S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 526–532 (2009) УДК 517.98

MSC 46B50

О ПРИНЦИПЕ КОМПАКТНОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ L^p ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В. В. ШУМИЛОВА

Abstract. We consider the compactness principle in the variable space L^p related to a periodic Borel measure. It is supposed that the periodic Borel measure describes a periodic singular or composite structure. We prove the compactness principle for periodic grids, box structures, involving Cantor's constructions, and corresponding composite structures.

Keywords: periodic structures, periodic Borel measure, compactness principle

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Согласно классической теореме вложения, любая последовательность функций $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$, ограниченная вместе со своим градиентом ∇u_ε в пространстве $L^p(\Omega)$, компактна в смысле сильной сходимости в $L^p(\Omega)$. Представляет интерес выяснение условий выполнения такого принципа компактности, если вместо классического пространства $L^p(\Omega)$ рассматривать переменное пространство $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, связанное с ε- периодической борелевской мерой μ_ε. При этом предполагается, что мера μ_ε характеризует ε-периодическую сингулярную или составную структуру в $\mathbb{R}^N$. Такой подход к описанию периодических структур был предложен В.В. Жиковым в связи с исследованием задач усреднения на периодических структурах [1]. Данная работа является продолжением работы [2], в которой был доказан принцип компактности в переменном пространстве L^2 для ряда периодических сингулярных и тонких структур.

Shumilova, V.V., On the compactness principle in variable space L^p for periodic composite structures.

Поступила 28 апреля 2008 г., опубликована 23 декабря 2009 г.

2. Описание периодических структур

Пусть μ — неотрицательная периодическая борелевская мера в $\mathbb{R}^N$, нормированная условием $\mu(\Box) = 1$, где $\Box = [0,1)^N$ — ячейка периодичности. Будем предполагать, что мера μ описывает некоторую периодическую структуру F, то есть $\mu(\Box \backslash F) = 0$. При этом структура F будет называться составной, если мера μ является суммой периодических борелевских мер, носители которых характеризуют составные компоненты структуры F. В качестве модельных составных компонент рассмотрим следующие сингулярные структуры с характеризующими их "естественными" мерами.

(i) Пусть S — периодическая сетка, состоящая из двух систем параллельных прямых в $\mathbb{R}^2$, пересекающихся друг с другом под углом $45°$ или $90°$. Естественной мерой на S будем считать периодическую нормированную меру, сосредоточенную на S и пропорциональную там линейной мере Лебега.

(ii) Пусть μ_0 — естественная мера на периодическом канторовом множестве в $\mathbb{R}$ [3]. Тогда периодическая канторова сетка характеризуется мерой $d\mu_1 = d\mu_0(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times d\mu_0(x_2)$, а периодическая канторова ящичная структура — мерой $d\mu_1 = d\mu_0(x_1) \times dx_2 \times dx_3 + dx_1 \times d\mu_0(x_2) \times dx_3 + dx_1 \times dx_2 \times d\mu_0(x_3)$.

(iii) Пусть S — периодическая ящичная структура, состоящая из трех взаимно ортогональных систем параллельных граней в $\mathbb{R}^3$. Естественной мерой на S будем считать периодическую нормированную меру, сосредоточенную на S и пропорциональную там плоской мере Лебега.

3. Принцип компактности и один общий результат

Введем меру μ_ε равенством

$$\mu_\varepsilon = \varepsilon^N \mu(\varepsilon^{-1} B) \quad \text{для любого борелевского множества } B \subset \mathbb{R}^N.$$

Известно, что мера μ_ε имеет период ε и слабо сходится к мере Лебега: $d\mu_\varepsilon \rightharpoonup dx$ при $\varepsilon \to 0$ [4].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим последовательность функций $u_\varepsilon(x)$ из $C_0^\infty(\Omega)$, ограниченную в пространстве $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ $(p > 1)$, то есть

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon < \infty.$$

Тогда слабая сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ означает, что $u \in L^p(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon = \int_\Omega u \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Сильная сходимость $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ означает, что $u \in L^p(\Omega)$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon v_\varepsilon d\mu_\varepsilon = \int_\Omega uv dx \quad \text{как только } v_\varepsilon \rightharpoonup v \text{ в } L^{p/(p-1)}(\Omega, d\mu_\varepsilon).$$

В дальнейшем будут использоваться следующие свойства слабой и сильной сходимости в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ [4]:

(i) любая последовательность, ограниченная в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, компактна в смысле слабой сходимости;

(ii) полунепрерывность снизу: если $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, то

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \ge \int_\Omega |u|^p dx;$$

(iii) сильная сходимость $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ складывается из слабой сходимости $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ и равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Будем говорить, что имеет место принцип компактности в пространстве $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, если любая последовательность функций u_ε, удовлетворяющая условиям

$$u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega), \quad u_\varepsilon \text{ и } \nabla u_\varepsilon \ \text{ ограничены в } L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon), \tag{1}$$

компактна в смысле сильной сходимости в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.

Имеет место следующий результат общего вида, связывающий принцип компактности в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ и неравенство Пуанкаре для меры μ_ε.

Лемма 1. *Пусть для любого куба D со стороной d, содержащего целое число ячеек периодичности $\varepsilon\square$, выполнено неравенство Пуанкаре*

$$\int_D |f|^p d\mu_\varepsilon \le C d^p \int_D |\nabla f|^p d\mu_\varepsilon, \quad \int_D f d\mu_\varepsilon = 0, \quad f \in C^\infty(\overline{D}) \tag{2}$$

с постоянной C, не зависящей от d и ε. Тогда имеет место принцип компактности в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность u_ε, удовлетворяющую условию (1). Продолжим функции u_ε нулем на $\mathbb{R}^N$. Так как последовательность u_ε ограничена в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, то без ограничения общности можно считать, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Разобьем пространство $\mathbb{R}^N$ на полуоткрытые, содержащие целое число ячеек периодичности, кубы $[0,d)^N + dn$, где n — целочисленный вектор. Обозначим отдельный куб, имеющий непустое пересечение с областью Ω, символом D_j. Тогда

$$\int_\Omega |u_\varepsilon(x)|^p d\mu_\varepsilon = \sum_j \int_{D_j} |u_\varepsilon(x)|^p d\mu_\varepsilon.$$

Из неравенства Пуанкаре (2) следует, что

$$\int_{D_j} |u_\varepsilon(x) - c_j^\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \le C d^p \int_{D_j} |\nabla u_\varepsilon(x)|^p d\mu_\varepsilon,$$

$$c_j^\varepsilon = \frac{1}{p_j^\varepsilon} \int_{D_j} u_\varepsilon(x) d\mu_\varepsilon, \quad p_j^\varepsilon = \int_{D_j} d\mu_\varepsilon,$$

где постоянная C не зависит от d и ε. Складывая полученные равенства по всем кубам D_j, находим

$$\sum_j \int_{D_j} |u_\varepsilon(x) - c_j^\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \le C d^p \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon(x)|^p d\mu_\varepsilon.$$

Последовательно применяя неравенство Минковского для интегралов и для сумм, получаем

$$\sum_j \left[\left(\int_{D_j} |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \right)^{1/p} - \left(p_j^\varepsilon\right)^{(1-p)/p} \left| \int_{D_j} u_\varepsilon d\mu_\varepsilon \right| \right]^p \leq Cd^p \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon,$$

$$\left(\int_{D_j} |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \right)^{1/p} \leq \left[\sum_j \left(p_j^\varepsilon\right)^{1-p} \left| \int_{D_j} u_\varepsilon d\mu_\varepsilon \right|^p \right]^{1/p} + C^{1/p} d \left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \right)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая ограниченность ∇u_ε в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)^N$, приходим к неравенству

$$\left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \right)^{1/p} \leq \left[\sum_j \left(\int_{D_j} dx \right)^{1-p} \left| \int_{D_j} u dx \right|^p \right]^{1/p} + C_1 d,$$

где постоянная C_1 также не зависит от d и ε. По неравенству Гельдера

$$\left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p} + C_1 d.$$

Так как d произвольно, то при $d \to 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon \leq \int_\Omega |u|^p dx.$$

По свойству полунепрерывности (ii) здесь должно выполняться равенство и поэтому $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Лемма доказана. □

4. Принцип компактности для мер специального вида

С помощью леммы 1 докажем принцип компактности для периодических структур, которые характеризуются мерой специального вида. Для этого на квадрате $D = [0, d]^2$ рассмотрим меру

$$dm = dv_1 + dv_2, \tag{3}$$

где

$$dv_1 = dm_1(x_1) \times dx_2, \quad dv_2 = dx_1 \times dm_2(x_2),$$

а m_1 и m_2 — неотрицательные меры на отрезке $I = [0, d]$ и $v_1(D) = v_2(D) = k$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Для меры* (3) *имеет место неравенство Пуанкаре*

$$\int_D |f|^p dm \leq Cd^p \int_D |\nabla f|^p dm, \quad \int_D f dm = 0, \quad f \in C^\infty(D), \tag{4}$$

где постоянная C не зависит от d.

Доказательство. Возьмем точку x', принадлежащую носителю меры dv_1, и точку x, принадлежащую носителю меры dv_2. Тогда

$$f(x) - f(x') \leq \int_T |\nabla f| dx_1 + \int_{T'} |\nabla f| dx_2', \tag{5}$$

где T' — вертикальное сечение, проходящее через точку x', T — горизонтальное сечение, проходящее через точку x. Интегрируя последнее неравенство как функцию x' по мере dv_1, получаем

$$kf(x) - \int_D f dv_1 \leq k \int_T |\nabla f| dx_1 + d \int_D |\nabla f| dv_1$$

или по симметрии

$$\left| kf(x) - \int_D f dv_1 \right| \leq k \int_T |\nabla f| dx_1 + d \int_D |\nabla f| dv_1,$$

откуда

$$\left| kf(x) - \int_D f dv_1 \right|^p \leq 2^{p-1} \left[k^p d^{p-1} \int_T |\nabla f|^p dx_1 + d^p k^{p-1} \int_D |\nabla f|^p dv_1 \right].$$

Интегрируя полученное неравенство как функцию x по мере dv_2, а затем применяя неравенство Минковского, приходим к неравенству

$$\int_D |f|^p dv_2 \leq 2^{p-1} k^{1-p} \left| \int_D f dv_1 \right|^p + 4^{p-1} d^p \int_D |\nabla f|^p dm.$$

Аналогично

$$\int_D |f|^p dv_1 \leq 2^{p-1} k^{1-p} \left| \int_D f dv_2 \right|^p + 4^{p-1} d^p \int_D |\nabla f|^p dm.$$

Суммируя два последних неравенства, получаем

$$\int_D |f|^p dm \leq 2^{p-1} k^{1-p} \left(\left| \int_D f dv_1 \right|^p + \left| \int_D f dv_2 \right|^p \right) + 2^{2p-1} d^p \int_D |\nabla f|^p dm.$$

Так как $|a|^p + |b|^p \leq |a-b|^p + |a+b|^p$ при $p > 1$, то

$$\int_D |f|^p dm \leq 2^{p-1} k^{1-p} \left(\left| \int_D f dm \right|^p + \left| \int_D f dv_1 - \int_D f dv_2 \right|^p \right) + 2^{2p-1} d^p \int_D |\nabla f|^p dm.$$

Отсюда с помощью неравенства

$$\left| \int_D f dv_1 - \int_D f dv_2 \right| \leq d \int_D |\nabla f| dm,$$

легко вытекаемого из неравенства (5) интегрированием по x' и мере dv_1, а затем по x и мере dv_2, получаем неравенство (4) при $C = 3 \cdot 4^{p-1}$. □

Из доказательства неравенства Пуанкаре (4) видно, что оно остается верным и в том случае, когда $v_2(D) = l v_1(D)$, где l — любое положительное число, не зависящее от d.

Из лемм 1 и 2 следует принцип компактности для мер специального вида.

Теорема 1. *Если периодическая нормированная борелевская мера m имеет специальный вид*

$$dm = dm_1(x_1) \times dx_2 + dx_1 \times dm_2(x_2),$$

где m_1 и m_2 — ненулевые неотрицательные меры, то имеет место принцип компактности в пространстве $L^p(\Omega, dm_\varepsilon)$.

Аналогичный результат справедлив также и для меры, заданной в пространстве: если периодическая нормированная борелевская мера m имеет специальный вид

$$dm = dm_1(x_1) \times dx_2 \times dx_3 + dx_1 \times dm_2(x_2) \times dx_3 + dx_1 \times dx_2 \times dm_3(x_3),$$

где хотя бы две из неотрицательных мер m_1, m_2 и m_3 ненулевые, то имеет место принцип компактности в пространстве $L^p(\Omega, dm_\varepsilon)$.

Из принципа компактности для специальных мер непосредственно следует принцип компактности для следующих периодических структур:

(1) (канторовой) сетки, а также составной структуры, описываемой суммой плоской меры Лебега и естественной меры на (канторовой) сетке;
(2) (канторовой) ящичной структуры, а также составной структуры, описываемой суммой пространственной меры Лебега и естественной меры на (канторовой) ящичной структуре.

5. Принцип компактности для суммы мер специального вида

Перейдем к исследованию принципа компактности для периодических структур, естественные меры которых можно представить в виде суммы мер специального вида. Для этой цели нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 3. *Пусть $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ и мера μ представима в виде суммы двух неотрицательных мер: $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Тогда (с точностью до выделения подпоследовательности) $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega, d\mu_{i\varepsilon})$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Так как последовательность u_ε ограничена в $L^p(\Omega, d\mu_{1\varepsilon})$ и $L^p(\Omega, d\mu_{2\varepsilon})$, то (с точностью до выделения подпоследовательности)

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_i \;\text{ в }\; L^p(\Omega, d\mu_{i\varepsilon}), \quad i = 1, 2.$$

Тогда $u = \mu_1(\square)u_1 + \mu_2(\square)u_2$ и по условию леммы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \int_\Omega |\mu_1(\square)u_1 + \mu_2(\square)u_2|^p dx. \tag{6}$$

С другой стороны, по свойству полунепрерывности (ii)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_{i\varepsilon} \geq \mu_i(\square) \int_\Omega |u_i|^p dx, \quad i = 1, 2,$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \sum_{i=1}^{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_{i\varepsilon} \geq \int_\Omega (\mu_1(\square)|u_1|^p + \mu_2(\square)|u_2|^p) dx. \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), получаем

$$\int_\Omega |\mu_1(\square)u_1 + \mu_2(\square)u_2|^p dx \geq \int_\Omega (\mu_1(\square)|u_1|^p + \mu_2(\square)|u_2|^p) dx.$$

Так как $\mu_1(\square) + \mu_2(\square) = 1$, то из последнего неравенства в силу строгой выпуклости функции $f(t) = |t|^p$ при $p > 1$ следует, что $u_1 = u_2 = u$ и утверждение леммы сразу вытекает из соотношения (6). □

С помощью леммы 3 докажем принцип компактности для суммы двух мер, "связанных" через общую меру.

Теорема 2. *Пусть мера μ представима в виде суммы двух неотрицательных мер: $\mu = \mu_1 + \mu_2$, где меры μ_1 и μ_2 связаны через общую неотрицательную меру: $\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_2 + \lambda_3$. Тогда из принципа компактности в $L^p(\Omega, d\mu_{1\varepsilon})$ и $L^p(\Omega, d\mu_{2\varepsilon})$ следует принцип компактности в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть дана последовательность u_ε, удовлетворяющая условию (1). Без ограничения общности можно считать, что $u_\varepsilon \to u_i$ в $L^p(\Omega, d\mu_{i\varepsilon})$, $i = 1, 2$. Тогда по лемме 3 $u_\varepsilon \to u_i$ в $L^p(\Omega, d\lambda_{2\varepsilon})$, $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $u_1 = u_2 = u$ и $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |u_\varepsilon|^p d\mu_{i\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3} \mu_i(\square) \int_\Omega |u|^p dx = \int_\Omega |u|^p dx,$$

поэтому $u_\varepsilon \to u$ в $L^p(\Omega, d\mu_\varepsilon)$, что и требовалось. □

Из теоремы 2 следует принцип компактности для следующих периодических структур:

(1) (канторовой) сетки, состоящей из объединения двух квадратных (канторовых) сеток, у одной из которых стержни параллельны сторонам квадрата $[0, 1]^2$, а у другой — его диагоналям;
(2) составной структуры, описываемой суммой плоской меры Лебега и меры, характеризующей предыдущую структуру;
(3) (канторовой) ящичной структуры, состоящей из объединения нескольких модельных (канторовых) ящичных структур, у одной из которых грани параллельных граням куба $[0, 1]^3$, а у других — его сечениям, проходящим через противоположные ребра;
(4) составной структуры, описываемой суммой пространственной меры Лебега и меры, характеризующей предыдущую структуру;
(5) составной структуры, описываемой суммой пространственной меры Лебега и естественных мер на ящичной структуре и лежащих на ее гранях канторовых сеток.

Список литературы

[1] В.В. Жиков, *Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах*, Известия РАН. Серия математическая, **66**: 2 (2002), 81–148.
[2] В.В. Шумилова, *О принципе компактности для периодических сингулярных и тонких структур*, Математические заметки, **79**: 6 (2006), 941–949.
[3] В.В. Жиков, *Связность и усреднение. Примеры фрактальной проводимости*, Математический сборник, **187**: 8 (1996), 3–40.
[4] В.В. Жиков, *Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости*, Математический сборник, **191**: 7 (2000), 31–72.

Владлена Валерьевна Шумилова
НОУ ВПО “Московский психолого-социальный институт”
филиал в г. Муроме Владимирской области,
ул. Куйбышева 2б,
602260, Муром, Россия
E-mail address: v.v.shumilova@mail.ru