S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 14–20 (2010) УДК 512.542
MSC 20D05

РАСПОЗНАВАНИЕ ПО СПЕКТРУ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП, ПРОСТЫЕ ДЕЛИТЕЛИ ПОРЯДКОВ КОТОРЫХ НЕ ПРЕВОСХОДЯТ 17

И. Б. ГОРШКОВ

Abstract. The spectrum $\omega(G)$ of a group G is the set of its element orders. We write $h(G)$ to denote the number of pairwise non-isomorphic finite groups H with $\omega(H) = \omega(G)$. We say that G is recognizable by spectrum if $h(G) = 1$ and that G is a group with solved recognition-by-spectrum problem if $h(G)$ is known. In the paper we prove that the groups $C_3(4)$ and $D_4(4)$ are recognizable by spectrum. It follows from this result that the recognition-by-spectrum problem is solved for all finite simple groups with orders having prime divisors at most 17.

Keywords: finite group, simple group, spectrum of a group, recognition by spectrum

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. В настоящей работе рассматриваются конечные простые группы G со свойством $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$. Мы обозначим множество всех таких групп через ζ_{17}. Поскольку существует лишь конечное число конечных неабелевых простых групп G с одним и тем же множеством $\pi(G)$, множество ζ_{17} содержит конечное число изоморфных типов групп. Используя классификацию конечных простых групп, можно получить полный список групп, содержащихся в ζ_{17} (см., например, [1]). Всего таких групп 73, и они перечислены в таблице 1 настоящей статьи.

Gorshkov, I.B., Recognition by spectrum for finite simple groups with orders having prime divisors at most 17.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (НШ-344.2008.1) и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419).

Поступила 28 октября 2009 г., опубликована 21 января 2010 г.

Спектр $\omega(G)$ конечной группы G — это множество порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ конечной группы G замкнуто относительно делимости и однозначно определено множеством $\mu(G)$ тех элементов из $\omega(G)$, которые являются максимальными относительно делимости. Для произвольного подмножества ω множества натуральных чисел обозначим через $h(\omega)$ число попарно неизоморфных групп G таких, что $\omega(G) = \omega$. Мы будем говорить, что для конечной группы G проблема распознаваемости решена, если мы знаем значение $h(\omega(G))$(для краткости $h(G)$). Более того, группа G называется распознаваемой по спектру, если $h(G) = 1$, почти распознаваемой, если $h(G) < \infty$, и не распознаваемой, если $h(G) = \infty$. Поскольку любая конечная группа, содержащая нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, нераспознаваема (см. [2]), каждая распознаваемая или почти распознаваемая группа является расширением прямого произведения M неабелевых простых групп с помощью некоторой подгруппы группы из $Out(M)$. Поэтому особый интерес представляет вопрос о распознаваемости простых и почти простых групп. Первые примеры распознаваемых конечных простых групп были указаны Ши в середине 80-х гг. прошлого века (см. [3]). К настоящему моменту проблема распознаваемости решена для многих конечных неабелевых простых групп. Последний по времени список таких групп можно найти в [4]. Мы обозначим множество групп из этого списка через η. В частности, η содержит все конечные неабелевы простые группы, простые делители порядков которых не превосходят 13 (см. [5]). Более того, сравнение η и ζ_{17} показывает, что множество $\eta \setminus \zeta_{17}$ состоит из двух элементов, а именно групп $C_3(4)$ и $D_4(4)$.

Основная цель данной работы — доказать, что группы $C_3(4)$ и $D_4(4)$ распознаваемы, и тем самым завершить исследование проблемы распознаваемости для групп из ζ_{17}.

Теорема. *Конечные простые группы $C_3(4)$ и $D_4(4)$ распознаваемы.*

Следствие. *Для всех конечных простых неабелевых групп, простые делители порядков которых не превосходят 17, значение $h(G)$ известно и приведено в таблице 1.*

2. Предварительные результаты

При решении проблемы распознаваемости используется понятие графа простых чисел группы, множеством вершин которого является $\pi(G)$, и вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда в группе G существует элемент порядка pq. Будем обозначать граф простых чисел группы G через $GK(G)$. Пусть $\rho(G)$ — некоторое максимальное по размеру множество попарно несмежных вершин графа $GK(G)$, и $t(G) = |\rho(G)|$, а $\rho(2, G)$ — некоторое максимальное по размеру множество попарно несмежных вершин графа $GK(G)$, содержащее вершину 2, и $t(2, G) = |\rho(2, G)|$. Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$.

Лемма 1. *Пусть L — конечная неабелева простая группа, для которой $t(L) \geq 3$ и $t(2, L) \geq 2$, а G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \widetilde{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G.*

(2) *Для каждого независимого подмножества ρ множества $\pi(G)$ такого, что $|\rho| \geq 3$, не более чем одно простое число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\widetilde{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.*

(3) *Каждое простое число $r \in \pi(G)$, несмежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\widetilde{G}/S|$. В частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.*

Доказательство. См. в [6, 7].

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, $N \lhd G$, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $p|C| \in \omega(G)$ для некоторого простого делителя p числа $|N|$.*

Доказательство. См. в [8, лемма 1].

В таблице 1 приведен список всех конечных неабелевых простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 17. Для каждой из этих групп при помощи [9] найдены все возможные варианты для $\rho(2, G)$.

Таблица 1

G	Порядок G	$\rho(2,G) \setminus \{2\}$	$s(G)$	$h(G)$
Alt_5	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$\{3,5\}$	3	1
Alt_6	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	$\{3,5\}$	3	∞
$^2A_3(2)$	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	$\{5\}$	2	∞
$A_1(7)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$\{3,7\}$	3	1
$A_1(8)$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	$\{3,7\}$	3	1
$^2A_2(3)$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$\{7\}$	2	∞
Alt_7	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\{5,7\}$	3	1
Alt_8	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\{5,7\}$	2	1
$A_2(4)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$\{3,5,7\}$	4	1
$D_4(2)$	$2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$\{7\}$	2	2
$A_1(49)$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$	$\{5,7\}$	3	1
$C_2(7)$	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4$	$\{5\}$	2	∞
$^2A_2(5)$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$	$\{7\}$	2	∞
Alt_9	$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$\{7\}$	2	1
J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$\{7\}$	2	∞
$C_3(2)$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$\{7\}$	2	2
Alt_{10}	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$	$\{7\}$	1	∞
$^2A_3(3)$	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$	$\{5,7\}$	2	1
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	$\{11\}$	2	1
M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	$\{5,11\}$	3	1
$A_1(11)$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$\{5,11\}$	3	1
$^2A_4(2)$	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 11$	$\{5,11\}$	2	∞
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\{3,7,11\}$	4	1
Alt_{11}	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$\{11\}$	2	1
HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$\{7,11\}$	3	1
Alt_{12}	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$\{11\}$	2	1
M^{c}L	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$\{11\}$	2	1
$^2A_5(2)$	$2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$\{7,11\}$	3	1
$A_2(3)$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$	$\{13\}$	2	∞
$A_3(3)$	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13$	$\{13\}$	2	1

G	Порядок G	$\rho(2,G)\setminus\{2\}$	$s(G)$	$h(G)$
$A_1(25)$	$2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$	$\{5,13\}$	3	1
$C_2(5)$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5^4\cdot 13$	$\{13\}$	2	∞
${}^2F_4(2)'$	$2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 13$	$\{13\}$	2	1
${}^2A_2(4)$	$2^6\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$	$\{3,13\}$	2	1
$A_4(3)$	$2^9\cdot 3^{10}\cdot 5\cdot 11^2\cdot 13$	$\{11\}$	2	1
${}^2B_2(8)$	$2^6\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	$\{5,7,13\}$	4	1
$A_1(27)$	$2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 13$	$\{3,13\}$	3	1
$A_1(13)$	$2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$	$\{7,13\}$	3	1
$G_2(3)$	$2^6\cdot 3^6\cdot 7\cdot 13$	$\{7,13\}$	3	1
${}^3D_4(2)$	$2^{12}\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot 13$	$\{13\}$	2	1
$A_1(64)$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	$\{5,7\}$ или $\{7,13\}$	3	1
$A_2(9)$	$2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	$\{7\}$ или $\{13\}$	2	2
$C_3(3)$	$2^9\cdot 3^9\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	$\{13\}$	2	2
$B_3(3)$	$2^9\cdot 3^9\cdot 5\cdot 7\cdot 13$	$\{13\}$	2	2
$C_2(8)$	$2^{12}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13$	$\{5\}$ или $\{13\}$	2	∞
$G_2(4)$	$2^{12}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13$	$\{7,13\}$	2	1
${}^2A_3(5)$	$2^7\cdot 3^4\cdot 5^6\cdot 7\cdot 13$	$\{7,13\}$	1	2
$D_4(3)$	$2^{12}\cdot 3^{12}\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13$	$\{13\}$	2	2
Alt_{13}	$2^9\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	$\{11,13\}$	3	1
Alt_{14}	$2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$	$\{7,13\}$	2	1
Suz	$2^{13}\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	$\{11,13\}$	3	1
Alt_{15}	$2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$	$\{13\}$	2	1
Alt_{16}	$2^{14}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$	$\{13\}$	1	1
Fi_{22}	$2^{17}\cdot 3^9\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	$\{13\}$	2	1
$A_5(3)$	$2^{11}\cdot 3^{15}\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2\cdot 13^2$	$\{11\}$	2	2
$A_1(17)$	$2^4\cdot 3^2\cdot 17$	$\{3,17\}$	3	1
$A_1(16)$	$2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 17$	$\{3,17\}$ или $\{5,17\}$	3	1
$C_2(4)$	$2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 17$	$\{17\}$	2	∞
${}^2D_4(2)$	$2^{12}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 17$	$\{7,17\}$	2	1
$A_3(4)$	$2^{12}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17$	$\{7,17\}$	1	1
$C_4(2)$	$2^{16}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17$	$\{7,17\}$	2	∞
He	$2^{10}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7^3\cdot 17$	$\{17\}$	2	1
${}^2A_2(17)$	$2^6\cdot 3^4\cdot 7\cdot 13\cdot 17^3$	$\{7\}$ или $\{13\}$	2	1
${}^2A_3(4)$	$2^12\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 13\cdot 17$	$\{13,17\}$	1	1
$A_1(169)$	$2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13^2\cdot 17$	$\{5\}$ или $\{17\}$	3	1
$A_2(16)$	$2^{12}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 17$	$\{3,7,17\}$	2	1
$C_2(13)$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2\cdot 13^4\cdot 17$	$\{5\}$ или $\{17\}$	2	∞
$C_3(4)$	$2^{18}\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 17$	$\{7,13\}$	1	**1**
$D_4(4)$	$2^{24}\cdot 3^5\cdot 5^4\cdot 7\cdot 13\cdot 17^2$	$\{7,13\}$	1	**1**
$F_4(2)$	$2^{24}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 13\cdot 17$	$\{13,17\}$	3	1
${}^2D_5(2)$	$2^{20}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 17$	$\{11,17\}$	2	1
Alt_{17}	$2^{14}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17$	$\{13,17\}$	2	1
Alt_{18}	$2^{15}\cdot 3^8\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17$	$\{17\}$	2	1

3. Доказательство теоремы

Используя [10], получаем, что $\mu(C_3(4)) = \{85, 65, 63, 51, 34, 30, 20, 12, 8\}$. Группа $D_4(4)$ содержит подгруппу изоморфную $C_3(4)$, в частности, $\omega(D_4(4)) =$

$\omega(C_3(4)) \cup \{255\}$, а $\mu(D_4(4)) = \{255, 65, 63, 34, 30, 20, 12, 8\}$. Таким образом, $GK(C_3(4)) = GK(D_4(4))$.

Пусть $L \in \{C_3(4), D_4(4)\}$ и G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Несложно проверить, что максимальное по размеру независимое множество вершин $\rho(2, L)$, содержащее вершину 2, определяется однозначно и равно $\{2, 7, 13\}$. По п. 1 леммы 1 существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \widetilde{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. Очевидно, что $\pi(S) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17\}$. По п. 3 леммы 1 числа 7 и 13 не делят число $|K| \cdot |\widetilde{G}/S|$ и, следовательно, найдется максимальное независимое множество вершин $\rho(2, S)$ такое, что множество $\{2, 7, 13\} \subseteq \rho(2, S)$. Из групп, содержащихся в ζ_{17}, этому условию удовлетворяют группы: $A_1(13), {}^2B_2(8)$ $A_1(64)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$, ${}^2A_3(5)$, $C_3(4)$, $D_4(4)$. Значит, S изоморфна одной из этих групп. Так как в ${}^2A_3(5)$ есть элемент порядка 60, а в L не содержится элемента такого порядка, то S не изоморфна ${}^2A_3(5)$.

Предположим, что S не изоморфна $C_3(4)$ и $D_4(4)$. Тогда 17 не делит порядок $Aut(S)$. Поэтому $17 \in \omega(K)$. Положим $\overline{K} = K/O_{17'}(K)$, $\overline{G} = G/O_{17'}(K)$. Тогда $\overline{N} = O_{17}(\overline{K}) \neq 1$. Предположим, что $O = O_p(\overline{G}/\overline{N})$ нетривиальна для некоторого простого числа p. Группа O не содержится в $\overline{N}C_{\overline{G}}(\overline{N})/\overline{N}$. Допустим, что $p \in \{2, 3\}$. Так как в G нет элемента порядка $13 \cdot p$, то в $\overline{G}/\overline{N}$ существует группа Фробениуса T с ядром O и циклическим дополнением порядка 13. По лемме 2 в $\overline{G}$ существует элемент порядка $13 \cdot 17$. Однако $13 \cdot 17 \notin \omega(G)$. Таким образом, $p = 5$. Повторяя рассуждения приведенные выше, можно показать, что в этом случае в $\overline{G}$ существует элемент порядка $7 \cdot 17$, но $7 \cdot 17 \notin \omega(G)$. Таким образом, $\overline{K}$ — 17-группа.

Пусть S изоморфна одной из групп $A_1(13)$, $A_1(64)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$. Тогда в группе S существует группа Фробениуса F с ядром порядка 13 и циклическим дополнением порядка 6. По лемме 2 в $\overline{G}$ существует элемент порядка $6 \cdot 17$, но в $6 \cdot 17 \notin \omega(G)$. Пусть S изоморфна группе ${}^2B_2(8)$. Тогда в группе S существует группа Фробениуса F с ядром порядка 13 и циклическим дополнением порядка 4. По лемме 2 в $\overline{G}$ существует элемент порядка $4 \cdot 17$. Но в $\omega(G)$ нет такого числа. Таким образом, $S \in \{C_3(4), D_4(4)\}$.

Покажем, что $K = 1$. Так как группа K разрешима, то существует такое простое число r, что подгруппа $O^r(K)$ нетривиальна. Пусть $\overline{K} = K/O^r(K)$, $\overline{G} = G/O^r(K)$. Допустим, что $r \in \{5, 17\}$. В группе S есть группа Фробениуса с ядром порядка 8 и циклическим дополнением порядка 7. По лемме 2 получаем, что в группе G есть элемент порядка $7 \cdot r$; противоречие. Допустим, что $\overline{K}$ — 3-группа. В группе S есть группа Фробениуса с ядром порядка 16 и циклическим дополнением порядка 15. Из леммы 2 следует, что в группе $\overline{G}$ есть элемент порядка 45; противоречие. Допустим, что $r = 2$. Без ограничения общности, можно считать, что K — элементарная абелева 2-группа. Пусть U — естественный 2-модуль группы S, $x \in S$, $|x| = 3$ и $\dim C_U(x) = 2$. Тогда в S найдется подгруппа $A \simeq SL_3(4)$ такая, что $x \in A$ и $x \notin Z(A)$. По [11, лемма 1] $V = C_K(x) \neq 1$. В группе $C_S(x)$ содержится подгруппа, изоморфная $\langle x \rangle \times M$, где $M \simeq C_2(4)$. Группа M содержит подгруппу Фробениуса с ядром J порядка 17 и циклическим дополнением порядка 4. Если $C_V(J) \neq 1$, то $2 \cdot 3 \cdot 17 \in \omega(G)$. Если $C_V(J) = 1$, то по лемме 2 имеем $8 \cdot 3 \in \omega(G)$. В группе G нет элементов такого порядка. Таким образом, $\pi(K) \cap \pi(G) = 1$, следовательно, группа K тривиальна.

Пусть $L \simeq C_3(4)$. Группа $S \not\simeq D_4(4)$, так как в $D_4(4)$ есть элемент порядка 255, а в G не содержится элемента такого порядка. Таким образом, группа S изоморфна $C_3(4)$. Значит, $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$, где $S \simeq C_3(4)$. Так как группа $\mathrm{Out}(S)$ имеет порядок 2, то $G = S$ или $G = \mathrm{Aut}(S)$. Но в группе $\mathrm{Aut}(S)$ есть элемент порядка 14. Следовательно, $\omega(\mathrm{Aut}(S)) \nsubseteq \omega(S) = \omega(G)$. Получаем, что $G \simeq S \simeq L$.

Пусть $L \simeq D_4(4)$. Допустим, что $S \simeq C_3(4)$. Тогда $\mu(G)\backslash\mu(S) = \{255\}$. Следовательно, хотя бы одно число из множества $\tau = \{17,\ 5,\ 3\}$ делит порядок K. Как было показано выше, группа K тривиальна. Получаем, что $S \simeq D_4(4)$.

Таким образом, осталось показать, что если $S \leqslant G \leqslant Aut(S)$, то $G \simeq S$. Достаточно рассмотреть случай, когда $|G : S|$ — простое число r.

По [12, теорема 12.5.1] любой автоморфизм конечной группы лиева типа можно представить в виде произведения внутреннего, диагонального, графового и полевого автоморфизмов. Поскольку диагональные автоморфизмы группы S являются внутренними, можно считать, что в $G \setminus S$ есть элемент порядка r.

Допустим, что группа G содержит полевой автоморфизм λ порядка 2. Тогда $D = C_S(\lambda) \simeq D_4(2)$ (см. [13, предложение 4.9.1]). В группе D существует элемент порядка 7. Следовательно, в группе G существует элемент порядка 14; противоречие.

Допустим, что группа G содержит графовый автоморфизм δ порядка 2. Тогда $D = C_S(\lambda) \simeq C_3(4)$ (см. [13, предложение 4.9.2]). В группе D существует элемент порядка 7. Следовательно, в группе G существует элемент порядка 14; противоречие. Допустим, что G содержит графово-полевой автоморфизм ϕ порядка 2. Тогда централизатор $D = C_S(\phi) \simeq {}^2D_4(2)$(см. [13, предложение 4.9.1]). В подгруппе D есть элемент порядка 7; противоречие.

Допустим, что группа G содержит графовый автоморфизм δ порядка 3. Тогда $D = C_S(\lambda) \simeq G_2(4)$ (см. [13, предложение 4.9.2]). В группе D существует элемент порядка 13. Следовательно, в группе G существует элемент порядка 39; противоречие.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian electronic mathematical reports, **6** (2009), 1–12.

[2] В.Д. Мазуров, *Распознавание конечных простых групп по множеству порядков их элементов*, Алгебра и логика, **37** (1998), 651–666.

[3] W. Shi, *A characteristic property of* $PSL_2(7)$, J. Austral. Math. Soc. Ser. A., **36** (1984), 354–356.

[4] В.Д. Мазуров, *Группы с заданным спектром*, Изв. УрГУ, Математика и механика, **36** (2005), 119–138.

[5] А.В. Васильев, *О распознаваемости всех конечных неабелевых простых групп, простые делители которых не превосходят* 13, Сиб. мат. журн., **46** (2005), 315–324.

[6] А.В.Васильев, *О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел*, Сиб. мат. журн., **46** (2005), 511–522.

[7] А.В. Васильев, И.Б. Горшков, *О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел*, Сиб. мат. журн., **50** (2009), 292–299.

[8] В.Д. Мазуров, *Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов*, Алгебра и логика, **36** (1997), 23–32.

[9] А.В. Васильев, Е.П. Вдовин, *Критерий смежности двух вершин в графе простых чисел конечной простой группы*, Алгебра и логика, **44** (2005), 682–725.

[10] А.А. Бутурлакин, *Спектры конечных симплектических и ортогональных групп*, ИМ СО РАН, препринт № 204, Новосибирск, 2008.

[11] А.В. Заварницин, В.Д. Мазуров, *О порядках элементов в накрытиях простых групп $L_n(q)$ и $U_n(q)$*, Труды Ин-та матем. и механ. УрО РАН, **13** (2007), 89–98.

[12] R. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley and Sons, London, 1972.

[13] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups, Number 3 (Mathematical Surveys and Monographs, Volume 40, Number 3)*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

Илья Борисович Горшков
Новосибирский госуниверситет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ilygor@nsc.ru