Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 510.643

ОТСУТСТВИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СВОЙСТВА ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЙ $L\alpha$ И Lf

В. Ф. Мурзина

Аннотация. Доказывается отсутствие интерполяционного свойства Крейга для полимодальных исчислений, связанных с некоторыми пространствами Ершова.

Ключевые слова: модальная логика, интерполяционное свойство, топологическое пространство.

Введение

Интерполяционное свойство, введенное Крейгом в 1957 г. [1], является одним из фундаментальных свойств логических теорий наравне с непротиворечивостью и полнотой.

Напомним, что *исчисление L обладает интерполяционным свойством Крейга*, если выполняется следующее утверждение.

Если $L \vdash A \to B$, то существует формула C такая, что $L \vdash A \to C$, $L \vdash C \to B$ и C содержит лишь общие переменные формул A и B. Такая формула C называется *интерполянтом формулы $A \to B$*.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная проблеме интерполяции. Несмотря на то, что многие известные неклассические логики обладают этим свойством, основная масса неклассических логик не имеет этого свойства [2]. Так, например, число нормальных расширений пропозициональной модальной логики $S4$ с интерполяционным свойством конечно. Л. Л. Максимовой также доказано, что все логики бесконечного слоя, являющиеся расширениями известной модальной логики $K4.3$, не имеют интерполяционного свойства Крейга и даже более слабого варианта интерполяционного свойства — дедуктивного интерполяционного свойства [3]. В данной работе исследуется вопрос: обладают ли исчисления $L\alpha$ и Lf, связанные с α-пространствами Ершова [4] и введенные в [5, 6], интерполяционным свойством Крейга?

В последнее время неклассические логики широко применяются к изучению геометрических структур [7]. Применение модальной логики к изучению топологических пространств можно объяснить тем, что модальные логики высказываний можно исследовать с точки зрения их топологической (окрестностной) семантики. Кроме того, известно, что невозможно многие топологические структуры определить в языке первого порядка. Таким образом, возникает необходимость использовать язык второго порядка. Хотя при аксиоматизации топологических пространств в языке модальной логики строятся более слабые исчисления, они, как правило, являются разрешимыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00358) и ИНТАС (грант 04–77–7080).

В [5, 6] исследовались полимодальные логики, связанные с топологическими пространствами Ершова (α-пространствами, f-пространствами, f_0-пространствами). При этом рассматривалась задача построения логики, описывающей данный класс топологических пространств, и исследования ее свойств. В [5] введено разрешимое модальное исчисление Lf в языке с одной модальностью $\Box_R$ и дополнительной константой β, которое является полным относительно строго линейно упорядоченных f-моделей. В [6] найдено разрешимое полимодальное исчисление $L\alpha$ в языке с двумя модальностями $\Box_R$, $\Box_\prec$ и константой β, полное относительно строго линейно упорядоченных α-моделей.

В данной работе доказывается отсутствие интерполяции для исчислений $L\alpha$ и Lf. Для доказательства этого факта нам потребуется полнота исчисления $L\alpha$ относительно $\tilde{\alpha}$-моделей, доказанная в [6], и полнота исчисления Lf относительно F-моделей, доказанная в [5]. Отметим, что, хотя исчисления Lf, $L\alpha$ содержат $K4.3$, отсутствие интерполяционного свойства не является тривиальным следствием [3]: язык для Lf, $L\alpha$ является более богатым, так как содержит дополнительную константу β, а в случае исчисления $L\alpha$ — еще и дополнительную модальность. Поэтому возникает необходимость отдельного доказательства отсутствия интерполяционного свойства для Lf, $L\alpha$, что и проделано в данной работе.

Автор выражает искреннюю благодарность Л. Л. Максимовой за неоценимую помощь в работе.

1. Предварительные сведения

Определение. *Шкалами* будем называть тройки вида $\langle X, X_0, R\rangle$ и четверки $\langle X, X_0, R, \prec\rangle$, где $X_0 \subseteq X$ и R, $\prec$ — бинарные отношения на X.

Определение. Пусть $F = \langle X, X_0, R\rangle$ — шкала, тогда модальную алгебру $\mathbb{A} = \langle P(X), \cup, \cap, -, \Box_R\rangle$, где для $Y \subseteq X$ выполняется $\Box_R Y = \{x \mid \forall y \in X(xRy \Rightarrow y \in Y)\}$, называют *модальной алгеброй, ассоциированной с* F.

Рассмотрим также модальные алгебры $\mathbb{A} = \langle P(X), \cup, \cap, -, \Box_R, \Box_\prec\rangle$, где $\Box_R Y = \{x \mid \forall y \in X(xRy \Rightarrow y \in Y)\}$ и $\Box_\prec Y = \{x \mid \forall y \in X(x \prec y \Rightarrow y \in Y)\}$ для $Y \subseteq X$, ассоциированные со шкалами вида $\langle X, X_0, R, \prec\rangle$.

Означиванием в модальной алгебре $P(X)$ называется отображение $v : \mathrm{Prop} \to P(X)$ такое, что для любых формул ϕ и ψ

$$v(\beta) = X_0; \quad v(\neg\phi) = X \setminus v(\phi); \quad v(\phi\&\psi) = v(\phi) \cap v(\psi);$$

$$v(\phi \vee \psi) = v(\phi) \cup v(\psi); \quad v(\Box_S\phi) = \Box_S v(\phi), \quad \text{где } S \in \{R, \prec\}.$$

Формула ϕ называется *истинной в модальной алгебре*, если $v(\phi)$ является единицей этой алгебры.

В дальнейшем нам понадобится эквивалентное определение модели, заданное с помощью бинарного отношения $\models$ между множеством X и множеством переменных Prop. Пусть $F = \langle X, X_0, R\rangle$ (или $\langle X, X_0, R, \prec\rangle$) — шкала. Отношение $\models$ определяется следующим образом. Пусть задано означивание v, т. е. отображение $v : \mathrm{Prop} \to P(X)$. Считаем, что для каждой пропозициональной переменной p_i и любого $x \in X$ задано

$$x \models p_i \iff x \in v(p_i), \quad x \models \beta \iff x \in v(\beta).$$

Таким образом, для каждой пропозициональной переменной p_i и любого $x \in X$ задано одно из двух: $x \models p_i$ или неверно, что $x \models p_i$. Тогда нетрудно доказать, что для любых формул ϕ и ψ выполняется следующее:

1) $x \models \beta \iff x \in X_0$,
2) $x \models \neg\phi \iff$ неверно, что $x \models \phi$,
3) $x \models \phi \& \psi \iff (x \models \phi$ и $x \models \psi)$,
4) $x \models \phi \vee \psi \iff (x \models \phi$ или $x \models \psi)$,
5) $x \models \phi \rightarrow \psi \iff (x \not\models \phi$ или $x \models \psi)$,
6) $x \models \Box_S \phi \iff \forall y(xSy \Rightarrow y \models \phi)$, где $S \in \{R, \prec\}$.

Таким образом, формула ϕ является истинной в модальной алгебре $M = \langle P(X), X_0, R, \rangle$ (модальной алгебре $M = \langle P(X), X_0, R, \prec, \rangle$) при означивании v тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ верно $x \models \phi$.

Определение. Шкала $\langle X, X_0, R\rangle$ называется *F-шкалой*, если выполняются следующие условия:
1) R — транзитивное отношение;
2) $x = y$ или xRy, или yRx;
3) $xRy \Rightarrow \exists x_0 \in X_0$ $(xRx_0$ и $(x_0Ry$ или $x_0 = y))$.

Четверка $\langle X, X_0, R, \prec\rangle$, где $X_0 \subseteq X$ и R, $\prec$ — бинарные отношения на X, называется *$\tilde{\alpha}$-шкалой*, если:
(I) 1) R — транзитивное отношение;
2) $x = y$ или xRy или yRx;
3) $x \prec y \Rightarrow (xRy$ или $x = y)$;
4) $x \prec yRz \Rightarrow x \prec z$;
5) $xRy \prec z \Rightarrow x \prec z$.
(II) 1) $x_0 \in X_0$, $x_0 \prec x \Rightarrow \exists x_0' \in X_0(x_0 \prec x_0' \prec x)$;
2) $x \prec y \Rightarrow \exists x_0 \in X_0((xRx_0$ или $x = x_0)$ и $x_0 \prec y)$;
3) $xRy \Rightarrow \exists x_0 \in X_0(xRx_0$ и $x_0 \prec y)$.

Определение. *F-моделью* (*$\tilde{\alpha}$-моделью*) называется модель, основанная на соответствующей шкале.

Теорема 1 [5, 6]. (1) *Формула A выводима в исчислении Lf тогда и только тогда, когда A истинна во всех F-моделях.*

(2) *Формула A выводима в исчислении $L\alpha$ тогда и только тогда, когда A истинна во всех $\tilde{\alpha}$-моделях.*

2. Отсутствие интерполяции

Обозначим через $\boxdot C$ сокращение для формулы $\Box_R C \& C$. В данной работе показывается, что верна следующая

Теорема 2. *Формула $A(p_1, p_2, q_1) \rightarrow B(p_1, p_2, q_2)$, где*

$$A(p_1, p_2, q_1) = \boxdot((p_1 \rightarrow \boxdot q_1) \& (\boxdot(p_2 \rightarrow \boxdot q_1) \rightarrow \boxdot q_1) \& (\boxdot q_1 \rightarrow p_1 \vee p_2)),$$

$$B(p_1, p_2, q_2) = \boxdot((p_2 \rightarrow \boxdot q_2) \& (\boxdot(p_1 \rightarrow \boxdot q_2) \rightarrow \boxdot q_2) \& (\boxdot q_2 \rightarrow p_1 \vee p_2)) \rightarrow (p_1 \vee p_2),$$

выводима в исчислениях $L\alpha$ и Lf и не имеет интерполянта.

Таким образом, исчисления $L\alpha$ и Lf не обладают интерполяционным свойством Крейга. Заметим, что приведенная в теореме формула предложена в [2]. Кроме того, если в формуле $A(p_1, p_2, q_1) \rightarrow B(p_1, p_2, q_2)$ везде $\Box_R$ заменить на $\Box_\prec$, то теорема 2 будет верна.

Доказательство теоремы состоит из следующих трех утверждений.

Предложение 1. *Формула* $A(p_1,p_2,q_1) \to B(p_1,p_2,q_2)$, *где*

$$A(p_1,p_2,q_1) = \boxdot((p_1 \to \boxdot q_1)\&(\boxdot(p_2 \to \boxdot q_1) \to \boxdot q_1)\&(\boxdot q_1 \to p_1 \vee p_2)),$$

$$B(p_1,p_2,q_2) = \boxdot((p_2 \to \boxdot q_2)\&(\boxdot(p_1 \to \boxdot q_2) \to \boxdot q_2)\&(\boxdot q_2 \to p_1 \vee p_2)) \to (p_1 \vee p_2),$$

выводима в исчислениях $L\alpha$ *и* Lf.

Предложение 2. *Не существует такой формулы* $C(p_1,p_2)$, *что формулы* $A(p_1,p_2,q_1) \to C(p_1,p_2)$, $C(p_1,p_2) \to B(p_1,p_2,q_2)$ *выводимы в исчислении* $L\alpha$.

Предложение 3. *Не существует такой формулы* $C(p_1,p_2)$, *что формулы* $A(p_1,p_2,q_1) \to C(p_1,p_2)$, $C(p_1,p_2) \to B(p_1,p_2,q_2)$ *выводимы в исчислении* Lf.

Доказательство предложения 1. Достаточно показать, что формула $A(p_1,p_2,q_1) \to B(p_1,p_2,q_2)$ истинна во всех моделях с транзитивным отношением R, которое удовлетворяет следующему условию: $x = y$ или xRy, или yRx. Так как в F- и $\tilde{\alpha}$-моделях эти условия выполняются, по теореме 1 имеем выводимость формулы $A(p_1,p_2,q_1) \to B(p_1,p_2,q_2)$ в Lf и $L\alpha$.

Предположим, что формула $A(p_1,p_2,q_1) \to B(p_1,p_2,q_2)$ опровергается в модели с транзитивным и линейным отношением R. Тогда существует $x \in X$ такой, что $x \models A(p_1,p_2,q_1)$, $x \not\models B(p_1,p_2,q_2)$.

Таким образом, $x \models \boxdot(p_1 \to \boxdot q_1)$, $x \models \boxdot(\boxdot(p_2 \to \boxdot q_1) \to \boxdot q_1)$, $x \models \boxdot(\boxdot q_1 \to p_1 \vee p_2)$, $x \models \boxdot(p_2 \to \boxdot q_2)$, $x \models \boxdot(\boxdot q_2 \to p_1 \vee p_2)$, $x \models \boxdot(\boxdot(p_1 \to \boxdot q_2) \to \boxdot q_2)$, $x \not\models p_1 \vee p_2$. Тогда $x \not\models \boxdot q_1$, $x \not\models \boxdot q_2$, следовательно, $x \not\models \boxdot(p_2 \to \boxdot q_1)$, $x \not\models \boxdot(p_1 \to \boxdot q_2)$. Тем самым существует $y \in X$ такой, что xRy и $y \models p_2$, $y \not\models \boxdot q_1$. Также существует $z \in X$ такой, что xRz и $z \models p_1$, $z \not\models \boxdot q_2$ (заметим, что y, z не могут совпадать с x, так как $x \not\models p_1$, $x \not\models p_2$.) Поскольку $x \models \boxdot(p_1 \to \boxdot q_1)$, xRz и $z \models p_1$, то $z \models \boxdot q_1$. Аналогично получаем, что $y \models \boxdot q_2$.

Таким образом, $y \neq z$ (так как $y \models \boxdot q_2$ и $z \not\models \boxdot q_2$). Кроме того, неверно, что yRz и что zRy (ибо если yRz, то $z \models \boxdot q_2$, поскольку $y \models \boxdot q_2$ и отношение R — транзитивно. Аналогично если zRy, то $y \models \boxdot q_1$ в силу того, что $z \models \boxdot q_1$ и отношение R транзитивно). Это противоречит условию на отношение R, и предложение 1 доказано.

Доказательство предложения 2. Предположим противное, и пусть существует формула $C(p_1,p_2)$ такая, что $A(p_1,p_2,q_1) \to C(p_1,p_2)$, $C(p_1,p_2) \to B(p_1,p_2,q_2)$ выводимы в $L\alpha$. Тогда по теореме 1 эти формулы истинны во всех $\tilde{\alpha}$-моделях.

Пусть $F = \langle X, X_0, R, \prec\rangle$, где $X = \{0, \infty, \dots, 3, 2, 1\}$, $X_0 = X$, R — транзитивное, рефлексивное, линейное отношение на X такое, что $0R\infty R \dots R3R2R1$ и $\prec = R$. Рассмотрим $F' = \langle X', X'_0, R', \prec'\rangle$, где $X' = X \setminus \{\infty\}$, $X'_0 = X'$, R' — ограничение R на X', $\prec' = R'$. Заметим, что шкалы F, F' являются $\tilde{\alpha}$-шкалами.

Рассмотрим модальную алгебру $\mathbb{A} = \langle P(X'), \cup, \cap, -, \Box_{R'}, \Box_{\prec'}\rangle$, где для $Y \subseteq X'$ выполняются $\Box_{R'}Y = \{x \mid \forall y \in X'(xR'y \Rightarrow y \in Y)\}$ и $\Box_{\prec'}Y = \{x \mid \forall y \in X'(x \prec' y \Rightarrow y \in Y)\}$.

Рассмотрим также модальные алгебры $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2 = \langle P(X), \cup, \cap, -, \Box_R, \Box_\prec\rangle$, где $\Box_R Y = \{x \mid \forall y \in X(xRy \Rightarrow y \in Y)\}$ и $\Box_\prec Y = \{x \mid \forall y \in X(x \prec y \Rightarrow y \in Y)\}$ для $Y \subseteq X$.

Зададим означивания v, v_1, v_2 в модальных алгебрах $\mathbb{A} = P(X')$, $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2 = P(X)$ соответственно. Пусть M — множество четных целых чисел без 0, т. е. $M = \{2n \mid n \in N\} \setminus \{0\}$. Положим

$$v(\beta) = X'_0, \quad v(p_1) = X' \setminus (M \cup \{0\}), \quad v(p_2) = M;$$

$$v_1(\beta) = X_0;\quad v_1(p_1) = X\setminus(M\cup\{0,\infty\}),\quad v_1(p_2) = M\cup\{\infty\},\quad v_1(q_1) = X\setminus\{0,\infty\};$$

$$v_2(\beta) = X_0;\quad v_2(p_1) = X\setminus(M\cup\{0\}),\quad v_1(p_2) = M,\quad v_1(q_1) = X\setminus\{0,\infty\}.$$

Допустим, что существует формула $C(p_1,p_2)$ такая, что $A(p_1,p_2,q_1) \to C(p_1,p_2)$, $C(p_1,p_2) \to B(p_1,p_2,q_2)$ выводимы в Lf. Тогда

$$v_1(A(p_1,p_2,q_1)) = \Box_R(X\cap(\Box_R v_1(q_1) \to \Box_R v_1(q_1))\cap X) = X = 1_{\mathbb{A}_1} \leq v_1(C(p_1,p_2))$$

и

$$v_2(C(p_1,p_2)) \subseteq v_2(B(p_1,p_2,q_2)) = X\setminus X\cup v_2(p_1\vee p_2) = X\setminus\{0\} < 1_{\mathbb{A}_2}.$$

Таким образом, получаем, что

$$v_1(C(p_1,p_2)) = 1_{\mathbb{A}_1} = X,\quad v_2(C(p_1,p_2)) < 1_{\mathbb{A}_2} = X.$$

Рассмотрим теперь множества $\widetilde{D}_1 = \{Y \subseteq X' \mid X'\setminus Y$ содержит лишь конечное число четных чисел$\}$ и $\widetilde{D}_2 = \{Y \subseteq X' \mid X'\setminus Y$ содержит лишь конечное число нечетных чисел$\}$, заметим, что $M \in \widetilde{D}_1$, $X'\setminus M \in \widetilde{D}_2$. Так как $\widetilde{D}_1$, $\widetilde{D}_2$ — неглавные фильтры на X', существуют различные неглавные ультрафильтры $D_1 \supseteq \widetilde{D}_1$ и $D_2 \supseteq \widetilde{D}_2$. Пусть D_1, D_2 — различные неглавные ультрафильтры на X' такие, что $M \in D_1$, $X'\setminus M \in D_2$, где $M = \{2n \mid n \in N\}\setminus\{0\}$.

Для каждого $Y \subseteq X'$ положим

$$i_k(Y) = \begin{cases} Y\cup\{\infty\}, & \text{если } Y \in D_k,\\ Y, & \text{если } Y \notin D_k.\end{cases}$$

Докажем, что i_k для $k = 1,2$ являются мономорфизмами из модальной алгебры $\mathbb{A} = P(X')$ в алгебры $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_2 = P(X)$. Заметим, что i_k взаимно однозначны. Докажем, что i_k сохраняет операции. Равенство $i_k(Y\cap Z) = i_k(Y)\cap i_k(Z)$ следует из того, что D_k — ультрафильтр, так как $Y\cap Z \in D_k$ в том и только в том случае, если $Y \in D_k$ и $Z \in D_k$.

Докажем, что выполняется $i_k(X'\setminus Y) = X\setminus i_k(Y)$. Если $X'\setminus Y \in D_k$, то $Y \notin D_k$, так как D_k — ультрафильтр. Следовательно, $X\setminus i_k(Y) = X\setminus Y$. С другой стороны, $i_k(X'\setminus Y) = X'\setminus Y\cup\{\infty\} = X\setminus Y$. Пусть $X'\setminus Y \notin D_k$, тогда $Y \in D_k$. Тем самым $X\setminus i_k(Y) = X\setminus(Y\cup\{\infty\}) = X'\setminus Y$. Вместе с тем $i_k(X'\setminus Y) = X'\setminus Y$.

Докажем, что $i_k(\Box_{R'}Y) = \Box_R i_k(Y)$. Заметим, что $\Box_{R'}Y \subseteq Y$, так как R' — рефлексивное отношение. Следовательно, если $Y \notin D_k$, то $\Box_{R'}Y \notin D_k$, поскольку D_k — ультрафильтр.

Пусть $Y \notin D_k$. Тогда $i_k(\Box_{R'}Y) = \Box_{R'}Y$ и $\Box_R i_k(Y) = \Box_R Y$. Докажем, что в этом случае имеет место равенство $\Box_{R'}Y = \Box_R Y$. Так как $Y \notin D_k$, то $Y \neq X'$. Тогда существует $n \in X'$ такой, что $n \notin Y$. Пусть n наибольший по отношению R' с таким условием. Заметим, что $n \neq 0$, так как $X'\setminus\{0\} \in D_k$ и $Y \notin D_k$. Тем самым $\Box_{R'}Y = \{x \in X' \mid (n-1)R'x\} = \Box_R Y$.

Пусть $Y \in D_k$. Рассмотрим случай, когда $\Box_{R'}Y \notin D_k$. Тогда $\Box_{R'}Y \neq Y$, следовательно, существуют $n, m \in X'$ такие, что $nR'm$, $n \in Y$ и $m \notin Y$. Пусть m — наибольший по отношению R' с указанным условием. Тогда $\Box_{R'}Y = \{x \in X' \mid (m-1)R'x\}$ и $i_k(\Box_{R'}Y) = \Box_{R'}Y = \{x \in X' \mid (m-1)R'x\}$. С другой стороны, $\Box_R i_k(Y) = \Box_R(Y\cup\{\infty\}) = \{x \in X \mid (m-1)R'x\}$.

Пусть теперь $Y \in D_k$ и $\Box_{R'}Y \in D_k$. Тогда $1 \in Y$, так как иначе $\Box_{R'}Y = \varnothing \notin D_k$. Если $Y = X'$ или $Y = X'\setminus\{0\}$, то $i_k(\Box_{R'}Y) = \Box_{R'}Y\cup\{\infty\} = \Box_R(Y\cup\{\infty\}) = \Box_R i_k(Y)$.

Пусть $Y \neq X'$ и $Y \neq X' \setminus \{0\}$. Тогда существует $n \in X' \setminus \{0\}$ такой, что $n \notin Y$. Пусть n — наибольший по отношению R' с указанным условием. Тогда $\Box_{R'}Y = \{x \in X' \mid (n-1)R'x\}$, а $\{x \in X' \mid (n-1)R'x\} \notin D_k$, т. е. этот случай невозможен.

Равенство $i_k(\Box_{\prec'}Y) = \Box_{\prec} i_k(Y)$ доказывается аналогично, так как $\prec' = R'$ и $\prec = R$.

Продолжим доказательство предложения 2. Заметим, что для i_k

$$i_1(v(p_1)) = v_1(p_1),\ i_1(v(p_2)) = v_1(p_2); \quad i_2(v(p_1)) = v_2(p_1),\ i_2(v(p_2)) = v_2(p_2).$$

Таким образом, поскольку i_k являются мономорфизмами, то $i_1(v(C(p_1,p_2))) = v_1(C(p_1,p_2)) = 1_{\mathbb{A}_1} = X$ и $i_2(v(C(p_1,p_2))) = v_2(C(p_1,p_2)) < 1_{\mathbb{A}_1} = X$; получаем противоречивые условия

$$v(C(p_1,p_2) = 1_{\mathbb{A}}, \quad v(C(p_1,p_2) < 1_{\mathbb{A}},$$

и предложение 2 доказано.

Чтобы доказать отсутствие интерполянта для формулы $A(p_1,p_2,q_1) \to B(p_1,p_2,q_2)$ в исчислении Lf, в доказательстве предложения 2 вместо шкал F, F' рассмотрим шкалу $G = \langle X, X_0, R\rangle$, где $X = \{0, \infty, \dots, 3, 2, 1\}$, $X_0 = X$, R — транзитивное, рефлексивное, линейное отношение на X такое, что $0R\infty R \dots R3R2R1$. Рассмотрим также $G' = \langle X', X'_0, R'\rangle$, где $X' = X \setminus \{\infty\}$, $X'_0 = X'$, R' — ограничение R на X'. Для доказательства предложения 3 достаточно заметить, что шкалы G, G' являются F-шкалами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Craig W.* Three uses of the Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symbolic Logic. 1957. V. 22. P. 269–285.
2. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability. Modal and intuitionistic logics. Oxford: Oxford Univ. Press, 2005. (Oxford Sci. Publ.).
3. *Максимова Л. Л.* Интерполяция в модальных логиках бесконечного слоя, содержащих $K4$ // Математическая логика и алгоритмические проблемы. Новосибирск: Наука, 1989. С. 73–91.
4. *Ershov Yu. L.* Theory of domains and nearby // Intern. conf. formal methods in programming and their applications, Novosibirsk, Russia, 1993. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1993. P. 1–7. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 735).
5. *Мурзина В. Ф.* Модальная логика на основе линейно упорядоченных f-пространств // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 3. С. 320–337.
6. *Мурзина В. Ф.* Модальная логика, полная относительно строго линейно упорядоченных A-моделей // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 5. С. 560–582.
7. *Шехтман В. Б.* Модальные логики топологических пространств: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. М., 1999.

Статья поступила 10 июля 2006 г.

Мурзина Вета Федоровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
veta_v@mail.ru