S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 76–86 (2010) УДК 510.5
MSC 03D45

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ *EQU*

Ю. Л. ЕРШОВ

Abstract. We give a criterion for equivalence between equilogical and topological spaces. This enables us to prove that a series of interesting categories of topological spaces are complete subcartesian closed subcategories of equilogical spaces.

Keywords: equilogical space, cartesian closed category.

В препринте [1] Д.Скотт определил категорию EQU *эквилогических пространств*, обладающую рядом замечательных свойств.

Объектами EQU являются пары $(X, \sim_X)$, где X – топологическое (T_0) пространство, а $\sim_X$ – (произвольное) отношение эквивалентности на X. Если $(X, \sim_X)$ и $(Y, \sim_Y)$ – эквилогические пространства (т.е. объекты EQU), то *эквивариантным отображением* из $(X, \sim_X)$ в $(Y, \sim_Y)$ называется всякое непрерывное отображение $f : X \to Y$, сохраняющее эквивалентности $(\sim_X)$ и $\sim_Y$ (т.е. для $\xi, \xi' \in X$ из $\xi \sim_X \xi'$ следует $f(\xi) \sim_Y f(\xi')$. Два эквивариантных отображения f и g из $(X, \sim_X)$ в $(Y, \sim_Y)$ эквивалентны ($f \equiv g$), если для любого $\xi \in X \quad f(\xi) \sim_Y g(\xi)$. *Морфизмами в категории* EQU *из* $(X, \sim_X)$ *в* $(Y, \sim_Y)$ являются классы эквивалентности эквивариантных отображений из $(X, \sim_X)$ в $(Y, \sim_Y)$ с естественно определенной композицией (по представителям).

Категория EQU содержит категорию TOP топологических пространств в качестве полной подкатегории, если отождествить топологическое пространство X с эквилогическим пространством (X, id_X).

Основным категорным свойством категории EQU является ее декартова замкнутость (теорема 3.5 в [1]).

Ershov, Yu.L., Topological objects in category EQU.

Поддержано совместным Российско-германским грантом РФФИ-DFG №06-01-04002-ННИО_а и грантом Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-335.2008.1) .

Поступила 19 ноября 2009 г., опубликована 13 марта 2010 г.

Для доказательства этой теоремы Д.Скотт определил еще одну категорию PEQU.

Объектами категории $PEQU$ частичных эквилогических пространств являются пары $(P, \sim_P)$, где P – топологическое пространство, топология которого является топологией Скотта (полной)алгебраической решетки (см. [2]), а $\sim_P$ – частичное отношение эквивалентности на P (т.е. симметричное и транзитивное отношение; через $\delta(\sim_P)$ будем обозначать множество $\{\xi \mid \xi \sim_P \xi, \quad \xi \in P\}$). *Морфизмами категории $PEQU$ из $(P, \sim_P)$ в $(Q, \sim_Q)$* являются классы эквивалентности непрерывных отображений $f : P \to Q$, сохраняющих частичные эквивалентности (для $\xi, \xi' \in \delta(\sim_P)$ из $\xi \sim_P \xi'$ следует, что $f(\xi), f(\xi') \in \delta(\sim_Q)$ и $f(\xi) \sim_Q f(\xi')$) относительно эквивалентности $\equiv$, определенной так

$$f \equiv g \rightleftharpoons \forall \xi \in \delta(\sim_P)(f(\xi) \sim_Q g(\xi)).$$

Оказывается (теорема 3.4 в [1]), что *категории EQU и $PEQU$ эквивалентны.* Эквивалентность определяется следующими двумя функторами $R : PEQU \to EQU$ и $* : EQU \to PEQU$.

Если $(P, \sim_P)$ – объект $PEQU$, то

$$R((P, \sim_P)) \rightleftharpoons (\delta(\sim_P), \sim_P \restriction \delta(\sim_P)^2);$$

$\delta(\sim_P) \subseteq P$ – подпространство P, а $\sim_P \restriction (\delta(\sim_P)^2$ – отношение эквивалентности на нем. Распространение R на морфизмы очевидно.

Пусть $(X, \sim_X)$ – объект EQU; если T_X – топология X(т.е. семейство всех открытых подмножеств X) и $P(T_X)$ – (полная алгебраическая) решетка всех подмножеств T_X, то X^* – это $P(T_X)$ в топологии Скотта. Для $\xi \in X$ пусть $\hat{\xi} \rightleftharpoons \{U \mid U \in T_X, \xi \in U\}$; $\hat{\xi}$ является элементом X^*. Отображение $\xi \mapsto \hat{\xi}, \xi \in X$ является гомеоморфным вложением X в X^*; частичное отношение эквивалентности $\sim_{X^*}$ на X^* определим так, что $\delta(\sim_{X^*}) \rightleftharpoons \hat{X} = \{\hat{\xi} \mid \xi \in X\}$ и $\hat{\xi} \sim_{X^*} \hat{\xi}' \Leftrightarrow \xi \sim_X \xi'$ для любых $\xi, \xi' \in X$. Если $f : X \to Y$ – эквивариантное отображение из $(X, \sim_X)$ в $(Y, \sim_Y)$, то индуцированное отображение $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y} \subseteq Y^*$ имеет продолжение (Y^* – инъективное пространство, см. [2, 3]) до непрерывного отображения из X^* в Y^*. Так как любые два таких продолжения, очевидно, эквивалентны относительно $\equiv$, то это позволяет доопределить функтор $*$ и на морфизмы.

В [1] доказано (теорема 4.3), что *категория bc-областей является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU* и поставлен вопрос (вопрос 2), *не будет ли категория бифинитных областей так же полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU?*. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Для этого исследуется вопрос, когда объект из EQU $(PEQU)$ изоморфен топологическому объекту.

Первая характеризация довольно очевидна.

Предложение 1. *Объект $(X, \sim_X)$ категории EQU изоморфен топологическому объекту тогда и только тогда, когда существует (непрерывная) ретракция $r : X \to X$ такая, что $\xi \sim_X r(\xi)$ для всех $\xi \in X$ и ограничение отношения $\sim_X$ на $r(X)$ есть отношение равенства $id_{r(X)}$.*

Пусть $r : X \to X$ – ретракция с указанными в предложении свойствами; $r(X)$ как подпространство X вместе с $id_{r(X)}$ является топологическим объектом EQU; тогда эквивариантные отображения $r : X \to r(X)$ и $id_{r(X)} : (r(X) \to$

X определяют, очевидно, изоморфизм объектов $(X, \sim_X)$ и $(r(X), id_{r(X)})$ в категории EQU.

Пусть (Y, id_Y) топологический объект EQU, $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to X$ – эквивариантные отображения (из $(X, \sim_X)$ в (Y, id_Y) и из (Y, id_Y) в $(X, \sim_X)$), реализующие изоморфизм в EQU. Пусть $r \rightleftharpoons \psi\varphi$; так как $\varphi\psi = id_Y : Y \to Y$, то $r^2 = \psi\varphi\psi\varphi = \psi\varphi = r$ – ретракция. Условие $r(\xi) \sim_X \xi$ для всех $\xi \in X$ в точности означает, что $r \equiv id_X$. $\square$

Аналогично доказывается и характеризация топологических объектов в $PEQU$:

Предложение 2. *Объект $(P, \sim_P)$ категории $PEQU$ изоморфен топологическому объекту тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение $r : P \to P$ объекта $(P, \sim_P)$ в себя, эквивалентное тождественному id_P, такое, что ограничение $\sim_P$ на $r(\delta(\sim_P))$ совпадает с отношением равенства $id_{r(\delta(\sim_P))}$.* $\square$

Для решения указанного выше вопроса решающим является выяснение того, когда объект, представляющий в (декартово замкнутой!) категории EQU семейство $EQU(X, Y)$ всех морфизмов из (X, id_X) в (Y, id_Y), изоморфен топологическому объекту. Следующая теорема позволяет ответить на многие такие вопросы.

Теорема 1. *Для топологического пространства X следующие свойства эквивалентны:*

1. Решетка $(T_X, \subseteq)$ всех открытых подмножеств X является непрерывной;

2. $EQU(X, Y)$ изоморфен топологическому объекту EQU для любого топологического пространства Y;

3. $EQU(X, \mathbb{S})$ изоморфен топологическому объекту EQU, где $\mathbb{S} = \{\bot, \mathrm{T}\}$ – пространство ("двоеточие") Серпинского.

Для доказательства удобнее работать в эквивалентной категории $PEQU$, где имеется следующее явное описание объекта $PEQU((P, \sim_P), (Q, \sim_Q))$. Пусть $C(P, Q)$ – семейство всех непрерывных отображений из P в Q в топологии поточечной сходимости. Частичное отношение эквивалентности $\sim_Q^P$ на $C(P, Q)$ определяется так:

$$\delta(\sim_Q^P) \rightleftharpoons \{f \mid f \in C(P, Q), f(\delta(\sim_P)) \subseteq \delta(\sim_Q),$$

$$\forall \pi_1 \pi' \in \delta(\sim_P)(\pi \sim_P \pi' \Rightarrow f(\pi) \sim_Q f(\pi'))\};$$

для $f, g \in \delta(\sim_Q^P)$

$$f \sim_Q^P \Leftrightarrow \forall \pi \in \delta(\sim_P)(f(\pi) \sim_Q g(\pi)).$$

Тогда $(C(P, Q), \sim_Q^P)$ – объект $PEQU$, представляющий $PEQU((P, \sim_P),$ $(Q, \sim_Q))$.

Установим импликацию 1. $\Rightarrow$ 2. Рассмотрим сначала случай, когда (Y, id_Y) – объект $PEQU$ (т.е. когда Y – полная алгебраическая решетка топологий Скотта), и установим, что при выполнении свойства 1 для пространства X объект

$$PEQU(X^*,(Y,id_Y)) = (C(X^*,Y),\sim_Y^*),$$

где $\delta(\sim_Y^{X^*}) = \{f \mid f \in C(X^*,Y), \quad \forall \xi,\xi' \in X$

$$((\xi \sim_X \xi') \Rightarrow f(\hat{\xi}) = f(\hat{\xi}'))\}$$

и для $f,g \in \delta(\sim_Y^{X^*}) \quad (f \sim_Y^{X^*} \Leftrightarrow f \restriction \hat{X} = g \restriction \hat{X})$ удовлетворяет условиям предложения 2.

Пусть $(T_X,\subseteq)$ является непрерывной решеткой (см.[2]); для $U,V \in T_X$ запись $V \prec U$ будет означать, что для любого покрытия $\{U_i \mid i \in I\}$ множества

$$U(U = \bigcup_{i\in I} U_i)$$

открытыми множествами найдется конечное $I_0 \subseteq I$ такое, что $V \subseteq \bigcup\limits_{i\in I_0} U_i$ (в частности, $V \prec U$ влечет, что $V \subseteq U$). Непрерывность решетки $(T_X,\subseteq)$ означает в точности, что для любого $U \in T_X$ имеет место равенство $U = \bigcup\{V \mid V \in T_X,\ V \prec U\}$.

Следствие 1. *Если $(T_X,\subseteq)$ – непрерывная решетка, $V,U \in T_X,\ V \prec U;\ U \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i,\ V_i \in T_X,$. Тогда существует конечное $I_0 \subseteq I$ такое, что*

$$V \prec \bigcup_{i\in I_0} U_i.$$

Действительно, пусть $W_i^* \rightleftharpoons \{W \mid W \in T_X, W \prec U_i\},\ i \in I$. Тогда из непрерывности $(T_X,\subseteq)$ следует, что $U_i = \bigcup\{W \mid W \in W_i^*\},\ i \in I$. Отсюда $U \subseteq \bigcup\{W \mid W \in \bigcup\limits_{i\in I} W_i^*\}$. Тогда существуют $W_0,\dots,W_n \in UW_i^*$ такие, что $U \subseteq \bigcup\limits_{j\le n} W_j$. Пусть $i_0,\dots,i_n \in I$ таковы, что $W_j \in W_{ij}^*,\ j \le n$.

$$U \subseteq \bigcup_{j\le n} W_j \quad \prec \bigcup_{j\le n} U_{ij}.$$

□

Топология пространства $C(X^*,Y)$ определяется предбазисом множеств вида $\langle S,a\rangle$, где S – конечное подмножество $T_X(S \in X^*)$, a — компактный элемент $Y(a \in C(Y))$ и $\langle S,a\rangle \rightleftharpoons \{f \mid f \in C(X^*,Y),\ f(S) \in \uparrow a (\rightleftharpoons \{\eta \mid \eta, a \le \eta\}\}$.

Пусть $f \in C(X^*,Y)$; определим систему W_f базисных открытых подмножеств $C(X^*,Y)$ следующим образом:

Пусть a – компактный элемент и пусть $U_a^f \rightleftharpoons \{\xi \mid \xi \in X,\ \hat{\xi} \in f^{-1}(\uparrow a)\}$.

Так как $\hat{U}_a^f \rightleftharpoons \{\hat{\xi} \mid \xi \in U_a\} = \hat{X} \cap f^{-1}(\uparrow a)$ и f непрерывно ($\uparrow a$ открыто в Y), то $U_a^f \in T_X$. Полагаем

$$W_f^a \rightleftharpoons \{\langle\{V\},a\rangle \mid V \prec U_a^f,\ V \in T_X\};\ W_f \rightleftharpoons \bigcup_{a\in C(Y)} W_f^a.$$

Существует наименьшая функция $g \in C(X^*,Y)$ во множестве

$$\cap W_f = \cap\{\langle\{V\},a\rangle \mid \langle\{V\},a\rangle \in W_1^a,\ a \in C(Y)\},$$

а именно $g = \sup\{f_{\langle\{V\},a\rangle} \mid \langle\{V\},a\rangle \in W_1^a,\ a \in C(Y)\}$, где

$$f_{\langle\{V\},a\rangle}(S) \rightleftharpoons \begin{cases} a, & \text{если } V \in S(\{V\} \subseteq S) \\ \perp_Y, & \text{если } V \notin S, \end{cases}$$

(для всех $S \in X^* = P(T_X)$.

Очевидно, что $f_{\langle\{V\},a\rangle} \upharpoonright \hat{X} \leq f \upharpoonright \hat{X}$ (для $\langle\{V\},a\rangle \in W_1^a,\ a \in C(Y)$; следовательно, $g \upharpoonright \hat{X} \leq f \upharpoonright \hat{X}$.

Проверим, что $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$. Пусть $\xi \in X,\ a \in C(Y)$ и $a \leq_Y f(\hat{\xi})$; тогда $\hat{\xi} \in \hat{U}_a,\ \xi \in U_a$ и (используя непрерывность решетки $(T_X, \subseteq)$)$\xi \in V$ для некоторого $V \prec U_a$. Тогда $g \in \langle\{V\},a\rangle$ и, следовательно, $g(\hat{\xi}) \geq g(\{V\}) \geq f_{\langle\{V\},a\rangle}(\{V\}) = a$. Итак, $g(\hat{\xi}) \geq \sup\{a \mid a \in C(Y),\ a \leq f(\hat{\xi})\} = f(\hat{\xi})$. Следовательно, $g \upharpoonright \hat{X} \geq f \upharpoonright \hat{X}$ и $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$.

Проверим, что $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$. Пусть $\xi \in X \quad a \in C(Y)$ и $a \leq_Y f(\hat{\xi})$; Тогда $\hat{\xi} \in \hat{U}_a,\ \xi \in U_a$ и по непрерывности решетки $(T_X, \supseteq)$ найдется $V \in T_X$ такое, что $V \prec U_a$ и $\xi \in V$. Тогда $\langle\{V\},a\rangle \in W_f^a$ и $g \geq f_{\langle\{V\},a\rangle}$; следовательно, $g(\hat{\xi}) \geq g(\{V\}) \geq f_{\langle\{V\},a\rangle}(\{V\}) = a$. Итак, $g(\hat{\xi}) \geq \sup\{a \mid a \in C(Y), \quad a \leq f(\hat{\xi})\} = f(\hat{\xi})$. Следовательно, $g \upharpoonright \hat{X} \geq f \upharpoonright \hat{X}$ и $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$.

Таким образом определено отображение $f \mapsto g,\ f \in C(X^*, Y)$, которое обозначим через $r(g = r(f))$. Из определения r видно, что $r(f)$ зависит только от $f \upharpoonright \hat{X}$, т.е. если $f' \in C(X^*, Y)$ и $f \upharpoonright \hat{X} = f' \upharpoonright \hat{X}$, то $r(f) = r(f')$. Покажем, что отображение r является непрерывным.

Пусть $r(f) \in \langle S, a\rangle, \quad S = \{V_0, \dots, V_n\} \subseteq T_x, \quad a \in C(Y)$ и $a \notin Y_Y$. Так как

$$r(f)(S) = \sup_{\langle\{V_i\},a_i\rangle \in Wf} f_{\langle\{V_i\},a_i\rangle}(S),$$

то найдутся $a_i \in C(Y),\ i \leq n$ такие, что $\langle\{V_i\},a_i\rangle \in W_f$ и $a \leq a_0 \sqcup \ldots \sqcup a_n$. Тогда $r(f) \in \bigcap\limits_{i \leq n} \langle\{V_i\},a_i\rangle$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда базисная окрестность имеет вид $\langle\{V\},a\rangle$. Итак, пусть $r(f) \in \langle\{V\},a\rangle$. Так как $r(f)^{-1}(\uparrow a) \cap \hat{X} = f^{-1}(\uparrow a) \cap \hat{X} = \hat{U}_a$, то для любого $\xi \in U_a$ найдется конечное множество $S_\xi = \{V_0^\xi, \dots, V_{n_\xi}^\xi\} \subseteq \hat{\xi}$ такое, что $f(S) \geq a$ для любого $(S_X \supseteq)S \supseteq S_\xi$. Полагаем $V_\xi \rightleftharpoons \bigcap\limits_{i \leq n_\xi} V_i^\xi$; так как $S_\xi \subseteq \hat{\xi}$, то $\xi \in V_i^\xi,\ i \leq n_\xi$, следовательно, $\xi \in V_\xi$. Но тогда

$$U_a \subseteq \bigcup_{\xi \in U_a} V_\xi.$$

Так как $V \prec U_a$, то по следствию найдутся $\xi_0, \dots, \xi_n \in U_a$ такие, что $V \prec \bigcup\limits_{i \leq n} V_{\xi_i}$. Имеем $f \in \bigcap\limits_{i \leq n} \langle S_{\xi_i}, a\rangle$; пусть $f' \in \bigcap\limits_{i \leq n} \langle S_{\xi_i}, a\rangle$; тогда $U_a^{f'} \geq \bigcup\limits_{i \leq n} V_{\xi_i}$; действительно, если

$$\xi' \in V_{\xi_i} = \bigcap_{j \leq n_{\xi_i}} V_j^{\xi_i},$$

то $V_j^{\xi_i} \in \widehat{\xi'},\ j \leq h_{\xi_i};\ S_{\xi_i} \subseteq \hat{\xi}$ и тогда $f'(\widehat{\xi'}) \geq a,\ \xi' U_a^{f'}$. Но $U_a^{f'}(\geq \bigcup\limits_{i \leq n} V_j^{\xi_i}) > V$, следовательно, $\langle\{V\},a\rangle \in W_a^{f'} \leq W^{f'}$ и $r(f') \geq f\langle\{V\},a\rangle$, т.е. $r(f') \in \langle\{V\},a\rangle$. Итак,

$$r(\bigcap_{i \leq n} \langle S_i, a\rangle) \subseteq \langle\{V\},a\rangle$$

и r – непрерывное отображение $C(X^*, Y)$ в себя такое, что $f \restriction \hat{X} = r(f) \restriction \hat{X}$ и $r(f) \restriction \hat{X} = r(g) \restriction \hat{X}$ влечет $r(f) = r(g)$ для любых $f, g \in C(X^*, Y)$.

По предложению 2 $PEQU(X^*, Y)$ изоморфен топологическому объекту.

Пусть Y – произвольное топологическое пространство. Тогда Y^* является полной алгебраической решеткой; пусть $r : C(X^*, Y^*) \to C(X^*, Y^*)$ – непрерывное отображение, определенное выше (с Y^* вместо Y). Отображение r удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для любого непрерывного отображения $f : X^* \to Y^*$ $f \restriction \hat{X} = r(f) \restriction \hat{X}$;

2) для любых непрерывных отображений $f, g : X^* \to Y^*$ $\quad r(f) = r(g)$ тогда и только тогда, когда $f \restriction \hat{X} = g \restriction \hat{X}$. Имеем $\delta(\sim^{X^*}_{Y^*}) = \{f \mid f \in C(X^*, Y^*), f(\hat{X}) \subseteq \hat{Y}\}$; тогда из 1) следует, что из $f \in \delta(\sim^{X^*}_{Y^*})$ следует, что $r(f) \in \delta(\sim^{X^*}_{Y^*})$ и $f \sim^{X^*}_{Y^*} r(f)$. Условие 2 показывает, что r удовлетворяет всем условиям предложения 2 и, следовательно, $PEQU(X^*, Y^*)$ изоморфен топологическому объекту. Импликация 1. $\Rightarrow$ 2 установлена.

Импликация 2. $\Rightarrow$ 3 очевидна.

Установим теперь импликацию 3. $\Rightarrow$ 1. Пусть $PEQU(X^*, \mathbb{S})$ изоморфен топологическому объекту; тогда по предложению 2 существует непрерывное отображение $r : C(X^*, \mathbb{S}) \to C(X^*, \mathbb{S})$ такое, что для любых $\quad f, g \in C(X^*, \mathbb{S})$ $f \restriction \hat{X} = r(f) \restriction \hat{X}$ и $f \restriction \hat{X} = g \restriction \hat{X}$ влечет $r(f) = r(g)$.

Покажем, что $(T_X, \subseteq)$ – непрерывная решетка. Как отмечалось выше, нужно установить, что $U = \bigcup\{V \mid V \in T_X,\ V \prec U\}$ для любого $U \in T_X$; это равносильно тому, что для любых $\xi \in U \in T_X$ найдется $V \in T_X$ такое, что $\xi \in V$ и $V \prec U$.

Пусть $U \in T_X$ и $\xi_0 \in U$; пусть $f^*_U \rightleftharpoons f_{\langle\{U\},\top\rangle}$; тогда $f^*_U \restriction \hat{X} = \hat{f}_U$, где

$$\hat{f}_U(\hat{\xi}) = \begin{cases} \top, & \text{если } \xi \in U, \\ \bot, & \text{если } \xi \notin U. \end{cases}$$

Пусть $g_U \rightleftharpoons r(f^*_U)$; так как $g_U \restriction \hat{X} = f^*_U \restriction \hat{X} = \hat{f}_U$, то $g_U(\hat{\xi}_0) = \top$. Тогда найдется окрестность $\langle\{V_0, \ldots, V_n\}, \top\rangle$, $V_i \in T_X$, $i \le n$ функции g_U в $C(X^*, \mathbb{S})$ такая, что $\xi_0 \in V \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i \le n} V_i$. Заметим, что для любого $\xi \in V \quad g_U(\hat{\xi}) = \top$; следовательно, $V \subseteq U$. Проверим, что $V \prec U$. Пусть $\{U_i \mid i \in I\}$, $\quad U_i \in T_X$, $i \in I$ – покрытие $U (U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i)$. Пусть $f \in C(X^*, \mathbb{S})$ – наименьшая функция такая, что $f(\{U_i\}) = \top$, $i \in I$. Легко видеть, что $f \restriction \hat{X} = \hat{f}_U = f^*_U \restriction \hat{X}$; следовательно, $r(f) = g_U$. Так как $g_U \in \langle\{V_0, \ldots, V_n\}, \top\rangle$, то $r^{-1}(\langle\{V_0, \ldots, V_n\}, \top\rangle)$ открыто и $f \in r^{-1}(\langle\{V_0, \ldots, V_n\}, \top\rangle)$.

Пусть S_j – конечные подмножества T_X, $j \le k$ такие, что

$$f \in W \rightleftharpoons \bigcup_{i \le n} \langle S_j, \top\rangle \subseteq r^{-1}(\langle\{V_0, \ldots, V_n\}, \top\rangle).$$

Пусть $V'_j \rightleftharpoons \bigcap S_j = \bigcap\{U' \mid U' \in S_j\}$, $\quad j \le k$. Покажем, что

$$V' \rightleftharpoons \bigcup_{i \le k} V'_j \supseteq V.$$

Действительно, пусть g_W – наименьшая функция в W; тогда, как легко видеть, $g_w \restriction \hat{X} = \hat{f}_{V'}$. Но $r(g_W) \restriction \hat{X} = g_W \restriction \hat{X} = \hat{f}'_V : r(g_W) \in \langle\{V_0, \ldots, V_n\}, \top\rangle$ по

выбору W; следовательно,
$$V = \bigcap_{i\le n} V_i \subseteq V'.$$
Далее, $f \in \langle S_j, T\rangle$ влечет существование $i_j \in I$ такого, что $U_{i_j} \in S_j,\ j \le k$. Но $U_{i_j} \in S_j$ влечет, что $V'_j = \bigcap S_j \subseteq U_{i_j},\ j \le k$;
$$V \subseteq V' = \bigcup_{j\le k} V'_j \subseteq \bigcup_{j\le k} U_{i_j}.$$
Следовательно, $V \prec U$, и импликация 3. $\Rightarrow$ 1. установлена.

Теорема доказана. $\square$

Пусть X удовлетворяет условиям теоремы 1, Y – произвольное топологическое пространство. Пусть $r : C(X^*, Y^*) \to C(X^*, Y^*)$ – отображение, построенное в доказательстве импликации 1. $\Rightarrow$ 2. Объекты $(C(X^*, Y^*) \sim^{X^*}_{Y^*})$ и $(C(X^*, Y^*),\quad \sim^{X^*}_{Y^*}\restriction r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*}))^2)$, категории $PEQU$ изоморфны и $R((C(X^*, Y^*), \sim^{X^*}_{Y^*}\restriction r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*}))^2))$ – топологический объект категории EQU, представляющий семейство морфизмов $EQU(X, Y)$.Существует естественное взаимнооднозначное соответствие ρ_0 между $r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*}))$ и семейством $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y; оно является ограничением на $r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*}))$ отображения $\rho : \delta(\sim^{X^*}_{Y^*}) \to C(X, Y)$, определенного так: если $f \in \delta(\sim^{X^*}_{Y^*})$ (т.е. $f(\hat{X}) \subseteq \hat{Y}$), то $g = \rho(f)$ – то единственное отображение из X в Y, для которого $\hat{f}\xi) = \widehat{g(\xi)}$ для всех $\xi \in X$. Опишем явно топологию на $C(X, Y)$, которая превращает отображение ρ_0 в гомеоморфизм.

Теорема 2. *Пусть X удовлетворяет условиям теоремы 1, Y – произвольное топологическое пространство, тогда*

1) Топология на $C(X, Y)$, индуцированная отображением ρ_0, определена предбазисом множеств вида

$\prec V, U \succ \rightleftharpoons \{f \mid f \in C(X, Y),\ V \prec f^{-1}(U)\},\ V \in T_X, U \in T_Y.$

2) Если X является еще и уравновешенным (sober)(см.[2]) пространством, то эта топология совпадает с компактно открытой топологией, т.е. топологией, определенной предбазисом множеств вида $\langle Q, U\rangle \rightleftharpoons \{f \mid f \in C(X, Y), Q \subseteq f^{-1}(U)\},\ Q-$ компактное подмножество $X,\ U \in T_Y$.

1) Из определения отображения r видно, что для любых $V_0, \dots, V_n \in T_X$, $U \in T_Y$ и $f \in \delta(\sim^{X^*}_{Y^*})$ имеет место эквивалентность $(*)$:

$r(f) \in \langle\{V_0, \dots, V_n\},\ \{U\}\rangle \Leftrightarrow$ существует $i \le n$ такое, что $V_i \prec \rho(f)^{-1}(U)$.

Заметим, что $\langle\{V_i\}, \{U\}\rangle \subseteq \langle\{V_0, \dots, V_n\},\ \{U\}\rangle,\ i \le n$.

Из $(*)$, в частности, следует, что $\rho_0^{-1}(\prec V, U \succ) = \langle\{V\}, \{U\}\rangle \cap r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*})), V \in T_X,\ U \in T_Y$; т.е. ρ_0 – непрерывное отображение из $r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*})$ (как подпространства $C(X^*, Y^*)$) в $C(X, Y)$ с указанной в 1) топологией.

Далее, для любых $V_0, \dots, V_n \in T_X, U_0, \dots, U_m \in T_Y$ справедливо равенство
$$\langle\{V_0, \dots, V_n\}, \{U_0, \dots, U_m\}\rangle = \bigcap_{j\le m} \langle\{V_0, \dots, V_n\}, \{U_j\}\rangle.$$

Множества вида $\langle\{V_0, \dots, V_n\},\ \{U_0, \dots, U_m\}\rangle$ образуют базис топологии на $C(X^*, Y^*)$. Указанное равенство вместе с эквивалентностью $(*)$ показывает, что индуцированная на $r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*}))$ топология пространством $C(X^*, Y^*)$ определяется предбазисом множеств вида $\langle\{V\}, \{U\}\rangle \cap r(\delta(\sim^{X^*}_{Y^*})), V \in T_X,\ U \in T_Y$.

Отсюда следует, что ρ_0 – гомеоморфизм и утверждение 1) доказано.

2) Теорема V-5.6. из [2] утверждает, что, *если X является уравновешенным пространством, то $(T_X, \subseteq)$ является непрерывной решеткой тогда и только тогда, когда X является локально компактным пространством, и в случае выполнения этих условий: $V \prec U$ для $V, U \in T_X$ тогда и только тогда, когда существует компактное множество Q такое, что $V \subseteq Q \subseteq U$.*

Покажем, что в этом случае топология, на $C(X,Y)$, определенная в 1) совпадает с компактно открытой топологией. Пусть $V \in T_X$, $U \in T_Y$ и $f \in \prec V, U \succ$, т.е. $V \prec f^{-1}(U)$; тогда найдется компактное множество Q такое, что $V \subseteq Q \subseteq f^{-1}(U)$; следовательно, $f \in \langle Q, U\rangle$. Покажем, что $\langle Q, U\rangle \subseteq \prec V, U \succ$; пусть $g \in \langle Q, U\rangle$, тогда $V \subseteq Q \subseteq g^{-1}(U)$ и, следовательно, $V \prec g^{-1}(U)$ и $g \in \prec V, U \succ$. Итак, $\prec U, U \succ$ открыто в компактно открытой топологии. Пусть Q – компактное подмножество X, $U \in T_Y$ и $f \in \langle Q, U\rangle$, т.е. $Q \subseteq f^{-1}(U)$. Так как $(T_X, \subseteq)$ – непрерывная решетка, то $f^{-1}(U) = \bigcup\{V \mid V \in T_X,\ V \prec f^{-1}(U)\}$; так как Q компактно, то найдутся $V_0, \ldots, V_n \in T_X$ такие, что $V_i \prec f^{-1}(U),\ i \le n$ и $Q \subseteq V \rightleftharpoons V_0 \bigcup \ldots \bigcup V_n$. Но тогда $V \prec f^{-1}(U), f \in \prec V, U \succ$ и очевидно, $\prec V, U \succ \subseteq \langle Q, U\rangle$, т.е. $\langle Q, U\rangle$ открыто в топологии, определенной в 1). Следовательно, эти топологии совпадают. Утверждение 2) доказано.

Теорема доказана. $\square$

Пример 1. Пусть $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел в обычной топологии. Так как $\mathbb{R}$ локально компактно, то для любого топологического пространства Y пространство $C(\mathbb{R}, Y)$ непрерывных отображений $\mathbb{R}$ в Y с компактно открытой топологией представляет $EQU(\mathbb{R}, Y)$.

Укажем еще широкий класс пространств, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Теорема 3. *Если X является α-пространством (определение в [4, 5]), то X удовлетворяет условиям теоремы 1 и топология на $C(X,Y)$, определенная в 1) теоремы 2 совпадает с топологией поточечной сходимости.*

Сначала заметим, что если X – α-пространство, то решетка $(T_X, \subseteq)$ непрерывна, т.е. X удовлетворяет условиям теоремы 1. Это является следствием теоремы 3 в [5] и следствием I-2.5 в [2]. Но может быть установлено и непосредственно. Пусть $U \in T_X$, $\xi \in T_X$; тогда существует $\xi_0 \in U$ такой, что $\xi_0 \prec \xi$. Тогда $\xi \in Int \uparrow \xi_0$; если $U_i \in T_X$, $i \in I$ и $U \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, то существует $i_0 \in I$ такой, что $\xi_0 \in U_{i_0}$. Но тогда $Int \uparrow \xi_0 \subseteq \uparrow \xi_0 \subseteq U_{i_0}, \xi \in Int \uparrow \xi_0 \prec U$.

Пусть X – α-пространство, Y – произвольное топологическое пространство и $f \in \prec V, U \succ$, $V \in T_X$, $U \in T_Y$; $V \prec f^{-1}(U)$. Так как X – α-пространство, то $f^{-1}(U) = \bigcup\{Int \uparrow \xi \mid \xi \in f^{-1}(U)\}$; следовательно, существуют $\xi_0, \ldots, \xi_n \in f^{-1}(U)$ такие, что

$$V \subseteq \bigcup_{i \le n} Int \uparrow \xi_i.$$

Покажем, что

$$f \in \bigcap_{i \le n} \langle \xi_i, U\rangle \subseteq \prec V, U \succ .$$

Так как $\xi_i \in f^{-1}(U)$, то $f(\xi_i) \in U$, $f \in \langle \xi_i, U\rangle$, $i \le n$, $\quad f \in \bigcap\limits_{i \le n} \langle \xi_i, U\rangle$. Пусть

$$g \in \bigcap_{i \le n} \langle \xi_i, U\rangle;$$

проверим, что $V \prec g^{-1}(U)$. Пусть $\{V_j, \mid j \in J$ – открытое покрытие множества $g^{-1}(U)$; так как $g(\xi_i) \in U,\ \xi_i \in g^{-1}(U)$, то найдется $j_i \in J$ такой, что $\xi_i \in V_{j_i},\ i \leq n$; тогда

$$\bigcup_{i\leq n} V_{j_i} \supseteq \bigcup_{i\leq n} \uparrow \xi_i \supseteq \bigcup_{i\leq n} Int \uparrow \xi_i \supseteq V;$$

следовательно, $V \prec g^{-1}(U)$ и $g \in \prec V, U \succ$. Итак, множества вида $\prec V, U \succ$ открыты в топологии поточечной сходимости.

Множества вида $\langle \xi, U\rangle,\ \xi \in X,\ U \in T_Y$ являются частными случаями множеств вида $\langle Q, U\rangle$, Q – компактное подмножество X. Как показано в доказательстве утверждения 2) (уравновешенность X для этого не использовалась) множества вида $\langle Q, U\rangle$ открыты в топологии из утверждения 1) теоремы 2. Следовательно, эти топологии совпадают.

Теорема доказана. □

Пример 2. Декартова замкнутая категория $\mathbb{B}$ бифинитных областей с наименьшим элементом (см. [6]) такова, что ее объекты являются α-пространствами, а объект морфизмов из X в Y есть пространство $C(X, Y)$ непрерывных функций в топологии поточечной сходимости (см. [4]). Следовательно, теорема 3 влечет, что

категория $\mathbb{B}$ является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU,

что отвечает и на вопрос 2 из [1].

Так как FS-области, введенные А.Юнгом (определение см. в [2], являются α-пространствами, что легко следует из определения и леммы II-2.16 в [2], то как и выше:

категория FS-областей является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU.

Пример 3. Те же соображения, что и выше, показывают, что *категория A_0-пространств $\mathbb{A}_0$ (см. [7]) является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU.*

В [4] автор определил понятие b_0-пространства (грубо говоря, это не обязательно полная бифинитная область) и отметил декартову замкнутость категории всех таких пространств. Если ретракты b_0-пространств назвать *B_0-пространствами*, то категория B_0-пространств $\mathbb{B}_0$ будет декартово замкнутой категорией, состоящей из α-пространств и такая, что объект морфизмов в $\mathbb{B}_0$ из X в Y есть пространство $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y в топологии поточечной сходимости. Следовательно, справедливо

Предложение 3. *Категории $\mathbb{B}, c\mathbb{B}$ (см. [6]) и $\mathbb{A}_0$ являются полными поддекартово замкнутыми подкатегориями категории $\mathbb{B}_0$, категория $\mathbb{B}_0$ является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU.*

В соответствии с пожеланием рецензента укажем соответствие полученных результатов с исследованиями, посвященными вопросам существования правильной топологии на множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из топологического пространства X в топологическое пространство Y. Топология T на $C(X, Y)$ *правильная*, если топологическое пространство $C_T(X, Y)(= \langle C(X, Y), T\rangle)$ представляет функтор

$$C(\_ \times X, Y)(\forall Z(C(Z \times X, Y) \sim C(Z, C_T(X, Y)).$$

Пространство X называется экспоненциируемым [2], если для любого пространства Y на $C(X, Y)$ существует правильная топология.

Приведем характеризацию экспоненциируемых пространств из [2]:

ТЕОРЕМА II-4.12. *Для пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) Решетка $(T_X, \subseteq)$ всех открытых множеств пространства X является непрерывной;

(2) Пространство X экспоненциируемо (в категории TOP_0).

(3) Функтор $\_ \times X$ сохраняет фактор отображения.

Замечание. Как отмечено в [2], эта теорема по существу установлена в работе [8].

Если использовать следующее

Наблюдение. Если K_0 – полная подкатегория категории K, $F : K \to Set$ – функтор, представимый объектом X из K_0, то функтор $F \restriction K_0 : K_0 \to Set$ представим тем же объектом X,

то импликация 1. ⇒ 2. теоремы 1 из настоящей работы влечет импликацию 1. ⇒ 2. теоремы II-4.12 из [2].

Это же наблюдение показывает, что из теоремы 2 настоящей работы следует предложение 5.11 из работы [9].

Возникает естественная

Проблема. Влечет ли существование правильной топологии T на $C(X, Y)$ то, что $EQU(X, Y)$ изоморфен топологическому объекту?

Заметим, что в случае положительного ответа (для конкретных $X, Y \in TOP_0$) имеем $EQU(X, Y) \sim \langle C_T(X, Y), id_{C(X,Y)} \rangle$.

Настоящая статья была написана в конце 90-х, но не была опубликована (было намерение написать книгу по топологии, которая включала бы и этот результат). Осенью 2009 года я решил ее опубликовать и запросил Д.Скотта о том, не решен ли вопрос 2 из [1]. Д.Скотт переадресовал этот вопрос А.Бауэру и А.Симпсону. 22 сентября 2009 года А.Симпсон ответил Д.Скотту и мне, что положительный ответ на этот вопрос может быть получен для счётно базируемых пространств с использованием промежуточной категории так называемых *qcb*-пространств и результатов работ [10, 11]. Я благодарен Д.Скотту и А.Симпсону за полученные разъяснения.

Список литературы

[1] D.S.Scott, *A new category?*, preprint, Carnegie Mellon University, 1998.

[2] G.Gierz, K.H.Hofmann, K.Keimel, J.D.Lawson, M.Mislove, D.S.Scott, *Continuons Lattices and Domoins,* Encyclopedia of Vfthematics and its applications, Cambridge University Press, **93**, 2003.

[3] D.S.Scott, *Continuons lattices*, in: Toposes, Algebraic Geometry and Logic, td. F.Lawvere, Lecture Notes Math., Springer Verlag, **274** (1972), 97–136,

[4] Yu.L.Ershov, *Theory of domains and nearby*, in: Formal Methods in Programming and Their Applicatiions, eds D.Bjorner, M.Broy and I.Pottosin, Lecture Notes Computer Science, Springer Verlag, **735** (1993), 1–7,

[5] Yu.L.Ershov, *The bonnded-complete hull of an α-space,* Theor. Comp. Science, **175** (1997), 3–13.

[6] A.Jung, *Cartesian Closed Categorien of Domains,* CWI Tract 66 Stichting Math. Centrum Amsterdam, 1989.

[7] Ю.Л.Ершов, *Теория А-пространств,* Алгебра и логика, **12**: 4 (1973), 369–416.

[8] B.J.Day, G.M.Kelly, *Topological quotients maps preserved pyllbacks or products,* Proc. Camb.Phil. Soc. **67** (1970), 553–558.

[9] M.Escardo, J.Lawson, A.Simpson.*Comparing cartesian closed categories of (core) compactly generated Spaces,* Topology and Appl. **143**: 1–3 (2004), 109–145.

[10] M.Menni, A.K.Simpson, *Topological and limit space subcategories of countably bosed equilogical Spaces,* Math.Str. in Comp. Sci. **12**: 6 (2002), 739–770.

[11] I.Battenfeld, M.Schröder, A.Simpson, *Compactly generated domain theory,* Festschrift for Klaus Keimel, Math. Str. in Comp. Sci. **16**: 3 (2006), 141–161.

Юрий леонидович Ершов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ershov@math.nsc.ru