Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2000. Том 41, № 2

УДК 517.954

ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БАКЛЕЯ — ЛЕВЕРЕТТА

С. Лукхаус, П. И. Плотников

Аннотация: Рассматриваются краевые задачи для уравнений Маскета и Баклея — Леверетта, описывающих движение несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Приводятся достаточные условия, обеспечивающие сильную сходимость при стремлении вязкости к нулю решений уравнений Маскета к энтропийному решению уравнений Баклея — Леверетта. Библиогр. 11.

1. Введение

Рассмотрим математическую модель потока двух несмешиваемых жидкостей различной подвижности в ячейках Хеле — Шоу [1] и пористой среде. Движение жидкостей описывается уравнениями Баклея — Леверетта, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$s_t + \mathbf{v} \cdot \nabla A(s) = 0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} + f = 0, \quad \mathbf{v} = -k(s)\nabla p. \tag{1.2}$$

Здесь $s(x,t)$ — насыщенность одной из жидкостей, $\mathbf{v}(x,t)$ — скорость просачивания смеси и $p(x,t)$ — давление. Функция тока A и подвижность k являются заданными функциями от фазовой насыщенности. Предполагается, что

$$A, k \in C^\infty(R), \quad 0 < C^{-1} < k(s) < C < \infty, \quad |A''(s)| > 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что уравнения (1.1), (1.2) образуют эллиптико-гиперболическую систему нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Граничные задачи для таких задач плохо исследованы. Известно, что уравнения могут быть упрощены при наличии симметрии. Типичными примерами являются бегущие волны и двумерная задача Римана.

Рассмотрим следующую граничную задачу, которая может быть рассмотрена как обобщение граничной задачи для автомодельных решений. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей и $\mathbf{b}(x)$ — заданное векторное поле класса $C^2(\Omega)$. Вектор $-|\mathbf{b}|^{-1}\mathbf{b}$ задает направление распространения волны, $|\mathbf{b}|$ — скорость распространения. Обозначим через $\partial\Omega^+$ множество точек $x \in \partial\Omega$ таких, что

$$\partial\Omega^+ : \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} > 0,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Ω. Задача состоит в нахождении функций $s \in L_\infty(\Omega)$, $p \in H_1(\Omega)$ и вектор-функции $\mathbf{v}(x)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\Omega : \begin{array}{c} \mathbf{v} \cdot \nabla A(s) - \mathbf{b} \cdot \nabla s = 0, \\ \operatorname{div}(k(s)\nabla p) = f, \quad \mathbf{v} = -k(s)\nabla p, \end{array} \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97–01–00501).

$$\partial\Omega: \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0, \quad \partial\Omega^+: \quad s=s_0(x).$$

Предполагается, что функции f, s_0 удовлетворяют условиям

$$f\in L_\infty(\Omega), \quad s_0\in \mathrm{Lip}(\partial\Omega), \quad \int\limits_\Omega f\,dx=0.$$

Мы будем рассматривать два типа обобщенных решений задачи (1.6). Первый — это энтропийное решение.

Определение 1.1. Векторное поле $\mathbf{v}\in L_2(\Omega)$ и функция $s\in L_\infty(\Omega)$ называются *энтропийным решением* задачи (1.4), если для любых функций $\xi,\eta:\Omega\to\mathbb{R}^1$, $\varphi,\Phi,\Psi:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered}\xi\in C^\infty(\Omega), \quad \eta\in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \eta\ge 0, \quad \mathrm{spt}\,\eta\cap(\partial\Omega\setminus\partial\Omega^+)=\varnothing,\\ \varphi\in C^1(\mathbb{R}^1), \quad \varphi'\ge 0,\\ \Psi'=a(s)\varphi(s), \quad \Phi'=\varphi(s), \quad a=A',\end{gathered} \tag{1.5}$$

выполнены следующие соотношения:

$$\int\limits_\Omega ((\Psi(s)\cdot\mathbf{v}-\Phi(s)\cdot\mathbf{b})\cdot\nabla\eta-(\Phi(s)\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}+\Psi(s)f)\eta)\,dx+\int\limits_{\partial\Omega^+}\Phi(s_0)\eta\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\ge 0, \tag{1.6}$$

$$\int\limits_\Omega(\nabla p\nabla\xi\cdot k(s)-f\xi)\,dx=0, \quad \mathbf{v}=-k(s)\nabla p.$$

Энтропийные решения скалярных законов сохранения изучались многими математиками. Заметим только, что существование и единственность энтропийных решений задачи Коши доказаны в [4, 5]. Корректность граничных задач в ограниченных областях установлена в [6].

Обозначим через ν_x семейство вероятностных мер Радона ν_x на $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^2$, зависящее от $x\in\Omega$ [7]. Предположим, что

(a) отображение $x\to\nu_x$ слабо измеримо как отображение из Ω в пространство мер Радона,

(b) существуют постоянные M_0, M_1 и показатель $r>2$ такие, что

$$\mathrm{spt}\,\nu_x\subset\{s\in\mathbb{R}^1, q\in\mathbb{R}^2: |s|\le M_0\}, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3}(1+|q|)^r\,d\nu_x\le M_1.$$

Отсюда следует, что функция

$$x\to\int\limits_{\mathbb{R}^3}f(s,q)\,d\nu_x\equiv f^*(x)$$

измерима на Ω для любой борелевской функции $f(s,q)$, удовлетворяющей неравенству $|f(s,q)|\le c(s)(1+|q|^2)$. Определим

$$\mathbf{V}_x(\lambda)=\int\limits_{[\lambda,\infty)}\int\limits_{\mathbb{R}^2}q\,d\nu_x, \quad \Lambda_x(\lambda)=\int\limits_{[\lambda,\infty)}\int\limits_{\mathbb{R}^2}d\nu_x. \tag{1.7}$$

Эти функции непрерывны слева и имеют ограниченную вариацию по λ почти всюду в Ω. Ясно, что для любой борелевской функции φ выполнены равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(s)q\,d\nu_x=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)d\mathbf{V}_x(\lambda), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(s)\,d\nu_x=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\varphi(\lambda)d\Lambda_x(\lambda). \tag{1.8}$$

Определение 1.2. Мера Янга ν_x называется *мерозначным решением задачи* (1.4), если для любых функций φ, η, ξ, Φ, Ψ, удовлетворяющих условиям (1.5), выполнены соотношения

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}(\mathbf{P}^*_\varphi\cdot\nabla\eta-(\Phi^*\operatorname{div}\mathbf{b}+\Psi^*f)\eta)\,dx+\int\limits_{\partial\Omega^+}\Phi(s_0)\eta\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\,ds\ge 0,\\ \operatorname{div}\int\limits_{\mathbb{R}^1}d\mathbf{V}_x(\lambda)=f,\quad \operatorname{rot}\int\limits_{\mathbb{R}^1}k^{-1}(\lambda)\,d\mathbf{V}_x(\lambda)=0,\end{gathered}\tag{1.9}$$

где

$$\mathbf{P}^*_\varphi\equiv-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Psi(\lambda)d\mathbf{V}_{x,\lambda}+\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Phi(\lambda)\,d\Lambda_x(\lambda)\cdot\mathbf{b}(x),$$
$$\Phi^*=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Phi(\lambda)\,d\Lambda_x(\lambda),\quad \Psi^*=-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Psi(\lambda)\,d\Lambda_x(\lambda).$$

Понятие мерозначного решения для законов сохранения введено в [7] и развито в [8]. Отметим, что наше определение отличается от введенного в [7].

Рассмотрим также эллиптическую регуляризацию задачи (1.4):

$$\Omega:\quad \begin{array}{l}-\varepsilon\Delta s+\mathbf{v}\cdot\nabla A(s)-\mathbf{b}\nabla s=0,\\ \mathbf{v}=-k(s)\nabla p,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}+f=0,\end{array}\tag{1.10}$$

$$\varepsilon\nabla s\cdot\mathbf{n}+\gamma(s-s_0)=0,\quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0.\tag{1.11}$$

Здесь неотрицательная липшицева функция γ определена равенствами

$$\partial\Omega^+:\gamma=\mathbf{b}\cdot\mathbf{n},\quad \partial\Omega\setminus\partial\Omega^+:\gamma=0.$$

Основные результаты настоящей статьи изложены в следующих теоремах существования и структуры мерозначных решений задачи (1.4).

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены изложенные выше условия. Тогда*

(i) *для любого* $\varepsilon>0$ *задача (1.10), (1.11) имеет решение* $s,\mathbf{v}\in H_\alpha(\Omega)$, $\alpha>2$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$\|s\|_{L_\infty(\Omega)}+\|\mathbf{v}\|_{L_{r_0}(\Omega)}<M,\quad \varepsilon^{1/2}\|\nabla s\|_{L_2(\Omega)}<M;$$

здесь постоянная M *не зависит от* ε, $r_0=r_0(k)>2$;

(ii) *существуют последовательность* $(s_\varepsilon,\mathbf{v}_\varepsilon)$ *решений задачи (1.10), (1.11) и мера Янга* ν_x *такие, что для любой функции* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $|f(s,q)|\le c(s)(1+|q|^2)$, *последовательность* $f(s_\varepsilon,\mathbf{v}_\varepsilon)$ *слабо сходится в* $L_{r_0/2}(\Omega)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *к функции*

$$f^*(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}f(s,\mathbf{v})\,d\nu_x.$$

Мера ν_x *представляет собой мерозначное решение задачи (1.4).*

Для описания структуры мерозначных решений задачи (1.4) введем некоторые понятия.

Определение 1.3. Для данной функции $\varphi \in C^1(R)$ пару гладких функций

$$\Phi(s) = \int\limits_0^s \varphi(\lambda)\, d\lambda + \mathrm{const}, \quad \Psi = \int\limits_0^s a(\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda + \mathrm{const}$$

назовем *энтропийной парой, соответствующей* φ. Для данных s и $\mathbf{v}$ векторное поле $\mathbf{P}_\varphi = \Psi(s)\mathbf{v} - \Phi(s)\mathbf{b}$ назовем *потоком, соответствующим* φ.

В следующей теореме указана связь между функциями $\mathbf{V}_x(\lambda)$ и $\Lambda_x(\lambda)$, которые определяют мерозначное решение задачи (1.4).

Обозначим через $\mathbf{v}^*(x)$ слабый предел последовательности $\mathbf{v}_\varepsilon(x)$. Область Ω может быть представлена в виде объединения двух непересекающихся множеств:

$$\Omega_0 = \{x : \mathbf{v}^*(x) \times \mathbf{b}(x) = 0\}, \quad \Omega_1 = \{x : \mathbf{v}^*(x) \times \mathbf{b}(x) \neq 0\}.$$

Теорема 1.2. *В предположениях теоремы* 1.1 *существуют измеримая функция* $s^*(x)$, $x \in \Omega_1$, *и семейство функций* $\rho_x(\lambda)$, $x \in \Omega_0$, *такие, что*

(i) *выполнены соотношения*

$$\mathbf{V}_x(\lambda) = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\Lambda_x(\lambda) - \frac{1}{a(\lambda)}H(s^*(x) - \lambda)\right)\mathbf{b}(x) + H\left(s^*(x) - \lambda\right)\mathbf{v}^*(x), \quad x \in \Omega_1,$$
$$\mathbf{V}_x(\lambda) = \rho_x(\lambda)\mathbf{b}(x), \quad x \in \Omega_0; \tag{1.12}$$

здесь $H(s) = 0$ *при* $s < 0$, $H(s) = 1$ *для* $s \geq 0$ *— функция Хевисайда;*

(ii) *последовательность потоков* $\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi} = \Psi(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \Phi(s_\varepsilon)\mathbf{b}$ *сходится слабо в* $L_2(\Omega_1)$ *к* $\mathbf{P}^*_\varphi = \Psi(s^*)\mathbf{v}^* - \Phi(s^*)\mathbf{b}$ *для любой функции* $\varphi \in C^1(R)$.

Соотношения (1.12) обладают некоторым свойством симметрии. Положим

$$\mathbf{U}_x(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,\lambda]}\int\limits_{\mathbb{R}^2} q\, d\nu_x, \quad \chi_x(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,\lambda]}\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\nu_x.$$

Из (1.7) имеем

$$\mathbf{U}_x(\lambda) = \mathbf{v}^* - \lim_{\tau\to\lambda+0} \mathbf{V}_x(\tau), \quad \chi_x(\lambda) = 1 - \lim_{\tau\to\lambda+0}\Lambda_x(\tau),$$
$$H(\lambda - s^*) = 1 - \lim_{\tau\to\lambda+0} H(s^* - \tau).$$

Подстановка этих равенств в (1.12) дает равенство

$$\mathbf{U}_x(\lambda) = \left(\frac{1}{a(\lambda)}\chi_x(\lambda) - \frac{1}{a(\lambda)}H(\lambda - s^*(x))\right)\mathbf{b}(x) + H\left(\lambda - s^*(x)\right)\mathbf{v}^*(x). \tag{1.13}$$

Из теоремы 1.2 не вытекает, что функция s^* является слабым пределом последовательности s_ε. Следующее утверждение показывает, что при некоторых дополнительных предположениях на функции A и k решения регуляризованных задач сильно сходятся на множестве Ω_1 к энтропийному решению задачи (1.4). Для формулировки этих дополнительных предположений введем некоторые понятия. Обозначим через Σ семейство парабол, задаваемых формулами

$$y = p(z), \quad p(z) = z^2 + q_1 z + q_2, \quad q_i \in \mathbb{R}^1.$$

Будем говорить, что функция $f : [c,d] \to \mathbb{R}^1$ *строго p-вогнута в точке* $z_0 \in (c,d)$, если она удовлетворяет следующему условию.

Условие P. *Фиксируем параболу* $p_0 \in \Sigma$ *такую, что* $f(z_0) = p_0(z_0)$ *и* $f'(z_0) = p_0'(z_0)$. *Пусть* $z^* \in (c, d)$ — *произвольная точка. Если прямая* $l \parallel \mathrm{Tan}_{z^*}\, p_0$ *пересекает график функции* $f(z)$ *в точках* $(z_1, f(z_1))$ *и* $(z_2, f(z_2))$ *таких, что*

$$z^* = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2, \quad \lambda \in [0,1], \quad z_0 \notin (z_1, z_2),$$

то

$$\lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_2) \le p_0(z^*).$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z^* = z_1 = z_2 = z_0$.

Рассмотрим семейство функций $\Gamma, N : [-M, M] \to \mathbb{R}^1$, зависящее от параметра α и задаваемое следующими формулами:

$$\begin{gathered}\Gamma(\lambda) = \frac{K(\alpha)}{a(\alpha)} + \int\limits_\alpha^\lambda \frac{K'(s)}{a(s)}\, ds, \\ N(\lambda) = \int\limits_\alpha^\lambda a^{-1}(s)(K(s)\Gamma(s))'\, ds, \quad K(s) = k^{-1}(s).\end{gathered} \tag{1.14}$$

Обозначим через $\lambda = Z(z)$ обратную к функции $z = \Gamma(\lambda)$ и положим

$$f_\alpha(z) = N(Z(z)), \quad z_\alpha = \Gamma(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{a(\alpha)}.$$

Условие S. *Существует* $M > \sup\limits_{\varepsilon>0} \|s_\varepsilon\|_{L_\infty(\Omega)}$ *такое, что функция* $\Gamma : (-M, M) \to \mathbb{R}^1$ *строго монотонна и функция* $f_\alpha(z)$ *строго p-вогнута в точке* z_α *для любого* $\alpha \in (-M, M)$.

Пример. Простые вычисления показывают, что

$$f_\alpha'(z) = \Gamma(\lambda) + a^{-1}(\lambda)K(\lambda), \quad f_\alpha''(z) = 2 - \frac{a'(\lambda)K(\lambda)}{a(\lambda)K'(\lambda)} = -\frac{(\ln(K^{-2}(\lambda)a(\lambda))'}{(\ln K(\lambda))'},$$

где $\lambda = Z(z)$. Поэтому неравенства $K' > 0$ и $(aK^{-2})' > 0$ обеспечивают условие S.

Заметим, что это условие близко к условию устойчивости $k'(s) < 0$ ($K'(s) > 0$) [6], но не совпадает с ним.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и функции* a *и* K *удовлетворяют условию* S. *Тогда*

$$s_\varepsilon \to s^* \text{ сильно в } L_2(\Omega_1), \quad \mathbf{v}_\varepsilon \to \mathbf{v}^* \text{ сильно в } L_2(\Omega_1).$$

Следствие 1.1. *В условиях теоремы* 1.3 *функция* s^* *и векторное поле* $\nabla p^* = -k(s^*)^{-1}\mathbf{v}^*$ *образуют энтропийное решение задачи* (1.4) *на любом открытом множестве* $G \subset \Omega_1$.

2. Доказательство теоремы 1.1

Начнем с доказательства разрешимости задачи (1.10), (1.11). Рассмотрим семейство граничных задач, зависящее от параметра $\tau \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} \Omega :&\quad \varepsilon\Delta s = -\tau(a(s)k_\tau(s)\cdot\nabla s\nabla p + \mathbf{b}\cdot\nabla s), \\ \partial\Omega :&\quad \varepsilon\nabla s\cdot\mathbf{n} + \gamma(s - \tau s_0) = 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$
\begin{aligned}
\Omega:\quad & \Delta p = \Pi[k_\tau(s)^{-1}(\tau f - \nabla k_\tau(s)\nabla p)],\\
& \partial\Omega : \nabla p\cdot \mathbf{n} = 0, \quad \langle p, 1\rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь функция k_τ и оператор Π определены формулами

$$\Pi f = f - (\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\langle f, 1\rangle, \quad k_\tau(s) = 1 + \tau(k(s) - 1)$$

и функции γ, s_0, f удовлетворяют условиям

$$\gamma, s_0 \in \operatorname{Lip}(\partial\Omega), \quad f \in L_\infty(\Omega), \quad \int\limits_\Omega f\,dx = 1.$$

Прежде всего установим априорную оценку решений задачи (2.1), (2.2).

Лемма 2.1. *Пусть $(s,p) \in W^2_r(\Omega)$, $r > 2$, — решение задачи* (2.1). *Тогда существуют постоянная c, не зависящая от ε, τ, и показатель $r_0 > 2$, зависящий от k, такие, что*

$$\|\nabla p\|_{L_{r_0}(\Omega)} + \varepsilon^{1/2}\|\nabla s\|_{L_2(\Omega)} + \|s\|_{L_\infty(\Omega)} \le c. \tag{2.3}$$

Доказательство. Умножая обе части неравенства (2.2) на k_τ, получим

$$\operatorname{div}(k_\tau\nabla s) = \tau f - k_\tau(\operatorname{mes}\Omega)^{-1}\big\langle k_\tau^{-1}(\tau f - \nabla k_\tau \nabla p), 1\big\rangle.$$

Интегрируя эти уравнения по Ω, приходим к равенству

$$\langle k_\tau^{-1}(\tau f - \nabla k_\tau\nabla p), 1\rangle = 0,$$

из которого заключаем, что p — решение граничной задачи

$$\Omega:\ \operatorname{div}(k_\tau(s)\nabla p) = \tau f, \quad \partial\Omega:\ \nabla p\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Оценка для функции p вытекает из априорных оценок решений эллиптических уравнений второго порядка с ограниченными коэффициентами.

Функция s является решением следующей граничной задачи для эллиптического уравнения:

$$
\begin{aligned}
\Omega:\quad & \varepsilon\Delta s + \tau(a(s)k(s)\nabla p + \mathbf{b})\cdot\nabla s = 0,\\
\partial\Omega:\quad & \varepsilon\nabla s\cdot\mathbf{n} + \gamma(s - s_0\tau) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Из условий леммы вытекает, что $s, \nabla p, b \in C^\beta(\Omega)$, $0 < \beta < 1$, $0 \le \gamma \in \operatorname{Lip}(\partial\Omega)$. Из этих соотношений и принципа максимума получаем неравенство $\min s_0 \le s(x) \le \max s_0$, которое влечет ограниченность $\|s\|_{L_\infty(\Omega)}$.

Умножая обе части уравнения (2.4) на s и интегрируя по Ω, получаем оценки

$$\varepsilon\|\nabla s\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|\operatorname{div}\mathbf{b}s^2\|_{L_1(\Omega)} + \|f\psi(s)\|_{L_1(\Omega)} + \max_{\partial\Omega}\{|\gamma s_0|\} \le c, \quad \psi(s)' = sa(s).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *В условиях леммы* 2.1 *для любого $r > 2$ существует постоянная $c(r,\varepsilon)$ такая, что $\|(s,p)\|_{W^2_r(\Omega)} \le c(r,\varepsilon)$.*

Доказательство. Определим последовательность λ_k, n_k, $k \ge 1$, полагая

$$\lambda_{k+1} = 2^{-1}n_k; \quad n_k = \begin{cases} 2\lambda_k(2-\lambda_k)^{-1}, & \text{если } 2 > \lambda_k,\\ n_{k-1} + 1, & \text{если } 2 \le \lambda_k,\end{cases}$$

$$\lambda_1 = (2^{-1} + r_0^{-1})^{-1}, \quad n_1 = r_0.$$

Так как $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$, достаточно доказать оценку

$$\|(s,p)\|_{W^2_{\lambda_k}(\Omega)} \le c(\lambda_k, \varepsilon), \quad k \ge 1. \tag{2.5}$$

Заметим, что решение задачи Неймана

$$\Omega: \ \Delta u = f, \quad \partial\Omega: \ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g$$

удовлетворяет неравенству [9]

$$\|u\|_{W^2_\lambda(\Omega)} \le c(\Omega, \lambda)(\|f\|_{L_\lambda(\Omega)} + \|g\|_{W^1_\lambda(\Omega)} + \|u\|_{L_1(\Omega)}), \quad 1 < \lambda < \infty.$$

Отсюда и из леммы 2.1 заключаем, что неравенства

$$\|(s,p)\|_{W^2_{\lambda_k}(\Omega)} \le c(k)(\|\nabla s \nabla p\|_{L_{\lambda_k}(\Omega)} + \|s\|_{W^1_{\lambda_k}(\Omega)} + 1) \tag{2.6}$$

справедливы для любого решения задачи (2.1). Из леммы 2.1 вытекает, что

$$\|\nabla s \nabla p\|_{L_{\lambda_1}(\Omega)} \le \|\nabla s\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla p\|_{L_{r_0}(\Omega)} \le c, \quad 1 < \lambda_1 < 2.$$

Поэтому неравенство (2.5) выполнено для $k = 1$. В предположении, что (2.6) справедливо для некоторого k, докажем его для $k+1$. По теореме вложения имеем

$$\|(s,p)\|_{W^1_{n_k}(\Omega)} \le c(k)\|(s,p)\|_{W^2_{\lambda_k}(\Omega)} \le c(k), \ \|\nabla s\|_{L_{\lambda_{k+1}}(\Omega)} \le c(k)\|s\|_{W^2_{\lambda_k}(\Omega)} \le c(k).$$

Привлекая неравенство Гёдьдера, находим

$$\|\nabla s \nabla p\|_{L_{\lambda_{k+1}}(\Omega)} \le c(k)\|\nabla s\|_{L_{n_k}(\Omega)} \|\nabla p\|_{L_{n_k}(\Omega)}.$$

Отсюда, из предыдущих оценок и (2.6) получаем неравенство (2.5) при $k+1$. Лемма доказана.

Фиксируем $r > 2$ и рассмотрим нелинейный оператор $\Phi : [0,1] \times W^2_r(\Omega)^2 \to W^2_R(\Omega)^2$, определенный следующими соотношениями. Для $\tilde{s}, \tilde{p} \in W^2_r(\Omega)^2$, $\tau \in [0,1]$, пара $(s,p) = \Phi(\tau, \tilde{s}, \tilde{p})$ является решением следующей линейной граничной задачи:

$$\begin{aligned} \Omega: \ & \varepsilon\Delta s = -\tau(a(\tilde{s})k_\tau(\tilde{s}) \cdot \nabla\tilde{s}\nabla\tilde{p} + \mathbf{b} \cdot \nabla\tilde{s}), \\ \partial\Omega: \ & \varepsilon\nabla s \cdot \mathbf{n} + \gamma(s - \tau s_0) = 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \Omega: \ & \Delta\tilde{p} = \Pi[k_\tau(s)^{-1}(\tau f - \nabla k_\tau(\tilde{s})\nabla\tilde{p})], \\ & \partial\Omega: \nabla p \cdot \mathbf{n} = 0, \\ & \langle p, 1\rangle = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Обозначим через $\Sigma \subset W^2_r(\Omega)^2$ замкнутый шар, состоящий из пар s, p, удовлетворяющих неравенству $\|(s,p)\|_{W^2_r(\Omega)} \le c(r)+1$. Рассмотрим последовательность $(\tau_n, s_n, p_n) \in [0,1] \times \Sigma$, $n \ge 1$. Поскольку вложение $W^2_r(\Omega) \to C^1(\Omega)$ компактно, переходя к подпоследовательности, можно считать, что она сильно сходится в $C^1(\Omega)^2 \times [0,1]$. Тем самым последовательность $\tau_n(k(s_n)\nabla p_n + \mathbf{b})\nabla s_n$, $\tau_n \operatorname{div}((1-k(s_n))\nabla p_n)$ сильно сходится в некотором $L_\alpha(\Omega)$, $\alpha > 1$. Отсюда и из априорных оценок решений уравнения Пуассона заключаем, что последовательность $\Phi(\tau_n, s_n, p_n)$ сходится в $W^2_r(\Omega)$. Следовательно, оператор Φ компактен и непрерывен на $[0,1] \times \Sigma$.

Так как $\Phi(0,s,p)=0$, отображение $I-\Phi(0,\cdot):W^2_r(\Omega)^2\to W^2_r(\Omega)^2$ является гомеоморфизмом.

Если $(s,p)=\Phi(\tau,s,p)$ — неподвижная точка, то (s,p) — решение задачи (2.1), (2.2). По лемме 2.2 пара (s,p) удовлетворяет неравенству $\|(s,p)\|_{W^2_r(\Omega)^2}\le c(r)$ и $(s,p)\in\operatorname{int}\Sigma$. Поэтому оператор $\Phi(\tau,\cdot)$, $\tau\in[0,1]$, не имеет неподвижной точки на границе Σ.

По теореме Лере — Шаудера о неподвижной точке оператор $\Phi(1,.,.)$ имеет неподвижную точку $(s_\varepsilon,p_\varepsilon)\in\Sigma$. Ясно, что $(s_\varepsilon,p_\varepsilon)$ — решение задачи (1.10), (1.11).

Для завершения доказательства теоремы 1.1 покажем, что произвольная слабо предельная точка множества решений задачи (1.10), (1.11) является мерозначным решением задачи (1.4). Рассмотрим последовательность $(s_\varepsilon,v_\varepsilon)$ решений задачи (1.10), (1.11). Переходя к подпоследовательности, можно считать, что для любой функции $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей неравенству $|F(s,q)|\le C(s)(1+|q|^2)$, последовательность $F(s_\varepsilon,v_\varepsilon)$ слабо сходится в $L_{r_0/2}(\Omega)$ к некоторой функции $F^*\in L_2(\Omega)$.

Из фундаментальной теоремы о мерах Янга [10] следует, что существует слабо измеримое семейство вероятностных мер ν_x в $\mathbb{R}^3$ такое, что почти всюду в Ω выполняется равенство

$$F^*(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(s,\mathbf{v})\,d\nu_x.$$

Отсюда вытекает, что слабые пределы последовательностей $g(s_\varepsilon)$, $g(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon$, $g\in C(\mathbb{R}^1)$, имеют представления (1.7) и (1.8).

Поскольку последовательность $(s_\varepsilon,\mathbf{v}_\varepsilon)$ равномерно ограничена в $L_\infty(\Omega)\times L_{r_0}(\Omega)^2$, мера ν_x удовлетворяет условиям (a) и (b).

Осталось показать, что ν_x — мерозначное решение задачи (1.4). Для этого возьмем гладкую неубывающую функцию $\varphi:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ и неотрицательную функцию $\eta\in C^\infty(\Omega)$ с $\operatorname{spt}\eta\cap\partial\Omega\subset\partial\Omega^+$. Умножая обе части равенства (1.10) на $\varphi(s_\varepsilon)$ и интегрируя по Ω, получим тождество

$$-\int\limits_\Omega \mathbf{P}_\varepsilon\cdot\nabla\eta\,dx+\int\limits_\Omega(\Phi(s_\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{b}+\Psi(s_\varepsilon)f)\,\eta\,dx-\int\limits_{\partial\Omega^+}\left(\varepsilon\varphi(s_\varepsilon)\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial n}+\Phi(s_\varepsilon)\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}\right)\eta\,ds=-\varepsilon\int\limits_\Omega\varphi(s_\varepsilon)\nabla s_\varepsilon\cdot\nabla\eta\,dx-\varepsilon\int\limits_\Omega\varphi'(s_\varepsilon)|\nabla s_\varepsilon|^2\eta\,dx,$$

$$\mathbf{P}_\varepsilon=\Psi(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon-\Phi(s_\varepsilon)\mathbf{b}.$$

Поскольку φ' — неотрицательная функция и функция η равна нулю на $\partial\Omega\backslash\partial\Omega^+$, имеем

$$-\int\limits_\Omega \mathbf{P}_\varepsilon\cdot\nabla\eta\,dx+\int\limits_\Omega(\Phi(s_\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{b}+\Psi(s_\varepsilon)f)\cdot\eta\,dx-\int\limits_{\partial\Omega^+}\left(\varepsilon\varphi(s_\varepsilon)\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial n}+\gamma\Phi(s_\varepsilon)\right)\eta\,ds\le-\varepsilon\int\limits_\Omega\varphi(s_\varepsilon)\nabla s_\varepsilon\cdot\nabla\eta\,dx. \tag{2.9}$$

Из граничных условий

$$\varepsilon\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial n} = -\gamma(s_\varepsilon - s_0)$$

и выпуклости функции Φ вытекает, что

$$\begin{aligned}\partial\Omega^+ :\ \varphi(s_\varepsilon)\varepsilon\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial n} + \gamma\Phi(s_\varepsilon) &= \gamma(\Phi(s_\varepsilon) - \varphi(s_\varepsilon)(s_\varepsilon - s_0)) \\ &= \gamma\left(\Phi(s_0) + \int\limits_{s_0}^{s_\varepsilon}(\varphi(t) - \varphi(s_\varepsilon))\,dt\right) \le \gamma\Phi(s_0).\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (2.9) получаем

$$\begin{aligned}-\int\limits_\Omega \mathbf{P}_\varepsilon\nabla\eta\,dx + \int\limits_\Omega(\Phi(s_\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{b} + \Psi(s_\varepsilon)f)\,\eta\,dx \\ - \int\limits_{\partial\Omega^+}\gamma\Phi(s_0)\eta\,ds \le -\varepsilon\int\limits_\Omega \nabla s_\varepsilon\nabla\eta\varphi\,dx.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Из определения меры Янга и оценок решений задачи (1.10), (1.11) вытекает, что

$$\int\limits_\Omega(\Phi(s_\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{b} + \Psi(s_\varepsilon)f)\eta\,dx \to -\int\limits_\Omega\left(\int\limits_{\mathbb{R}^1}(\Phi(\lambda)\operatorname{div}\mathbf{b}(x) + \Psi(\lambda)f(x))\,d\Lambda_x(\lambda)\right)dx,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega P_\varepsilon\cdot\nabla\eta\,dx \to \int\limits_\Omega\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Psi(\lambda)\,d\mathbf{V}_{x,\lambda} + \int\limits_{\mathbb{R}^1}\Phi(\lambda)\,d\Lambda_x(\lambda)\cdot\mathbf{b}(x)\right)\cdot\nabla\eta\,dx \\ = \int\limits_\Omega P^*_\varphi\cdot\nabla\eta\,dx, \quad \varepsilon\int\limits_\Omega\nabla s_\varepsilon\cdot\nabla\eta\varphi\,dx \to 0\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. Переходя к пределу в неравенстве (2.10), получаем, что ν_x — мерозначное решение первого из уравнений (1.4).

Умножая второе уравнение системы (1.10) на произвольную гладкую функцию $\xi(x)$ и интегрируя по Ω, получаем тождество

$$\int\limits_\Omega(\mathbf{v}_\varepsilon\cdot\nabla\xi + f\xi)\ dx = 0.$$

Остается заметить, что слабый предел последовательности

$$\nabla p_\varepsilon = k^{-1}(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon$$

совпадает с функцией

$$x \to -\int\limits_{\mathbb{R}^1}k^{-1}(\lambda)d\mathbf{V}_x(\lambda), \quad x\in\Omega,$$

и теорема 1.1 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.2

1. Предварительные сведения. Доказательство теоремы 1.2 основано на принципе компенсированной компактности и естественно распадается на несколько шагов. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^1$ и рассмотрим последовательность потоков $\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}$, определенных равенствами

$$\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi} = \Psi(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \Phi(s_\varepsilon)\mathbf{b}. \tag{3.1}$$

Здесь $(s_\varepsilon,\ \mathbf{v}_\varepsilon)$ — решения задачи (1.10), (1.11) и $(\Psi,\ \Phi)$ — энтропийная пара, соответствующая функции φ.

Лемма 3.1. *В предположениях теоремы* 1.2 *множество функций* $\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}$, $\varepsilon > 0$, *компактно в* $H_2^{-1}(\Omega)$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функционалов F_ε : $\overset{\circ}{W}{}^1_r(\Omega) \to \mathbb{R}$, заданных формулой

$$\langle F_\varepsilon, \eta\rangle = \int\limits_\Omega \varepsilon\varphi'(s_\varepsilon)|\nabla s_\varepsilon|^2\eta\, dx + \int\limits_\Omega (\Phi(s_\varepsilon)\operatorname{div}\mathbf{b} + \Psi(s_\varepsilon)f)\eta\, dx.$$

Оценки из теоремы 1.1 для решений задачи (1.10), (1.11) влекут неравенство

$$|\langle F_\varepsilon, \eta\rangle| \le C\|\eta\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Поэтому $\{F_\varepsilon\} \subset B$, где B — ограниченное подмножество пространства $C^*(\Omega)$. Из (1.10) получаем следующее тождество, справедливое для гладкой финитной функции η:

$$\int\limits_\Omega \eta\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}\, dx + \langle F_{\varepsilon,\varphi}, \eta\rangle = -\varepsilon\int\limits_\Omega \varphi(s_\varepsilon)\nabla s_\varepsilon\nabla\eta\, dx.$$

Ввиду оценок из теоремы 1.1 правая часть удовлетворяет неравенству

$$\left|\varepsilon\int\limits_\Omega \varphi\nabla s_\varepsilon\nabla\eta\, dx\right| \le C\sqrt{\varepsilon}\|\eta\|_{H_1(\Omega)}.$$

Отсюда последовательность $\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi} + F_\varepsilon$ сходится к нулю в $H_1(\Omega)$. Тем самым $\{\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi} + F_\varepsilon\} \subset A$, где A — компактное подмножество $H_{-1}(\Omega)$. С другой стороны, множество $\{\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}\}$ ограничено в $L_r(\Omega)$, $r > 2$. Следовательно, функции $\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}$ принадлежат некоторому ограниченному множеству $C \subset W_r^{-1}(\Omega)$. Значит, $\{\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}\} \subset (A - B)\cap C$. В силу леммы Мюра [11] семейство функций $\operatorname{div}\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi}$ предкомпактно в $H_{-1}(\Omega)$, и лемма доказана.

Возьмем две функции $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $i = 1, 2$. Ввиду теоремы 1.1 потоки $\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_i}$ слабо сходятся в $L_2(\Omega)$ к некоторым вектор-функциям $\mathbf{P}_i^*(x)$, имеющим представления

$$\mathbf{P}_i^*(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \Psi_i(\lambda)d\mathbf{V}_x(\lambda) + \int\limits_{\mathbb{R}} \Phi_i(\lambda)d\Lambda_x(\lambda)\ \mathbf{b}(x). \tag{3.2}$$

Функции

$$Q_\varepsilon = \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1}\times\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_2} = (\Psi_2(s_\varepsilon)\Phi_1(s_\varepsilon) - \Psi_1(s_\varepsilon)\Phi_2(s_\varepsilon))\mathbf{v}_\varepsilon\times\mathbf{b}$$

слабо сходятся в $L_{r/2}(\Omega)$, $r > 2$, к функции $Q^*(x)$, задаваемой формулой

$$Q^*(x) = \int\limits_R (\Phi_2(\lambda)\Psi_1(\lambda) - \Phi_1(\lambda)\Psi_2(\lambda))\, d\mathbf{V}_x(\lambda)\times\mathbf{b}(x). \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *В предположениях теоремы* 1.2 *во всех точках из* Ω *выполнены равенства*

$$Q_*(x) = \mathbf{P}_1^*(x) \times \mathbf{P}_2^*(x), \quad w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} (\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_i}) = w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{P}_i^*. \tag{3.4}$$

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что множество функций $\operatorname{rot} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1}^\perp = \operatorname{div} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1}$ компактно в $H_{-1}(\Omega)$. Согласно теореме 1.1 последовательности ∇p_ε, $\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_i}$ ограничены в пространстве $L_r(\Omega)$. По лемме о роторе и дивергенции имеем

$$\begin{aligned} w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} (\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1} \times \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_2}) &= w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \big(\mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1}^\perp \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_2}\big) \\ &= w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1}^\perp \cdot w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_2} = w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_1} \times w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_2}, \end{aligned}$$

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} (\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_i}) = w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \nabla p_\varepsilon \cdot w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi_i},$$

что завершает доказательство.

Рассмотрим набор функций $f_{km}(\alpha, s, \mathbf{v})$, $k = 1, 2$, $m \geq 1$, $\alpha, s \in \mathbb{R}^1, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ из первого бэровского класса, непрерывных слева или справа по α и удовлетворяющих неравенствам $|f_{km}(\alpha, s, \mathbf{v})| \leq c(\alpha, s)(1 + |\mathbf{v}|^k)$. Пусть $g(x, f_{k,m})$ — непрерывная функция такая, что $|g(f_{k,m})| \leq c(1 + |f_{1m}|^2 + |f_{2m}|)$. Положим

$$\eta_{k,m}(\alpha, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_{km}(\alpha, s, q)\, d\nu_x, \quad G(\alpha, x) = g(\eta_{k,m}(\alpha, x)).$$

Лемма 3.3. *В указанных предположениях отображение* $x \to G(\alpha, x)$ *измеримо для любого* $\alpha \in \mathbb{R}^1$. *Если неравенство*

$$\int\limits_\Omega \xi(x) G(\alpha, x)\, dx \leq 0$$

выполнено для любого $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $0 \leq \xi \in C(\Omega)$, *то существует борелевское множество* $E \subset \Omega$ *такое, что* $\operatorname{mes}(\Omega \setminus E) = 0$ *и* $G(\alpha, x) \leq 0$ *для любой* $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $x \in E$.

Доказательство. Поскольку функции $f_{k,m}$ бэровские, существует последовательность непрерывных функций f_{kmj}, имеющих те же границы, что и $f_{k,m}$, и таких, что $f_{kmj} \to f_{k,m}$ поточечно на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. По теореме Лебега

$$\eta_{k,m}(\alpha, x) = \lim_{j \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_{kmj}(\alpha, s, q)\, d\nu_x.$$

Поэтому $\eta_{k,m}(\alpha, \cdot)$, $G(\alpha, \cdot)$ измеримы как поточечные пределы последовательностей измеримых функций. Рассмотрим всюду плотное счетное множество $\{\alpha_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{R}^1$. По теореме Лузина для любого α_i существует борелевское множество $\Omega_{im} \subset \Omega$ такое, что функция $G(\alpha_i, \cdot)$ непрерывна на Ω_{im} и $\operatorname{mes}(\Omega \setminus \Omega_{im}) < m^{-1} 2^{-i}$. По условию леммы имеем $G(\alpha_i, x) \leq 0$ для $x \in \Omega_{im}$. Следовательно, $G(\alpha_i, x) \leq 0$ для любого α_i, $x \in E = \bigcup\limits_m \bigcap\limits_i \Omega_{im}$. Поскольку G непрерывна слева или справа по α, это неравенство выполнено для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^1$, и лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1.2. Начнем с доказательства утверждения (i) теоремы. Фиксируем два числа $\alpha < \beta$ и функцию $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условиям

$$\omega(-s) = \omega(s), \quad \omega(s) = 0 \text{ для } |s| > 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega\, dx = 1,$$

и последовательность

$$\varphi_{1,n}(s) = n\omega(n(s-\alpha)+1), \quad \varphi_{2,n}(s) = n\omega(n(s-\beta)+1).$$

Пусть Ψ_{in}, Φ_{in} — энтропийная пара, соответствующая функции φ_{in}. Заметим, что последовательности Ψ_{in}, Ψ_{2n} поточечно сходятся к функциям $a(\alpha)H(s-\alpha)$, $a(\beta)H(s-\beta)$ и последовательности Φ_{1n}, Φ_{2n} — к функциям $H(s-\alpha)$, $H(s-\beta)$.

Обозначим через $\mathbf{P}_{\varepsilon,in}$ поток, определенный формулой (3.1), в котором Ψ, Φ заменены на Φ_{in}, Ψ_{in}. Обозначим через $\mathbf{P}^*_{in}$, Q^*_n слабые пределы $\mathbf{P}_{\varepsilon,in}$ и их векторные произведения, задаваемые равенствами (3.1), (3.2). Подставляя Φ_{in} и Ψ_{in} в тождество

$$Q^*_n(x) = \mathbf{P}^*_{1n}(x) \times \mathbf{P}^*_{2n}(x)$$

и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим равенство

$$\int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{[\beta,\infty)} (a(\alpha)-a(\beta))d\mathbf{V}_x(\lambda) \times \mathbf{b}(x) - \mathbf{R}_x(\alpha) \times \mathbf{R}_x(\beta)\Bigg)\xi(x)\, dx = 0.$$

Здесь ξ — произвольная непрерывная функция и вектор-функция $\mathbf{R}_x(s)$ зависит от $x \in \Omega$ согласно формуле

$$\mathbf{R}_x(s) = -a(s)\int\limits_{[s,\infty)} d\mathbf{V}_x(\lambda) + \int\limits_{[s,\infty)} d\Lambda_x(\lambda)\mathbf{b}(x).$$

Полагая

$$\pm G = \int\limits_{\mathbb{R}^3} H(s-\beta)(a(\alpha)-a(\beta))\mathbf{v} \times \mathbf{b}(x) d\nu_x - \mathbf{R}_x(\alpha) \times \mathbf{R}_x(\beta)$$

и применяя лемму 3.3, заключаем, что равенства

$$\int\limits_{[\beta,\infty)} (a(\alpha)-a(\beta))d\mathbf{V}_x(\lambda) \times \mathbf{b}(x) - \mathbf{R}_x(\alpha) \times \mathbf{R}_x(\beta) = 0$$

выполнены для любых α, β почти всюду в Ω.

Вместо $\mathbf{R}_x(s)$, $\mathbf{V}_x(s)$, $\Lambda_x(s)$ будем писать $\mathbf{R}(s)$, $\mathbf{V}(s)$, $\Lambda(s)$, если не возникает недоразумений. Предыдущие соотношения можно записать в краткой форме

$$(a(\beta)-a(\alpha))\mathbf{V}(\beta) \times \mathbf{b} = \mathbf{R}(\alpha) \times \mathbf{R}(\beta), \quad \mathbf{R}(s) = a(s)\mathbf{V}(s) - \Lambda(s)\mathbf{b}. \tag{3.5}$$

Обозначим через E_x множество всех таких β, что $\mathbf{V}(\beta) \times \mathbf{b}(x) \neq 0$.

Предположим, что $E_x \neq \varnothing$. Из неравенств (3.5) имеем $\mathbf{R}(\alpha) \times \mathbf{R}(\beta) \neq 0$ для любых $\alpha < \beta$, $\beta \in E_x$. Докажем, что $(-\infty, \beta] \subset E_x$ для любых $\beta \in E_x$.

Поскольку вектор-функция $\mathbf{V}(\alpha)$ непрерывна слева, можно взять $\gamma < \beta$ такое, что $\mathbf{R}(\gamma) \times R(\beta) \neq 0$. Из (3.5) вытекает, что равенства

$$\mathbf{R}(\alpha) \times \mathbf{R}(\beta) = (a(\beta)-a(\alpha))\mathbf{V}(\beta) \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{R}(\alpha) \times \mathbf{R}(\gamma) = (a(\gamma)-a(\alpha))\mathbf{V}(\gamma) \times \mathbf{b}$$

справедливы для любого $\alpha < \gamma < \beta$. Эти соотношения можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $\mathbf{R}(\alpha)$. Поскольку $\mathbf{R}(\beta) \times \mathbf{R}(\gamma) \neq 0$, эта система невырожденная. Ясно, что ее единственное решение может быть взято в виде $\mathbf{R}(\alpha) = a(\alpha)\mathbf{f} + \mathbf{g}$, где векторы $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ не зависят от α и удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{f} \times \mathbf{R}(\alpha) = -\mathbf{V}(\beta) \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{f} \times \mathbf{R}(\gamma) = -\mathbf{V}(\gamma) \times \mathbf{b},$$
$$\mathbf{g} \times \mathbf{R}(\beta) = a(\beta)\mathbf{V}(\beta) \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{g} \times \mathbf{R}(\gamma) = a(\gamma)\mathbf{V}(\gamma) \times \mathbf{b}.$$

Так как функция a монотонна и $\mathbf{V}(\beta) \times \mathbf{b}$, $\mathbf{V}(\gamma) \times \mathbf{b}$ отличны от нуля, заключаем, что векторы $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ линейно назависимы. Поэтому векторы $\mathbf{R}(\alpha)$ линейно независимы при $\alpha < \beta$. Отсюда и из равенства

$$(a(\alpha) - a(\alpha'))\mathbf{V}(\alpha') \times \mathbf{b} = \mathbf{R}(\alpha') \times \mathbf{R}(\alpha), \quad \alpha' < \alpha < \beta,$$

получаем $\mathbf{R}(\alpha') \times \mathbf{b} \neq 0$. Следовательно, $\alpha' \in E_x$, так что $(-\infty, \beta) \subset E_x$ для любого $\beta \in E_x$. Это влечет включение $(-\infty, s^*) \subset E_x$, $s^* = \sup E_x$.

Установим теперь, что функция $\mathbf{V}(\alpha) \times \mathbf{b}$ постоянна на множестве E_x. Возьмем произвольные элементы $\alpha_i \in \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие неравенствам $\alpha_1 < \alpha_2 < \gamma < \beta$. Из (3.5) имеем

$$(a(\alpha_1) - a(\alpha_2))\mathbf{f} \times \mathbf{g} = -(a(\alpha_1) - a(\alpha_2))\mathbf{V}(\alpha_2) \times \mathbf{b}.$$

Поскольку векторы $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ линейно независимы и функция a строго монотонна, заключаем, что $\mathbf{V}(\alpha_2) \times \mathbf{b}$ не зависит от α_2. Поэтому функция $\mathbf{V}(\alpha_2) \times \mathbf{b} \neq 0$ постоянна на E_x. Ввиду непрерывности слева $\mathbf{V}(\alpha) \times \mathbf{b}$ имеем $s^*(x) \equiv \sup E_x \in E_x$ и $E_x = (-\infty, s^*(x)]$. Из определения меры Янга и теоремы 1.1 вытекает, что

$$\mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{v}^* \equiv w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{v}_\varepsilon \quad \text{для } \alpha < -M,$$

где $M = \sup\limits_{\varepsilon} \|s_\varepsilon\|_{L_\infty(\Omega)}$. Отсюда и из уже доказанного получаем, что

$$\mathbf{V}(\alpha) \times \mathbf{b} = \mathbf{v}^* \times \mathbf{b} \quad \text{для } \alpha \le s^*, \quad \mathbf{V}(\alpha) \times \mathbf{b} = 0 \quad \text{для } \alpha > s^*. \tag{3.6}$$

Установим явную формулу для вектор-функции $\mathbf{V}(\alpha)$. Пусть $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2)$ — ортогональный базис в $\mathbb{R}^2$ такой, что $\mathbf{e}_1 = |\mathbf{b}|^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = 1$. Обозначим через $V_i(\alpha)$ компоненты вектора $\mathbf{V}(\alpha)$. Согласно предыдущему замечанию имеем

$$V_2(\alpha) = v_2^* \equiv -\frac{\mathbf{v}^* \times \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \neq 0 \quad \text{для } \alpha \le s^*,$$
$$V_2(\alpha) = 0 \quad \text{для } \alpha > s^*.$$

Отсюда и из определения вектор-функции $\mathbf{R}(\alpha)$ следует, что для всех $\alpha \le s^*$ она имеет представление $\mathbf{R}(\alpha) = q(\alpha)\mathbf{e}_1 + a(\alpha)v_2^*\mathbf{e}_2$. Подставляя его в (3.5), приходим к равенству

$$(q(\alpha)a(\beta) - q(\beta)a(\alpha))v_2^* = (a(\beta) - a(\alpha))(-|\mathbf{b}|v_2^*),$$

справедливому для всех $\alpha < \beta \le s^*$. Тем самым $q(\alpha) = -|\mathbf{b}| + Ca(\alpha)$, где C не зависит от $\alpha < s^*$. Поскольку $\mathbf{R}(\alpha) = a(\alpha)\mathbf{v}^* - \mathbf{b}$ для $\alpha < -M$, то $C = v_1^*$. Таким образом, получаем формулу

$$\mathbf{R}(\alpha) = a(\alpha)\mathbf{v}^* - \mathbf{b} \quad \text{для } \alpha \le s^*, \quad \mathbf{R}(\alpha) = 0 \quad \text{для } s > s^*,$$

которая вместе с (3.5) приводит к равенствам

$$\mathbf{V}(\alpha) = \mathbf{v}^* + \frac{\Lambda(\alpha) - 1}{a(\alpha)}\mathbf{b} \quad \text{для } \alpha \le s^*, \qquad \mathbf{V}(\alpha) = \frac{\Lambda(\alpha)}{a(\alpha)}\mathbf{b} \quad \text{для } \alpha > s^*. \tag{3.7}$$

Если $E_x = \varnothing$, то $\mathbf{V}_x(\lambda) \times \mathbf{b} = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, существует функция $\rho_x(\lambda)$ такая, что

$$\mathbf{V}_x(\lambda) = \rho_x(\lambda)\mathbf{b}. \tag{3.8}$$

Для завершения доказательства утверждения (i) теоремы 1.2 покажем, что $E_x = \varnothing$ для $x \in \Omega_0$ и $E_x \ne \varnothing$ для $x \in \Omega_1$. Если $E_x = \varnothing$, то $\mathbf{V}_x(\lambda) \times \mathbf{b}(x) = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Так как $\mathbf{V}_x(\lambda) = v^*(x)$ для любого $\lambda \le -M$, имеем $\mathbf{v}^*(x) \times \mathbf{b}(x) = 0$ и $x \in \Omega_0$. Если $E_x \ne \varnothing$, то $\mathbf{v}^*(x) \times \mathbf{b}(x) = \mathbf{V}_x(-M) \times \mathbf{b}(x) \ne 0$ ввиду (3.6). Отсюда $x \in \Omega_1$, что и требовалось.

Доказательство утверждения (ii). По теореме 1.1, определению мерозначных решений и утверждению (i) теоремы 1.2 почти всюду в Ω_1 выполнены равенства

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi} = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi(\lambda)\, d\Lambda_x(\lambda) \cdot \mathbf{b}(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Psi(\lambda)\, d\mathbf{V}_{x,\lambda}, \tag{3.9}$$

где

$$\mathbf{V}_x(\lambda) = \frac{\Lambda_x(\lambda) - H(s^*(x) - \lambda)}{a(\lambda)}\mathbf{b}(x) + H(s^*(x) - \lambda)\mathbf{v}^*(x). \tag{3.10}$$

Так как $\Lambda_x(\lambda) = 0$ при $\lambda > M$ и $\Lambda_x(\lambda) = 1$ при $\lambda < -M$, имеем

$$\Lambda_x(\lambda) - H(s^*(x) - \lambda) = 0 \quad \text{для } |\lambda| > M.$$

Интегрирование по частям дает

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Psi(\lambda)\, d\left(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)} - \frac{H(s^*(x) - \lambda)}{a(\lambda)}\right) = -\int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(\lambda)(\Lambda_x(\lambda) - H(s^*(x) - \lambda))\, d\lambda = \Phi(s^*(x)) + \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi(\lambda)\, d\Lambda_x(\lambda). \tag{3.11}$$

Легко заметить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Psi(\lambda)\, dH(s^*(x) - \lambda) = -\Psi(s^*(x)). \tag{3.12}$$

Комбинируя (3.10) и (3.11), (3.12) приходим к следующим соотношениям:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Psi(\lambda)\, d\mathbf{V}_{x,\lambda} = \Psi(s^*(x))\mathbf{v}^*(x) - \Phi(s^*(x))\mathbf{b}(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi(\lambda)\, d\Lambda_x(\lambda)\, \mathbf{b}.$$

Подставляя правую часть этого равенства в (3.9), получим

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{\varepsilon,\varphi} = \Psi(s^*(x))\mathbf{v}^*(x) - \Phi(s^*(x))\mathbf{b}(x),$$

и утверждение доказано.

4. Доказательство теоремы 1.3

1. Предварительные сведения. Дадим эквивалентную формулировку условия S. Для данного $\alpha \in (-M, M)$ обозначим через $\mathscr{P}_\alpha^+$ ($\mathscr{P}_\alpha^-$) множество вероятностных мер, сосредоточенных на сегментах $[\alpha, M]$ ($[-M,\alpha]$). Рассмотрим функции $\Gamma(\lambda)$, $N(\lambda)$, определенные равенствами (1.14), и обозначим через $\lambda = Z(z)$ функцию, обратную к $z = \Gamma(\lambda)$. Напомним, что $\Gamma(\lambda)$, Z — гладкие строго монотонные функции.

Предложение 4.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*
(a) *функция $f_\alpha(z) = N(Z(z))$ строго p-вогнута в точке $z_\alpha = \Gamma(\alpha)$;*
(b) *выполнено неравенство*

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}_\alpha^\pm}\left[(\Gamma(\alpha))^2 + \int\limits_{[-M,M]} N\,d\mu - \Bigg(\int\limits_{[-M,M]} \Gamma\,d\mu\Bigg)^2\right] \le 0. \tag{4.1}$$

Замечание. Положим

$$J(\mu) = \Gamma(\alpha)^2 + \int\limits_{[-M,M]} N\,d\mu - \Bigg(\int\limits_{[-M,M]} \Gamma\,d\mu\Bigg)^2.$$

Для $\mu \in \mathscr{P}_\alpha^-$ с $m^-(\lambda) = \mu((-\infty,\lambda])$ имеем $m^-(\lambda) = 0$ при $\lambda < -M$, $m^-(\lambda) = 1$ при $\lambda \ge \alpha$ и, интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K(\lambda)\Gamma(\lambda)\,d\left(\frac{m^-(\lambda)}{a(\lambda)}\right) - \Bigg(\int\limits_{(-\infty,\alpha]} \Gamma\,d\mu\Bigg)^2 = J(\mu). \tag{4.2}$$

Для $\mu \in \mathscr{P}_\alpha^+$ с $m^+(\lambda) = -\mu([\lambda,\infty))$ имеем

$$\int\limits_{[\alpha,\infty)} K(\lambda)\Gamma(\lambda)\,d\left(\frac{m^+(\lambda)}{a(\lambda)}\right) - \Bigg(\int\limits_{[\alpha,\infty)} \Gamma\,d\mu\Bigg)^2 = J(\mu).$$

Доказательство предложения 4.1 основано на следующей лемме.

Лемма 4.1. *Каждая из вариационных задач*

$$J(\mu^-) = \sup_{\mu\in\mathscr{P}_\alpha^-} J(\mu),\ \mu^- \in \mathscr{P}_\alpha^-, \quad J(\mu^+) = \sup_{\mu\in\mathscr{P}_\alpha^-} J(\mu),\ \mu^- \in \mathscr{P}_\alpha^-$$

имеет по крайней мере одно решение, и выполнены следующие экстремальные соотношения:

$$T^\pm(\lambda) \equiv N(\lambda) - 2\rho^\pm\Gamma(\lambda) = \mathrm{const}, \quad \lambda \in \operatorname{spt}\mu^\pm, \tag{4.3}$$

где

$$\rho^\pm = \int\limits_{[-M,M]} \Gamma\,d\mu^\pm.$$

Доказательство. Дадим доказательство только для случая $\mu \in \mathscr{P}_\alpha^-$; оставшийся оставляем читателю. Существование меры μ^- является следствием слабой непрерывности функционала J и слабой компактности множества $\mathscr{P}_\alpha^- \subset C^*[-M,M]$. Если носитель меры μ^- состоит из одной точки, то равенство (4.3) тривиально. Допустим, что $\operatorname{spt}\mu^-$ состоит более чем из одной точки и докажем, что равенство $T(\lambda) = \text{const}$ выполнено μ^--п. в. Предположим, что $T^-(\lambda) \neq \text{const}$ μ^--п. в. на $[-M, M]$. Тогда существуют компактные множества B_i, $i = 1, 2$, такие, что

$$\mu^-(B_i) > 0, \quad \sup_{\lambda \in B_1} T^-(\lambda) < \inf_{\lambda \in B_2} T^-(\lambda). \tag{4.4}$$

Положим $g(\lambda) = (-1)^i \mu^-(B_i)^{-1}$ для $\lambda \in B_i$ и $g(\lambda) = 0$ для $\lambda \in [-M, M] \setminus B_i$. Заметим, что равенства

$$\langle \mu_\varepsilon, \varphi \rangle = \int\limits_{[-M,M]} \varphi(\lambda)(1 + \varepsilon g(\lambda))\, d\mu^-, \quad \varphi \in \overset{o}{C}[-M, M], \ |\varepsilon| \leq \{\sup_{\lambda \in [-M,M]} |g(\lambda)|\}^{-1},$$

определяют семейство вероятностных мер $\mu_\varepsilon \in \mathscr{P}_\alpha^-$. Ясно, что $J(\mu_\varepsilon) - J(\mu^-) \leq 0$, откуда

$$\lim_{\varepsilon \to \pm 0} |\varepsilon|^{-1}(J(\mu_\varepsilon) - J(\mu^-)) \equiv \pm \int\limits_{[-M,M]} T^-(\lambda) g(\lambda)\, d\mu^- \leq 0.$$

Используя этот факт и определение функции g, получаем равенство

$$\frac{1}{\mu^-(B_1)} \int\limits_{B_1} T^-(\lambda)\, d\mu^- = \frac{1}{\mu^-(B_2)} \int\limits_{B_2} T^-(\lambda)\, d\mu^-,$$

противоречащее (4.4). Поэтому функция $T^-(\lambda)$ постоянна μ^--п. в. Так как функция $T^-(\lambda)$ непрерывна, равенство $T^-(\lambda) = \text{const}$ справедливо на носителе меры μ^-, и лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения 4.1 и установим импликацию $(a) \Rightarrow (b)$. Проверим неравенства (4.1) в случае $\mu \in \mathscr{P}_\alpha^-$. Фиксируем точку $\alpha \in (-M, M)$ и предположим, что функция $f_\alpha(z) = N(Z(z))$ p-вогнута в $z_\alpha = \Gamma(\lambda)$. Положим

$$\lambda_1 = \inf \operatorname{spt} \mu^-, \quad \lambda_2 = \sup \operatorname{spt} \mu^-, \quad z_j = \Gamma(\lambda_j), \quad z^* = \rho^- \equiv \int\limits_{[-M,M]} \Gamma(\lambda)\, d\mu^-.$$

Так как Γ строго монотонна и μ^- — вероятностная мера, сосредоточенная на сегменте $[-M, \alpha]$, имеем

$$z^* = \tau z_1 + (1 - \tau) z_2, \quad \tau \in [0, 1], \quad z_\alpha \notin (z_1, z_2).$$

Простое вычисление показывает, что

$$f_\alpha(z_\alpha) = N(\alpha) = 0, \quad f'_\alpha(z_\alpha) = N'(\alpha)(\Gamma'(\alpha))^{-1} = 2z_\alpha.$$

Таким образом,

$$f_\alpha(z_\alpha) = p_\alpha(z_\alpha), \quad f'_\alpha(z_\alpha) = p'_\alpha(z_\alpha),$$

где $p_\alpha(z) = z^2 - z_\alpha^2$. Используя эти обозначения, можем записать $J(\mu^-)$ в виде

$$J(\mu^-) = \int\limits_{[-M,M]} N\, d\mu^- - p_\alpha(z^*). \tag{4.5}$$

Из леммы 4.1 вытекает, что

$$T^-(\lambda) \equiv N(\lambda) - 2z^* \Gamma(\lambda) = c = \text{const}, \quad \lambda \in \operatorname{spt} \mu^-. \tag{4.6}$$

Отсюда и из равенств $N(\lambda_i) = f_\alpha(z_i)$, $z_i = \Gamma(\lambda_i)$ получим $f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2) = 2z^*(z_1 - z_2)$. Поэтому точки $(z_i, f_\alpha(z_i))$ лежат на некоторой линии l такой, что $l \parallel \operatorname{Tan}_{z^*} p_\alpha$.

С другой стороны, из равенств $N(\lambda_i) = f_\alpha(z_i)$ имеем

$$c = f_\alpha(z_i) - 2z^* z_i = \tau f_\alpha(z_1) + (1-\tau) f_\alpha(z_2) - 2{z^*}^2.$$

Подставляя эти соотношения в (4.6), получаем

$$N(\lambda) = \tau f_\alpha(z_1) + (1-\tau) f_\alpha(z_2) + 2z^*\Gamma(\lambda) - 2{z^*}^2.$$

Интегрируя обе части этого равенства относительно меры μ^-, находим

$$\int\limits_{[-M,M]} N\, d\mu^- = \tau f_\alpha(z_1) + (1-\tau) f_\alpha(z_2).$$

Комбинируя эти соотношения с (4.5), выводим, что

$$J(\mu^-) = \sup_{\mu \in \mathscr{P}_\alpha^-} J(\mu) = \tau f_\alpha(z_1) + (1-\tau) f_\alpha(z_2) - p_\alpha(z^*).$$

Поскольку функция f_α строго p-вогнута в точке z_α, заключаем, что $J(\mu^-) \le 0$, и равенство имеет место в том и только в том случае, если $z_1 = z_2 = z^*$. Поскольку $z_1 = z_2 = z^*$, то $\operatorname{spt} \mu^- = \{\alpha\}$, и утверждение доказано. Аналогично доказывается случай $\mu \in \mathscr{P}_\alpha^+$.

Докажем импликацию $(b) \Rightarrow (a)$. Фиксируем точку $\alpha \in (-M, M)$ и предположим, что неравенства (4.1) в этой точке выполнены. Предположим, что функция $f_\alpha(z)$ не является строго p-вогнутой в α. Как отмечено выше, парабола $p_\alpha : y = z^2 - z_\alpha^2$ пересекает график функции f_α в точке $(z_\alpha f_\alpha(z_\alpha))$; графики функций p_α, f_α имеют общую касательную в этой точке.

По предположению существуют $z_1 \le z_2$, $z_\alpha \notin (z_1, z_2)$ и $z^* = \tau z_1 + (1-\tau) z_2$, $\tau \in [0,1]$, такие, что

$$f_\alpha(z_1) - f_\alpha(z_2) = p'_\alpha(z^*)(z_1 - z_2), \quad p_\alpha(z^*) < \tau f_\alpha(z_1) + (1-\tau) f_\alpha(z_2). \tag{4.7}$$

Положим $\lambda_i = Z(z_i)$, $\mu = \tau\delta(\lambda - \lambda_1) + (1-\tau)\delta(\lambda - \lambda_2)$. Поскольку функция $Z(z)$ строго монотонна, то либо $(\lambda_1, \lambda_2) \subset [-M, \alpha]$, либо $(\lambda_1, \lambda_2) \subset [\alpha, M]$, откуда $\mu \in \mathscr{P}_\alpha^- \cup \mathscr{P}_\alpha^+$. Из равенств $f_\alpha(z_i) = N(\lambda_i)$, $z_\alpha = \Gamma(\alpha)$, $z^* = \tau\Gamma(\lambda_1) + (1-\tau)\Gamma(\lambda_2)$ получаем

$$p_\alpha(z^*) = \Bigg(\int\limits_{[-M,M]} \Gamma\, d\mu\Bigg)^2 - \Gamma(\alpha)^2, \quad \tau f_\alpha(z_1) + (1-\tau) f_\alpha(z_2) = \int\limits_{[-M,M]} N(\lambda)\, d\mu.$$

Отсюда и из (4.7) имеем

$$\Gamma(\alpha)^2 + \int\limits_{[-M,M]} N(\lambda)\, d\mu - \Bigg(\int\limits_{[-M,M]} \Gamma\, d\mu\Bigg)^2 > 0,$$

что противоречит (4.2).

2. Доказательство теоремы 1.3. Вначале докажем, что последовательность s_ε сильно сходится в пространстве $L_1(\Omega_1)$. Достаточно установить, что равенства $\Lambda_x(\lambda) = H(s^*(x) - \lambda)$, $(\chi_x(\lambda) = H(\lambda - s^*(x)))$ выполнены почти всюду на Ω_1. Поскольку вариация функции $\Lambda_x(\lambda)$ равна 1, надо показать, что функции $\Lambda_x(\lambda)$, $(\chi_x(\lambda))$ постоянны на интервалах $(-\infty, s^*(x))$, $(s^*(x), \infty)$.

Рассмотрим первый случай. Введем последовательность энтропийных пар Ψ_n, Φ_n:

$$\Psi_n(\lambda) = -\int\limits_{\lambda}^{M} (h(n(\alpha - s))K)'\, ds, \quad \Phi_n(\lambda) = -\int\limits_{\lambda}^{M} a^{-1}(s)(h(n(\alpha - s))K)'\, ds.$$

Здесь $h \in C^1(\mathbb{R}^1)$ — гладкая неубывающая функция такая, что $h(s) = 0$ для $s < -1$ и $h(s) = 1$ для $s \geq 0$. Пусть $\mathbf{P}_{\varepsilon,n} = \Psi_n(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon - \Phi_n(s_\varepsilon)\mathbf{b}$ — поток, соответствующий этой энтропийной паре.

Заметим, что последовательности Ψ_n и Φ_n сходятся поточечно к функциям $\Psi(\lambda) = K(\lambda)H(\alpha - \lambda)$ и $\Phi(\lambda) = \Gamma(\lambda)H(\alpha - \lambda)$.

Из определения Ψ_n заключаем, что $\Psi_n(s) \geq K(s)H(\alpha - s)$. Поскольку $\nabla p_\varepsilon = -K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon$, имеем

$$|H(\alpha - s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon|^2 = H(\alpha - s_\varepsilon)|\nabla p_\varepsilon|^2 \leq -\Psi_n(s_\varepsilon)\nabla p_\varepsilon v_\varepsilon,$$

откуда

$$\begin{aligned} |H(\alpha - s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon|^2 &\leq -\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon,n} - \Phi_n(s_\varepsilon)\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{b} \\ &= \Phi_n(s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{b} - \nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon,n}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

По лемме 2.1 и утверждению (ii) теоремы 1.2 соотношения

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}(\nabla p_\varepsilon \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon,n}) = \nabla p^* \cdot w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{P}_{\varepsilon,n} = \nabla p^* \cdot (\Psi_n(s^*)\mathbf{v}^* - \Phi_n(s^*)\mathbf{b})$$

выполнены почти всюду на Ω_1. Переходя к пределу в (4.8), получаем неравенство

$$\begin{aligned} &w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}|H(\alpha - s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon|^2 \\ &\qquad \leq w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_n(s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon \cdot \mathbf{b} - \nabla p^* \cdot (\Psi_n(s^*)\mathbf{v}^* - \Phi_n(s^*)\mathbf{b}). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Из определения вектор-функции $\mathbf{U}_x(\lambda)$ выводим, что

$$\begin{aligned} w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}|H(\alpha - s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon|^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} K^2 H(\alpha - s)|q|^2\, d\nu_x \\ &= w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_n(s_\varepsilon)K(s_\varepsilon)v_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}^1} K(\lambda)\Phi_n(\lambda)\, dU_x(\lambda). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Подставляя эти соотношения в (4.9) и применяя лемму 3.3, приходим к неравенству

$$\int\limits_{(-\infty,\alpha]\times\mathbb{R}^2} K^2|q|^2\, d\nu_x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi_n(\lambda)K(\lambda)dU_x(\lambda)\cdot\mathbf{b} - \nabla p^*(\Psi_n(s^*)\mathbf{v}^* - \Phi_n(s^*)\mathbf{b}), \tag{4.11}$$

выполненному почти всюду на Ω_1 и для всех α, n. По неравенству Коши

$$\begin{aligned} \Bigg|\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K(\lambda)dU_x\Bigg|^2 &\equiv \Bigg|\int\limits_{(-\infty,\alpha]\times\mathbb{R}^2} K(\lambda)q\, d\nu_x\Bigg|^2 \\ &\leq \nu_x((-\infty,\alpha]\times\mathbb{R}^2)\int\limits_{(-\infty,\alpha]\times\mathbb{R}^2} K^2(\lambda)|q|^2\, d\nu_x. \end{aligned}$$

Из этого тождества, равенства $\nu_x((-\infty,\alpha]\times\mathbb{R}^2)=\chi_x(\alpha)$ и (4.11) получаем

$$\Big|\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K\,d\mathbf{U}_x(\lambda)\Big|^2 \le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^1}\Phi_n(\lambda)K(\lambda)dU_x(\lambda)\cdot\mathbf{b}-\nabla p^*(\Psi_n(s^*)v^*-\Phi_n(s^*)\mathbf{b})\Big)\chi_x(\alpha). \quad (4.12)$$

Фиксируем $x\in\Omega_1$ и возьмем $\alpha<s^*(x)$ такое, что функция $\chi_x(\lambda)$ непрерывна в точке α. Легко проверить, что

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(s^*(x))=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(s^*(x))=0.$$

Переходя в (4.12) к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$\Big|\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K(\lambda)\,dU_x(\lambda)\Big|^2 \le \int\limits_{(-\infty,\alpha]}\Gamma(\lambda)K(\lambda)dU_x(\lambda)\cdot\mathbf{b}(x)\chi_x(\alpha).$$

Из (1.13) и неравенства $\alpha<s^*(x)$ вытекает, что равенство

$$U_x(\lambda)=\chi_x(\lambda)/a(\lambda)\mathbf{b}(x)$$

выполнено для любого $\lambda<\alpha$. Таким образом,

$$\Big|\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K d\Big(\frac{\chi_x(\lambda)}{a(\lambda)}\Big)\Big|^2 \le \chi_x(\alpha)\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K\Gamma\,d\Big(\frac{\chi_x}{a}\Big).$$

Используя равенство

$$\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K(\lambda)\,d\Big(\frac{\chi_x(\lambda)}{a(\lambda)}\Big)=\int\limits_{(-\infty,\alpha]}\Bigg(\frac{K(\alpha)}{a(\alpha)}+\int\limits_{\alpha}^{\lambda}\frac{K(t)'}{a(t)}\,dt\Bigg)\,d\chi_x(\lambda) = \int\limits_{(-\infty,\alpha]}\Gamma(\lambda)\,d\chi_x(\lambda),$$

перепишем это неравенство в виде

$$\Big|\int\limits_{(-\infty,\alpha]}\Gamma(\lambda)\,d\chi_x(\lambda)\Big|^2 \le \chi_x(\alpha)\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K(\lambda)\Gamma(\lambda)\,d\Big(\frac{\chi_x(\lambda)}{a(\lambda)}\Big). \quad (4.13)$$

Предположим, что $\chi_x(\alpha)\neq 0$. Тогда неравенства

$$\int\limits_E d\mu=\frac{1}{\chi_x(\alpha)}\int\limits_{(-\infty,\alpha]\cap E} d\chi_x(\lambda), \quad E\subset\mathbb{R}^1,$$

определяют вероятностную меру μ такую, что $\operatorname{spt}\mu\subset[-M,\alpha]$. Ввиду непрерывности $\chi_x(\lambda)$ в α имеем $\mu(\{\alpha\})=0$. Из (4.13) вытекает, что

$$\int\limits_{(-\infty,\alpha]} K\Gamma\,d\Big(\frac{m^-(\lambda)}{a(\lambda)}\Big)-\Big(\int\limits_{(-\infty,\alpha]}\Gamma\,d\mu\Big)^2\ge 0.$$

Здесь $m^-(\lambda) = \mu(-\infty, \lambda]$. Заметим, что функции $a(s)$ и $k(s)$ удовлетворяют условию S. Поэтому соответствующая функция f_α строго p-вогнута в z_α. Отсюда и из утверждения (b) предложения 4.1 заключаем, что $\mu = \delta(\lambda - \alpha)$; пришли к противоречию с равенством $\mu(\alpha) = 0$. Значит, $\chi_x(\alpha)$ стремится к нулю в точке α. Поскольку функция χ_x монотонна и непрерывна для почти всех точек на вещественной прямой, имеем $\chi_x(\alpha) = 1 - \Lambda_x(\alpha) = 0$ для всякого $\alpha < s^*(x)$, и утверждение доказано.

Остается доказать, что $\Lambda_x(\alpha)$ постоянно на интервале $(s^*(x), \infty)$. Рассмотрим последовательность энтропийных пар Ψ_n и Φ_n:

$$\Psi_n(\lambda) = \int\limits_{-M}^{\lambda} (h(n(s-\alpha))K(s))'\,ds, \quad \Phi_n(\lambda) = \int\limits_{-M}^{\lambda} a^{-1}(s)(h(n(s-\alpha))K)'\,ds.$$

Легко увидеть, что они поточечно сходятся к функциям

$$\Psi(s) = K(s)H(s-\alpha), \quad \Phi(s) = \Gamma(s)H(s-\alpha).$$

Анализ, аналогичный проведенному при доказательстве равенства $\chi_x(\alpha) = 0$ при $\alpha < s^*(x)$, показывает, что неравенства

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} |H(s_\varepsilon - \alpha)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon|^2 \le -\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi_n K d\mathbf{V}_x(\lambda) - \nabla p^*(\Psi_n(s^*)\mathbf{v}^* - \Phi_n(s^*)\mathbf{b}),$$

$$\Lambda_x(\alpha) w\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} |H(s_\varepsilon - \alpha)K(s_\varepsilon)\mathbf{v}_\varepsilon|^2 \ge \Bigg| \int\limits_{[\alpha,\infty)} K(\lambda) d\mathbf{V}_x(\lambda)\Bigg|^2$$

выполнены почти всюду в Ω_1 и для всех α. Фиксируем точку $x \in \Omega_1$ и возьмем $\alpha > s^*(x)$ такое, что $\Lambda_x(\lambda)$ непрерывна в α. Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(s^*(x)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(s^*(x)) = 0,$$

$\mathbf{V}_x(\lambda) = a^{-1}(\lambda)\Lambda_x(\lambda)\mathbf{b}$ для $\lambda \ge \alpha$. Ввиду выбора α предыдущее неравенство можно записать в виде

$$\Bigg| \int\limits_{[\alpha,\infty)} K(\lambda)\, d\bigg(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)}\bigg)\Bigg|^2 \le -\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi_n(\lambda) K(\lambda)\, d\bigg(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)}\bigg).$$

Поскольку

$$\int\limits_{[\alpha,\infty)} \Gamma(\lambda)\, d\Lambda_x(\lambda) = \int\limits_{[\alpha,\infty)} K(\lambda)\, d\bigg(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)}\bigg),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \Phi_n(\lambda) K(\lambda)\, d\bigg(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)}\bigg) = \int\limits_{[\alpha,\infty)} \Gamma(\lambda) K(\lambda)\, d\bigg(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)}\bigg),$$

получаем

$$\bigg(\int\limits_{[\alpha,\infty)} \Gamma(\lambda)\, d\Lambda_x(\lambda)\bigg)^2 \le -\int\limits_{[\alpha,\infty)} \Gamma(\lambda) K(\lambda)\, d\bigg(\frac{\Lambda_x(\lambda)}{a(\lambda)}\bigg).$$

Если $\Lambda_x(\alpha) \ne 0$, то соотношения

$$\int\limits_E d\mu = -\frac{1}{\Lambda_x(\alpha)} \int\limits_{[\alpha,\infty)\cap E} d\Lambda_x(\lambda), \quad E \subset \mathbb{R}^1,$$

определяют вероятностную меру μ, сосредоточенную на интервале $[\alpha, M]$. Перепишем предыдущее неравенство в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Gamma(\lambda) K(\lambda)\, d\biggl(\frac{m^+}{a}\biggr) - \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^1} \Gamma(\lambda)\, d\mu)\biggr)^2 \geq 0.$$

Отсюда и из утверждения (b) предложения 4.1 заключаем, что $\mu = \delta(\lambda - \alpha)$; пришли к противоречию с равенством $\mu(\alpha) = 0$. Поэтому $\Lambda_x(\alpha) = 0$ для всех $\alpha > s^*(x)$, что доказывает теорему 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saffman P. G., Taylor G. I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele — Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1958. V. 245. P. 312–329.

2. *Wooding R. A., Morel-Seytoux H. J.* Multiphase flow through porous media // Ann. Rew. Fluid Mech. 1976. V. 8. P. 233–274.

3. *Otto F.* Stability investigation of planar solutions of Bucley — Leverett equation. Sonderforchungbereich 256. 1995. (Preprint; N 345).

4. *Кружков С. И.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.

5. *Панов Е. Ю.* О последовательности мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185. С. 87–106.

6. *Otto F.* First order equations with boundary conditions. Sonderforchungbereich 256, 1992. (Preprint; N 234).

7. *Tartar L.* The compensated compactness method applied to systems of conservation laws // Systems of nonlinear partial differential equations. Dordrecht; Boston; Massachusets: Reidel Publ. Comp., 1983. P. 263–285 (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C. V. 111).

8. *Perna R. J. Di.* Measure-valued solutions to conservation laws // Arch. Rat. Mech. Anal. 1985. V. 88. P. 223–270.

9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения. М.: Наука, 1973.

10. *Ball J. M.* A version of the fundamental theorem for Young measures // Partial differential equations and continuum models of phase trans. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1989. P. 241–259 (Lectire Notes in Physics, V. 344).

11. *Murat F.* Compacite par compensation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Fis. Math. 1978. V. 5. P. 89–507.

Статья поступила 10 сентября 1999 г.

г. Лейпциг
Лейпцигский университет

г. Новосибирск
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН