $\overline{B}$ и G, $\overline{G}$. Кривые, соединяющие эти 1-ручки, соответствуют 2-ручке, приклеивание которой уменьшит род диаграммы Хегора. Объединяя диски B и G в диск G и диски $\overline{B}$ и

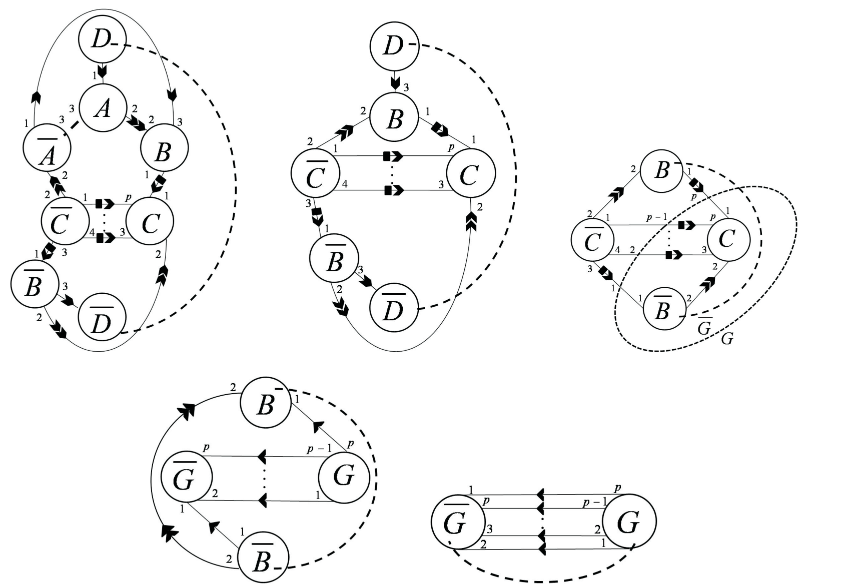

Рис. 4. Преобразования диаграммы Хегора фактор-пространства $M_n(p,1)/\rho_n$.

$\overline{G}$ в диск $\overline{G}$, получим диаграмму Хегора рода 1. Как хорошо известно [28], эта диаграмма является диаграммой Хегора линзового пространства $L(p,1)$. Следовательно, носителем орбифолда $M_n(p,1)/\rho_n$ является линзовое пространство $L(p,1)$. Компонента $\mathscr{L}_1$ множества ветвления изображена на рисунке пунктирной линией, а компонента $\mathscr{L}_2$ является тривиальным узлом. Таким образом, многообразие $M_n(p,1)$ является n-листным циклическим накрытием $L(p,1)$, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением.

3. Многообразия $M_n(p,q)$

Вновь обратимся к симплициальному комплексу $\mathscr{P}_n(p)$, $n \geqslant 2$, $p \geqslant 3$, изображенному на рис. 2. В разд. 2 определены отождествления $\varphi_n(p,1)$, приводившие к многообразиям $M_n(p,1) = \mathscr{P}_n(p)/\varphi_n(p,1)$. Определим на $\mathscr{P}_n(p)$ отождествления $\varphi_n(p,q)$, $0 < q < p$, $(p,q) = 1$, которые содержат $\varphi_n(p,1)$ как частный случай. Положим, что $\varphi_n(p,q)$ отождествляет грани $\mathscr{P}_n(p,q)$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
a_i &: \mathbf{A}_i \to \overline{\mathbf{A}}_i \ [P_iP_{i+1}Q_i \to R_{i+2}P_{i+2}Q_{i+1}],\\
b_i &: \mathbf{B}_i \to \overline{\mathbf{B}}_i \ [R_iP_iQ_i \to S_iS_{i+1}R_{i+1}],\\
c_i &: \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_i \ \big[Q_iR_iS_iT_i^1\ldots T_i^s \to T_i^sQ_iR_{i+1}S_iT_i^1\ldots T_i^{s-1}\big], \quad \text{если } q=1;\\
&\qquad\qquad \big[Q_iR_iS_iT_i^1\ldots T_i^s \to T_i^{s-1}T_i^sQ_iR_{i+1}S_iT_i^1\ldots T_i^{s-2}\big], \quad \text{если } q=2;\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&\qquad\qquad \big[Q_iR_iS_iT_i^1\ldots T_i^s \to T_i^1\ldots T_i^sQ_iR_{i+1}S_i\big], \quad \text{если } \ q=p-3;\\
&\qquad\qquad \big[Q_iR_iS_iT_i^1\ldots T_i^s \to S_iT_i^1\ldots T_i^sQ_iR_{i+1}\big], \quad \text{если } \ q=p-2;\\
&\qquad\qquad \big[Q_iR_iS_iT_i^1\ldots T_i^s \to R_{i+1}S_iT_i^1\ldots T_i^sQ_i\big], \quad \text{если } \ q=p-1;\\
d &: \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}} \ [P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n \to S_3S_4\ldots S_1S_2].
\end{aligned}
$$

Как видно из определения, для отождествления $\varphi_n(p,q)$ действия a_i, b_i, d в точности такие же, как и для отождествления $\varphi_n(p,1)$ из предыдущего раздела, и не зависят от q. Однако действие c_i существенно зависит от q.

Теорема 3.1. *Фактор-пространство $M_n(p,q) = \mathscr{P}_n(p)/\varphi_n(p,q)$, где $n \geqslant 2$ и $p \geqslant 3$, $0 < q < p$, $(p,q) = 1$, является ориентируемым трехмерным многообразием.*

Доказательство. Покажем, что эйлерова характеристика $\chi(M_n(p,q))$ обращается в нуль. Пусть σ_k — число k-мерных клеток в $M_n(p,q)$. Аналогично доказательству предложения 2.1 $\sigma_3 = 1$ и $\sigma_2 = 3n+1$. Все 1-клетки распадаются на четыре типа классов эквивалентности: классы x_i, $i = 1,\dots,n$, и u, не зависящие от q:

$$(x_i): P_iP_{i+1} \xrightarrow{a_i} R_{i+2}P_{i+2} \xrightarrow{b_{i+2}} S_{i+2}S_{i+3} \xrightarrow{d^{-1}P_i} P_{i+1};$$
$$(u): P_2Q_1 \xrightarrow{a_1} P_3Q_2 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} P_1Q_n \xrightarrow{a_n} P_2Q_1,$$

и классы y_i и z_i, где $i = 1,\dots,n$, зависящие от q. Соотношения y_i в зависимости от значений q имеют следующий вид:

$$q=1\colon P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$
$$q=2\colon P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^1S_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^3T_{i+1}^2 \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} \dots \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$
$$\vdots$$
$$q=p-3\colon P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^{s-1}T_{i+1}^{s-2} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^{s-4}T_{i+1}^{s-5} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} \dots \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$
$$q=p-2\colon P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^{s}T_{i+1}^{s-1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^{s-2}T_{i+1}^{s-3} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} \dots \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$
$$q=p-1\colon P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} Q_{i+1}T_{i+1}^{s} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^{s}T_{i+1}^{s-1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} \dots \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i.$$

Соотношения z_i в зависимости от значений q имеют вид

$$q=1: R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^1S_i \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^2T_i^1 \xrightarrow{c_i^{-1}} \dots \xrightarrow{c_i^{-1}} Q_iT_i^s \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$
$$q=2: R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^2T_i^1 \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^4T_i^3 \xrightarrow{c_i^{-1}} \dots \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^sT_i^{s-1} \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$
$$\vdots$$
$$q=p-3: R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^sT_i^{s-1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^{s-3}T_i^{s-4} \xrightarrow{c_i^{-1}} \dots \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^2T_i^1 \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$
$$q=p-2: R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} Q_iT_i^s \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^{s-1}T_i^{s-2} \xrightarrow{c_i^{-1}} \dots \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^1S_i \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$
$$q=p-1: R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i.$$

Нетрудно заметить, что для фиксированного q для каждого i суммарно в соотношениях для y_{i-1} и z_i отождествление c_i^{-1} встречается ровно p раз. Следовательно, $\sigma_1 = 3n+1$. Поскольку все вершины лежат в одном классе эквивалентности, $\sigma_0 = 1$. Таким образом, $\chi(M_n(p,q)) = 0$, и по теореме Зейферта — Трельфалля [26, § 63] $M_n(p,q)$ — замкнутое 3-многообразие.

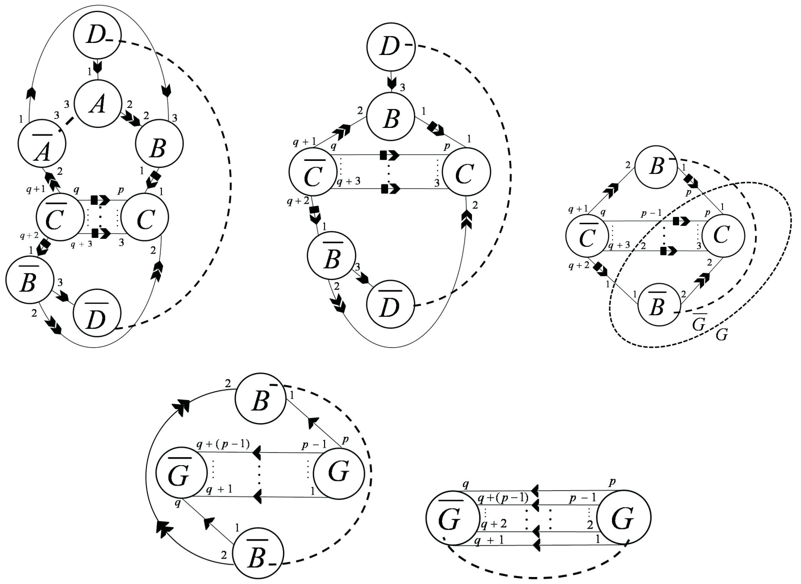

Рис. 5. Преобразования диаграммы Хегора фактор-пространства $M_n(p,q)\rho_n$.

Теорема 3.2. *Многообразие* $M_n(p,q)$, $n \geq 2$, $p \geq 3$, $(p,q) = 1$, *является* n*-листным циклическим накрытием линзового пространства* $L(p,q)$, *разветвленным над двухкомпонентным зацеплением.*

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 2.3, обозначим через ρ_n вращательную симметрию комплекса $\mathscr{P}_n(p)$, индуцирующую циклическую симметрию на фактор-пространстве $M_n(p,q) = \mathscr{P}_n(p)/\varphi_n(p,q)$. Обозначим эту симметрию также через ρ_n. Фактор-пространство $M_n(p,q)/\rho_n$ является трехмерным орбифолдом. Под диаграммой Хегора орбифолда $M_n(p,q)/\rho_n$ будем понимать диаграмму Хегора его носителя с информацией о сингулярном множестве (рис. 5). Сингулярное множество является двухкомпонентным, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$. Компонента $\mathscr{L}_1$ соответствует оси вращения ρ_n, а компонента $\mathscr{L}_2$ — классу ребер $P_{i+1}Q_i$, $i = 1, \ldots, n$. С помощью последовательности движений Зингера, приведенных на рис. 5, которые аналогичны преобразованиям на рис. 4, диаграмма Хегора носителя фактор-пространства $M_n(p,q)/\rho_n$ приводится к канонической диаграмме линзового пространства $L(p,q)$. Указанные на диаграмме метки $q, q+1, \ldots, q+(p-1)$ берутся по модулю p.

4. Пример: многообразия $M_3(5,q)$

Рассмотрим более подробно многообразия $M_3(5,q)$, где $q = 1,2,3,4$. Каждое многообразие $M_3(5,q)$ получается попарным отождествлением $\varphi_3(5,q)$ граней комплекса $P_3(5)$, приведенного на рис. 6.

Для всех q отождествления a_i, b_i и d определяются одинаково:

$$a_i : \mathbf{A}_i \to \overline{\mathbf{A}}_\mathbf{i}\ [P_iP_{i+1}Q_i \to R_{i+2}P_{i+2}Q_{i+1}],$$

$$b_i : \mathbf{B}_i \to \overline{\mathbf{B}}_\mathbf{i}\ [R_iP_iQ_i \to S_iS_{i+1}R_{i+1}],$$

$$d : \mathbf{D} \to \overline{\mathbf{D}}\ [P_1P_2P_3 \to S_3S_1S_2],$$

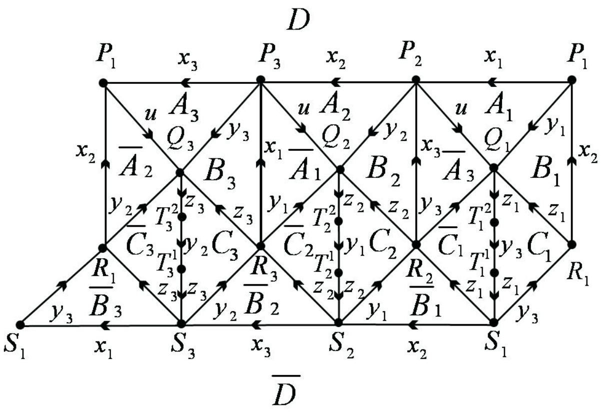

Рис. 6. Построение многообразия $M_3(5,3)$.

где $i = 1, 2, 3$ и все индексы берутся по модулю 3. Отождествления c_i зависят от q следующим образом:

$$\text{для } \varphi_3(5,1)\ c_i : \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}\ \left[Q_iR_iS_iT_i^1T_i^2 \to T_i^2Q_iR_{i+1}S_iT_i^1\right];$$

$$\text{для } \varphi_3(5,2)\ c_i : \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}\ \left[Q_iR_iS_iT_i^1T_i^2 \to T_i^1T_i^2Q_iR_{i+1}S_i\right];$$

$$\text{для } \varphi_3(5,3)\ c_i : \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}\ \left[Q_iR_iS_iT_i^1T_i^2 \to S_iT_i^1T_i^2Q_iR_{i+1}\right];$$

$$\text{для } \varphi_3(5,4)\ c_i : \mathbf{C}_i \to \overline{\mathbf{C}}_\mathbf{i}\ \left[Q_iR_iS_iT_i^1T_i^2 \to R_{i+1}S_iT_i^1T_i^2Q_i\right].$$

Для всех q при отождествлении $\varphi_3(5,q)$ грани комплекса $\mathscr{P}_3(5)$ разбиваются на 10 классов эквивалентности и все вершины лежат в одном классе эквивалентности. Ребра разбиваются на 10 классов эквивалентности, из которых x_i, $i = 1, 2, 3$, и u одинаковы для всех q:

$$(x_i) : P_iP_{i+1} \xrightarrow{a_i} R_{i+2}P_{i+2} \xrightarrow{b_{i+2}} S_{i+2}S_{i+3} \xrightarrow{d^{-1}} P_iP_{i+1};$$

$$(u) : P_2Q_1 \xrightarrow{a_1} P_3Q_2 \xrightarrow{a_2} P_1Q_3 \xrightarrow{a_3} P_2Q_1;$$

а классы y_i и z_i, $i = 1, 2, 3$, зависят от q следующим образом. Для $\varphi_3(5,1)$

$$(y_i) : P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$

$$(z_i) : R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^1S_i \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^2T_i^1 \xrightarrow{c_i^{-1}} Q_iT_i^2 \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$

для $\varphi_3(5,2)$

$$(y_i) : P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^1S_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} Q_{i+1}T_{i+1}^2 \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$

$$(z_i) : R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^2T_i^1 \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$

для $\varphi_3(5,3)$

$$(y_i) : P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^2T_{i+1}^1 \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$

$$(z_i) : R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} T_i^1S_i \xrightarrow{c_i^{-1}} Q_iT_i^2 \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i;$$

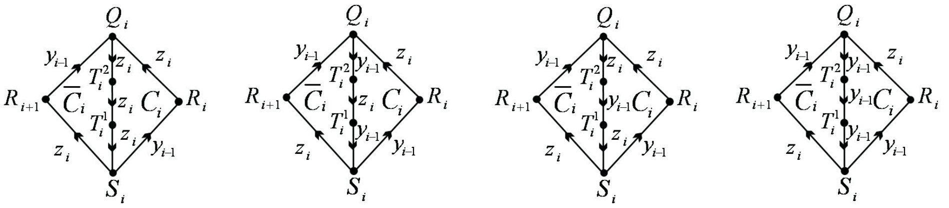

Рис. 7. Способы склеивания граней $\mathbf{C}_i$ и $\overline{\mathbf{C}}_i$.

для $\varphi_3(5,4)$

$$(y_i) : P_iQ_i \xrightarrow{a_i} R_{i+2}Q_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} Q_{i+1}T_{i+1}^2 \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^2T_{i+1}^1 \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} T_{i+1}^1S_{i+1} \xrightarrow{c_{i+1}^{-1}} S_{i+1}R_{i+1} \xrightarrow{b_i^{-1}} P_iQ_i;$$

$$(z_i) : R_iQ_i \xrightarrow{b_i} S_iR_{i+1} \xrightarrow{c_i^{-1}} R_iQ_i.$$

Распределения ребер граней $\mathbf{C}_i$ и $\overline{\mathbf{C}}_i$ по классам эквивалентности y_{i-1} и z_i приведены на рис. 7.

Возникающие фактор-пространства $M_3(5,q) = \mathscr{P}_3(5)/\varphi_3(5,q)$ являются ориентируемыми трехмерными многообразиями с фундаментальными группами

$$\pi_1(M_3(5,q)) = \langle a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; d \mid a_1a_2a_3 = 1,\ a_ib_{i+2}d^{-1} = 1,\ R_i(q) = 1,\ S_i(q) = 1,\ i = 1,2,3\rangle,$$

где слова $R_i(q)$ и $S_i(q)$ определяются по q следующим образом:

$$R_i(1) = a_ic_{i+1}^{-1}b_i^{-1}, \quad R_i(2) = a_ic_{i+1}^{-3}b_i^{-1}, \quad R_i(3) = a_ic_{i+1}^{-2}b_i^{-1}, \quad R_i(4) = a_ic_{i+1}^{-4}b_i^{-1},$$

$$S_i(1) = b_ic_i^{-4}, \quad S_i(2) = b_ic_i^{-2}, \quad S_i(3) = b_ic_i^{-3}, \quad S_i(4) = b_ic_i^{-1}.$$

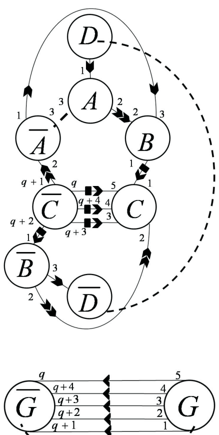

Рис. 8. Диаграммы Хегора носителя $M_3(5,q)/\rho_3$ и линзового пространства $L(5,q)$.

Для каждого q многообразие $M_3(5,q)$ является трехлистным циклическим накрытием линзового пространства $L(5,q)$, разветвленным над двухкомпонентным зацеплением. Такое накрытие соответствует циклической симметрии третьего порядка ρ_3 многообразия $M_3(5,q)$, индуцированной циклической симметрией многогранника $\mathscr{P}_3(5)$ ввиду симметричности правила отождествления $\varphi_3(5,q)$. Диаграмма Хегора носителя орбифолда $M_3(5,q)/\rho_3$ приведена на рис. 8.

Пунктирные линии на диаграмме соответствуют двум компонентам сингулярного множества. С помощью преобразований Зингера эта диаграмма приводится к стандартной диаграмме Хегора линзового пространства $L(5,q)$, приведенной на рис. 8, где пунктиром обозначена одна из компонент сингулярного множества.

Задание многообразий $M_3(5,q)$ фундаментальными многогранниками позволяет перейти к их триангуляции и использовать компьютерную программу Recognizer [30] для нахождения топологических и геометрических инвариантов. Результаты компьютерных вычислений гиперболических объемов и групп гомологий многообразий $M_3(5,q)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1.

многообразие	объем	группа гомологии
$M_3(5,1)$	6.882614782119 ...	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{45}$
$M_3(5,2)$	6.332666642499 ...	$\mathbb{Z}_{15}$
$M_3(5,3)$	6.602288090425 ...	$\mathbb{Z}_{15}$
$M_3(5,4)$	6.424381941185 ...	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{45}$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alexander J. W.* Note on Riemann spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1920. V. 26. P. 370–372.
2. *Weber C., Seifert H.* Die Beiden Dodekaederäume // Math. Z. 1933. Bd 37. S. 237–253.
3. *Helling H., Kim A., Mennicke J.* A geometric study of Fibonacci groups // J. Lie Theory. 1998. V. 8, N 4. P. 1–23.
4. *Веснин А. Ю., Ким А. Ч.* Дробные группы Фибоначчи и многообразия // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 765–775.
5. *Mulazzani M., Vesnin A.* The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena. 2001. V. IL. P. 177–215.
6. *Dunwoody M. J.* Cyclic presentations and 3-manifolds // Proc. Intern. Conf. Groups-Korea'94. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 47–55.
7. *Johnson D.* Topics in the theory of group presentations. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1980 (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 42).
8. *Грасселли Л., Мулаццани М.* Многообразия Зейферта и (1,1)-узлы // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 28–39.
9. *Cavicchioli A., Ruini B., Spaggiari F.* On a conjecture of M. J. Dunwoody // Algebra Colloq. 2001. V. 8, N 2. P. 169–218.
10. *Kim G., Kim Y., Vesnin A.* The knot 5_2 and cyclically presented groups // J. Korean Math. Soc. 1998. V. 35, N 4. P. 961–980.
11. *Kim A. C., Kim Y., Vesnin A.* On a class of cyclically presented groups // Proc. Intern. Conf. Groups-Korea'99. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 211–220.
12. *Mulazzani M., Vesnin A.* Generalized Takahashi manifolds // Osaka Math. J. 2002. V. 39, N 3. P. 705–721.
13. *Grasselli L., Mulazzani M.* Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds // Forum Math. 2001. V. 13, N 3. P. 379–397.
14. *Cristofori P., Mulazzani M., Vesnin A.* Strongly-cyclic branched coverings of knots via $(g,1)$-decompositions // Acta Math. Hung. 2007. V. 116, N 1–2. P. 163–176.
15. *Koda Y.* Strongly-cyclic branched coverings and the Alexander polynomial of knots in rational homology spheres // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 2007. V. 142. P. 259–268.
16. *Cattabriga A., Mulazzani M., Vesnin A.* Complexity, Heegaard diagrams and generalized Dunwoody manifolds // J. Korean Math. Soc. 2010. V. 47, N 3. P. 585–599.
17. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* Сферические группы Коксетера и гиперэллиптические многообразия // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 2. С. 173–177.
18. *Mednykh A., Vesnin A.* Coxeter groups and branched coverings of lens spaces // J. Korean Math. Soc. 2001. V. 38, N 6. P. 1167–1177.
19. *Cavicchioli A., Spaggiari F., Telloni A. I.* Topology of compact space forms from Platonic solids. I // Topology Appl. 2009. V. 156. P. 812–822.
20. *Cavicchioli A., Spaggiari F., Telloni A. I.* Topology of compact space forms from Platonic solids. II // Topology Appl. 2010. V. 157. P. 921–931.
21. *Cristofori P., Kozlovskaya T., Vesnin A.* On Cavicchioli–Spaggiari–Telloni manifolds. Lahore, Pakistan, 2011. 13 p. (Preprint / Abdus Salam School of Math. Sci., GC Univ.; 280).
22. *Best L. A.* On torsion-free discrete subgroups of $PSL(2,\mathbb{C})$ with compact orbit space // Can. J. Math. 1971. V. 23, N 3. P. 451–460.

23. *Lorimer P.* Four dodecahedral spaces // Pacific J. Math. 1992. V. 156, N 2. P. 329–335.
24. *Richardson J. S., Rubinstein J. H.* Hyperbolic manifolds from regular polyhedra / Melbourne: Univ. of Melbourne, 1982. (Preprint).
25. *Everitt B.* 3-manifolds from compact space forms from Platonic solids // Topology Appl. 2004. V. 138. P. 253–263.
26. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. Ижевск: РХД, 2001.
27. *Mulazzani M.* Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of $(1, 1)$-knots // Bull. Korean Math. Soc. 2003. V. 40, N 1. P. 101–108.
28. *Hempel J.* 3-manifolds. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1976. (Ann. Math. Stud.; V. 86).
29. *Singer J.* Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35, N 1. P. 88–111.
30. *Three-manifold Recognizer*: The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University.

Статья поступила 17 марта 2011 г.

Веснин Андрей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vesnin@math.nsc.ru

Козловская Татьяна Анатольевна
Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
konus_magadan@mail.ru