S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 103–112 (2007) УДК 519.633
MSC 35B25

РЕГУЛЯРИЗОВАННАЯ АСИМПТОТИКА В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С УГЛОВЫМИ ПОГРАНСЛОЯМИ

А.С. ОМУРАЛИЕВ

Abstract. A regularized asymptotics of solution for singulary perturbed parabolic problem is built in domains with corner points as a boundary. The asymptotics of such problems includes both ordinary boundary layer functions as parabolic boundary layer functions and their products, which descreibe corner boundary layer.

Данная статья посвящена изучению задачи вида

$$L_\epsilon u \equiv \epsilon\partial_t u - \epsilon^2 a(x)\partial_x^2 u + b(t)u = f(x,t), (x,t) \in \Omega$$

$$(1) \qquad u|_{t=0} = h(x), u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad \Omega = \{(x,t) : x \in (0,1),\ t \in (0,T]\}$$

в которой при $\epsilon \to 0$ теряются начальное и граничные условия. Это приводит к возникновению пограничных слоев вдоль сторон $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$, кроме того пограничные слои возникают еще и в угловых точках $(0,0), (1,0)$.

Задача (1) изучается при следующих предположениях:

(1) функции $h(x),\ a(x),\ b(t),\ f(x,t)$ имеют в $\bar{\Omega}$ требуемое число производных по $x,\ t$;
(2) $\forall x \in [0,1]$ функция $a(x) > 0$;
(3) выполняются согласования начальных и граничных условий $h(0) = h(1) = 0$;
(4) функция $b(t) > 0 \ \ \forall t \in [0,T]$.

Omuraliev, A.S., The regularized asymptotics in the singularly perturbed parabolic problem with angular boundary layers.

Поступила 24 мая 2005г., опубликована 9 апреля 2007 г.

Такие задачи, с позиции метода угловых пограничных функций, впервые изучены в работах Бутузова В.Ф. [1]. Этим же методом изучены многие классы задач не только для параболических, но и для других типов уравнений с частными производными [2] . Построенная им асимптотика содержит как обыкновенные погранслойные функции, описывающие пограничные слои вдоль $x = 0$, $x = 1$, $t = 0$ и определяемые из обыкновенных дифференциальных уравнений, так и угловые погранслойные функции [1]. Изучаемая в данной статье задача, как и задача изученная в [4] была поставлена С.А. Ломовым в [3]. До сих пор оставался открытым вопрос о возможности применения метода регуляризации для сингулярно возмущенных задач [3] к задачам с угловыми пограничными слоями. В работе [4] построена регуляризованная асимптотика [3] решения краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения при отсутствии спектра предельного оператора. Здесь также строится регуляризованная асимптотика решения задачи (1), которая содержит функции обыкновенного, параболических [5] и угловых пограничных слоев. В отличии от работы [1], нами построена регуляризованная асимптотика [3] и она содержит функций параболических, а не обыкновенных, пограничных слоев вдоль границ $x = 0$ и $x = 1$.

П.1. Регуляризация задачи. Следуя методу регуляризации [3], для регуляризации задачи (1) вводятся четыре типа регуляризующих переменных

$$\tau_1 = \frac{t}{\epsilon^2}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\epsilon}\int_0^x b(s)ds \equiv \frac{1}{\epsilon}\psi(t),$$

$$\zeta_j = \frac{1}{\epsilon}(-1)^{j-1}\int_{j-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} \quad \equiv \quad \frac{1}{\epsilon}\varphi_j(x),$$

$$\xi_j = \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}\varphi_j(x), \quad \varphi_j(j-1) = 0, j = 1, 2. \tag{2}$$

В соответствии с методом регуляризации, вместо искомого решения $u(x,t,\epsilon)$ будем изучать расширенную функцию В $\tilde{u}(x,t,\zeta,\xi,\tau,\epsilon)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$, $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2)$, $\tau = (\tau_1,\tau_2)$ такую, что ее сужение совпадает с искомым решением

$$\tilde{u}(M,\epsilon)|_{q=q(x,t,\epsilon)} \equiv u(x,t,\epsilon), \tag{3}$$

$$q(x,t,\epsilon) = (\frac{1}{\epsilon}\varphi(x), \frac{1}{\epsilon^{\frac{3}{2}}}\varphi_(x), \frac{t}{\epsilon^2}, \frac{\psi(t)}{\epsilon}),$$

$$q = (\zeta,\xi,\tau), \qquad M = (x,t,q).$$

Используя (2), из (3) найдем производные, далее, на основании (1),(3), для расширенной функции $\tilde{u}(M,\epsilon)$, поставим задачу

$$\tilde{L_\epsilon}\tilde{u} \equiv \frac{1}{\epsilon}T_1\tilde{u} + D_\tau\tilde{u} - \sqrt{\epsilon}L_\xi\tilde{u} + \epsilon T_2\tilde{u} - \epsilon\sqrt{\epsilon}L_\zeta\tilde{u} - \epsilon L_x\tilde{u} = f(x,t), \ M \in Q,$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau_j=0} = h(x), \tilde{u}|_{x=j-1,\xi_j=0,\zeta_j=0} = 0, \qquad j = 1, 2, \tag{4}$$

$$D_\tau \equiv b(t)[\partial_{\tau_2} + 1], \qquad L_\xi \equiv a(x)\sum_{j=1}^{2} L_{\xi_j},$$

$$L_{\xi_j} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\partial^2_{x,\xi_j} + \varphi_j^{''}(x)\partial_{\xi_j}, \qquad T_1 \equiv \partial_{\tau_1} - D_\xi, \qquad D_\xi \equiv \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\xi_j},$$

$$T_2 \equiv \partial t - D_\zeta, \quad D_\zeta \equiv \sum_{j=1}^{2} \partial^2_{\zeta_j}, \quad L_\zeta \equiv a(x) \sum_{j=1}^{2} L_{\zeta_j},$$

$$L_{\zeta_j} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\partial^2_{x,\zeta_j} + \varphi_j^{''}(x)\partial_{\zeta_j}, \qquad L_x \equiv a(x)\partial^2_x,$$

$$Q = \{M : (x,t) \in \Omega, \xi > 0, \zeta > 0, \tau > 0\}.$$

П.2. Итерационные задачи. Задача (4) регулярна по $\epsilon \to 0$ так, что [3]:

$$\tilde{L_\epsilon} \tilde{u}|_{q=q(x,t,\epsilon)} \equiv L_\epsilon u, \tag{5}$$

поэтому ее решение ищем в виде разложения

$$\tilde{u}(M,\epsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{\frac{i}{2}} u_i(M). \tag{6}$$

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ϵ получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_l(M) = 0, \quad l = 0,1, \quad u_0|_{t=\tau=0} = h(x), \quad u_0|_{x=j-1,\xi_j=\zeta_j=0} = 0,$$

$$T_1 u_2 = f(x,t) + D_\tau u_0,$$

$$T_1 u_i = -D_\tau u_{i-2} + L_\xi u_{i-3} - T_2 u_{i-4} + L_\zeta u_{i-5} + L_x u_{i-6},$$

$$u_i|_{t=\tau=0} = 0, \quad u_i|_{x=j-1,\xi_j=\zeta_j=0} = 0, \quad j = 1,2, \quad i = 1,2,\ldots \tag{7}$$

Введем класс функций в котором будут решаться итерационные задачи (7). Решение таких задач содержат регулярный член, обыкновенную погранслойную функцию, описывающую пограничный слой вдоль $t = 0$, функций параболических пограничных слоев вдоль границ $x = 0$ и $x = 1$, а также функций угловых пограничных слоев определямые, как произведение функций обыкновенного и параболического пограничных слоев :

$$U = \{u(M) : u(M) = v(x,t) + c(x,t)exp(-\tau_2) +$$

$$\sum_{j=1}^{2} [z_j(x,t) erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) exp(-\tau_2) + u_j(N_j)],$$

$$N_j = (x,t,\xi_j,\tau_1), \; z_j(x,t), \; c(x,t), \; v(x,t) \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$|u_j(N_j)| < cexp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}), \quad j = 1,2\}, \; erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp{(-s^2)} ds.$$

П.3. Алгоритм построения решения итерационных задач. Последовательно решая итерационные задачи (7) определим коэффициенты разложения (6). Итерационные уравнения (7) с индексами $i = 0,1$ в классе U имеют решения, представимые в виде:

$$u_l(M) = v_l(x,t) + c_l(x,t)exp(-\tau_2) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} [z_{l,j}(x,t) erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) exp(-\tau_2) + u_{l,j}(N_j)], \quad l = 0,1. \tag{8}$$

Удовлетворим эти функции краевым условиям из (7), тогда для функций входящих в (8), получим следующие соотношения:

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0), \quad c_1(x,t)|_{t=0} = -v_1(x,0), \quad z_{l,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{l,j}(x),$$

$$u_{l,j}(N_j)|_{t=\tau_1=0} = 0, \quad u_{l,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{l,j}(x,t), \quad d_{l,j}(x,t)|_{x=e-1} = -v_l(e-1,t),$$

$$z^0_{l,j}(x)|_{x=e-1} = -c_l(e-1,t), \quad l=0,1, \quad e=1,2. \tag{9}$$

Отметим, что при $t = 0$ функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ обращается в нуль по экспоненциальному закону, поэтому начальное условие удовлетворяется функцией (8) при любых произвольных $z_{l,j}(x,t)$. За счет чего мы получили произвол в выборе начального условия для функции $z_{l,j}(x,t)$ и это условие нами выбраны в виде $z_{l,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{l,j}(x)$, где $z^0_{l,j}(x)$-произвольная функция.

Подставим функцию (8) в уравнение (7) для номеров $l = 0,1$, имеем

$$T_1\{v_l(x,t) + c_l(x,t)exp(-\tau_2)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{l,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{l,j}(N_j)]\} \equiv \sum_{j=1}^{2} T_{1,j}u_{l,j}(N_j) = 0,$$
$$T_{1,j} \equiv \partial_{\tau_1} - \partial^2_{\xi_j}, \quad l=0,1, \quad j=1,2.$$

Отсюда вытекает, что (8) будет решением уравнения ($7,i = 0,1$), если функция $u_{l,j}(N_j)$ будет выбрана, как решение уравнения $T_{l,j}u_{l,j}(N_j) = 0, \quad l = 0,1, \quad j = 1,2$. Решение этого уравнения при краевых условиях из (9), можно записать в виде

$$u_{l,j}(N_j) = d_{l,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}),$$

здесь $d_{l,j}(x,t)$ — пока произвольная гладкая функция. На основании того, что

$$\int_x^\infty exp(-s^2)ds = \int_x^\infty exp(-\frac{s^2}{2})exp(-\frac{s^2}{2})ds \leq$$

$$\leq exp(-\frac{x^2}{2})\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\frac{s^2}{2})ds < cexp(-\frac{x^2}{2}), \tag{10}$$

для этой функции получим оценку

$$|u_{l,j}(N_j)| < cexp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}).$$

В следующем ($i = 2$) шаге уравнение (7) неоднородное и его правая часть, с учетом (8), запишется

$$F_2(M) = f(x,t) - D_\tau u_0(M) = f(x,t)-$$
$$-b(t)[v_0(x,t) + \sum_{j=1}^{2} d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})].$$

Наличие в правой части выражения $f(x,t) - b(t)v_0(x,t)$ выведет решение уравнения (7) из класса U, так как присутствие такого выражения приведет к появлению в выражении для функции $u_{2,j}(N_j)$ регулярного слагаемого, т.е.она не будет погранслойной функцией. Поэтому обеспечивая разрешимости этого уравнения в классе U мы должны избавиться от такого члена. В силу произвольности функции $v_0(x,t)$ выбрем ее, как решение уравнения $b(t)v_0(x,t) = f(x,t)$, тогда уравнение (7) при $i = 2$ примет вид

$$T_1 u_2(M) = -b(t)\sum_{j=1}^{2} d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Это уравнение разрешимо в классе U и его решение представимо в виде

$$u_2(M) = v_2(x,t) + c_2(x,t)exp(-\tau_2)+$$

$$\sum_{j=1}^{2}[z_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{2,j}(N_j)],$$

если функция $u_{2,j}(N_j)$ будет решением уравнения

$$T_{1,j}u_{2,j}(N_j) = -b(t)d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})$$

Решением этого уравнения, при краевых условиях полученных из следующих соотношений:

$$u_{2,j}(N_j)|_{t=\tau_1=0} = 0, \quad u_{2,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{2,j}(x,t),$$

$$d_{2,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_2(j-1,t), \quad z_{2,j}(x,t)|_{t=0} = z^0_{2,j}(x),$$

$$z^0_{2,j}(x)|_{x=j-1} = -c_2(j-1,t), c_2(x,t)|_{t=0} = -v_2(x,0), \quad j = 1,2,$$

будет функция

$$u_{2,j}(N_j) = d_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) + b(t)d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1),$$

$$I_{3,j}(\xi_j,\tau_1) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\infty}\frac{erfc(\frac{y}{2\sqrt{s}})}{\sqrt{\tau_1 - s}}[exp(-\frac{(\xi_j-y)^2}{4(\tau_1-s)})-$$

$$-exp(-\frac{(\xi_j+y)^2}{4(\tau_1-s)})]dyds.$$

Для интеграла $I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)$ можно установить оценку

(11) $$|I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)| < c\ exp(-\frac{\xi_j}{8\tau_1}),$$

тогда, на основании (10), для функции $u_{2,j}(N_j)$ получим оценку

$$|u_{2,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j}{8\tau_1}).$$

Рассмотрим правую часть следующего итерационного уравнения при $i = 3:$

$$F_3(M) = L_\xi u_0(M) - D_\tau u_1(M) =$$

$$= a(x)\sum_{j=1}^{2} D_{x,j}d_{0,j}(x,t)\partial_{\xi_j}(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})) - b(t)v_1(x,t)-$$

$$-b(t)\sum_{j=1}^{2} d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}), \quad D_{x,j} \equiv 2\varphi_j^{'}(x)\frac{d}{dx} + \varphi_j^{''}(x).$$

Члены, содержащие производную по ξ_j приведут к появлению в решении уравнения (7) секулярных членов, причем особенности этих членов будут расти ростом номера итерации, т.е. выведет решение из класса U. Поэтому, выбирая функцию $d_{0,j}(x,t)$, как решения задачи

$$D_{x,j}d_{0,j}(x,t) = 0, \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t),$$

избавляемся от такого члена. Кроме этого, присутствие члена $b(t)v_1(x,t)$ в правой части уравнения (7) при $i = 3$, также выведет решение из класса U, поэтому функцию $v_1(x,t)$ выберем равным нулю.

После таких процедур уравнение (7) при $i = 3$ запишется

$$T_1 u_3(M) = F_3(M), \qquad F_3(M) = -b(t)\sum_{j=1}^{2} d_{1,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

Это уравнение разрешимо в U и его решение можно представить в виде (8) с заменой индекса l на 3.

Вычислим свободный член следующего ($i = 4$) итерационного уравнения (7), имеем

$$F_4(M) = a(x)\sum_{j=1}^{2} D_{x,j}d_{1,j}(x,t)\partial_{\xi_j}(erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}))-$$
$$-b(t)v_2(x,t) - b(t)\sum_{j=1}^{2}[d_{2,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})+$$
$$-d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)] - -\partial_t v_0(x,t) - \partial_t c_0(x,t)exp(-\tau_2)-$$
$$-\sum_{j=1}^{2}[\partial_t d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}) - -\partial_t z_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})].$$

Обеспечивая разрешимость в U уравнения (7) с такой правой частью, произведем приравнивания к нулю отдельных его членов:

$$D_{x,j}d_{1,j}(x,t) = 0, \quad b(t)v_2(x,t) + \partial_t v_0(x,t) = 0,$$
$$\partial_t c_0(x,t) = 0, \qquad \partial_t z_{0,j}(x,t) = 0, \quad j = 1,2.$$

Первое уравнение, на основании того, что $v_1(x,t) \equiv 0$, имеет нулевое начальное условие $d_{1,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_1(j-1,t) = 0$, поэтому оно, как однородное уравнение, имеет тривиальное решение $d_{1,j}(x,t) = 0$, а следовательно, и $u_{1,j}(N_j) \equiv 0$. Из остальных уравнений определяем

$$v_2(x,t) = -b^{-1}(t)\partial_t v_0(x,t), \qquad c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0),$$
$$z_{0,j}(x,t) = z^0_{0,j}(x).$$

После таких действий правая часть $F_4(M)$ перепишется

$$F_4(M) = -\sum_{j=1}^{2}\{[b(t)d_{2,j}(x,t) + \partial_t d_{0,j}(x,t)]erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})+$$
$$+b^2(t)d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)\}.$$

Уравнение с такой правой частью разрешимо в классе U и его решение представимо в виде

$$u_4(M) = v_4(x,t) + c_4(x,t)exp(-\tau_2)+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{4,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{4,j}(N_j)],$$

если функция $u_{4,j}(N_j)$ является решением уравнения:

$$T_{1,j}u_{4,j}(N_j) = -[b(t)d_{2,j}(x,t) + \partial_t d_{0,j}(x,t)]erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})-$$

$$-b^2(t)d_{0,j}(x,t)I_{3,j}(\xi_j,\tau_1).$$

Правая часть $F_5(M)$ следующего итерационного уравнения по отношению к $F_4(M)$ дополнительно содержить слагаемое $L_\zeta u_0(M)$. Это слагаемое, также как и выражение $L_\xi u_0(M)$, приведет к появлению в решении секулярных членов. Поэтому мы должны избавиться от такого члена за счет выбора произвольной функции $z^0_{0,j}(x)$. Вычислим

$$L_\zeta u_0 = \sum_{j=1}^{2} D_{x,j}z_{0,j}(x,t)\partial_{\zeta_j}erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$$

и, выбирая $z_{0,j}(x,t)$, как решение задачи

$$D_{x,j}z_{0,j}(x,t) = 0, \qquad z_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t), \qquad j = 1,2$$

уничтожаем слагаемое $L_\zeta u_0(M)$. Так как $z_{0,j}(x,t) = z^0_{0,j}(x)$, то предыдущие соотношения обеспечиваются выбором $z^0_{0,j}(x)$, как решения задачи

$$D_{x,j}z^0_{0,j}(x) = 0, \qquad z^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t), \qquad j = 1,2.$$

Таким образом мы полностью определили главный член асимптотики.

Как мы увидели выше решение $u_{i,j}(N_j)$ содержит функцию $erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}})$ и интеграл $I_{3,j}(\xi_j,\tau_1)$, причем они имеют оценки вида (10) и (11), поэтому для нее справедлива оценка:

$$|u_{i,j}(N_j)| < c\ exp(-\frac{\xi_j^2}{8\tau_1}).$$

Для функций $z_{i,j}(x,t)exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$, $j = 1,2$, описывающие угловые пограничные слои в точках $(0,0)$, $(0,1)$, справедлива оценка

$$|z_{i,j}(x,t)exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})| < c\ exp(-\tau_2 - \frac{\zeta_j^2}{8t}). \tag{12}$$

Далее повторяя вышеописанный процесс, методом индукции можем определить все коэффициенты разложения (6), причем коэффициенты с нечетными индексами обратятся в нуль. Из процесса построения и полученных для функций $u_{i,j}(N_j)$, $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ оценок замечаем, что они являются функциями параболического програничного слоя. Функция $erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})$ совместно с сомножителем $exp(-\tau_2)$ описывает угловой пограничный слой и для этого произведения справедлива оценка функции углового пограничного слоя (12).

П.4. Оценка остаточного члена. Произведем в частичной сумме

$$u_{\epsilon,n}(M) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \{v_{2i}(x,t) + c_{2i}(,t)exp(-\tau_2)+$$

$$\sum_{j=1}^{2}[z_{2i,j}(x,t)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}})exp(-\tau_2) + u_{2i,j}(N_j)]\}$$

построенной вышеописанным способом, сужение посредством регуляризующих функций (2):

$$u_{\epsilon,n}(x,t,q(x,t,\epsilon)) = \sum_{i=0}^{n} \epsilon^i \{v_{2i}(x,t) + c_{2i}(x,t)exp(-\frac{\psi(t)}{\epsilon}) +$$

$$\sum_{j=1}^{2}[z_{i,j}(x,t)exp(-\frac{\psi(t)}{\epsilon})erfc(\frac{\varphi_j(x)}{2\epsilon\sqrt{t}}) + u_{i,j}(x,t,\frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{\epsilon^3}},\frac{t}{\epsilon^2})]\}$$

получим асимптотику решения исходной задачи (1). Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия 1)-4). Тогда для достаточно малых* $\epsilon \to 0$ *в прямоугольнике* $\bar{\Omega}$ *имеет место следующая оценка:*

$$\|u(x,t,\epsilon) - u_{\epsilon,n}(x,t,q(x,t,\epsilon))\|_C < M\epsilon^{n+1}$$

$\forall n = 0,1,2,\ldots,$ *т.е. частичная сумма после сужения является асимптотическим решением задачи (1) при* $\epsilon \to 0$.

Доказательство вытекает из теоремы 2.1 работы [6].

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу

$$\epsilon\partial_t u(x,t,\epsilon) = \epsilon^2(1+x)^2\partial_x^2 u(x,t,\epsilon) - (1+3t^2)u + t^2 + x^2, \quad (x,t) \in \Omega,$$

$$u|_{t=0} = h(x), \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

Для нее вводим следующие регуляризующие переменные

$$\tau_1 = \frac{t}{\epsilon^2},\ \tau_2 = \frac{t+t^3}{\epsilon}, \quad \xi_j = \frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{\epsilon^3}}, \quad \zeta_j = \frac{\varphi_j(x)}{\epsilon},$$

$$\varphi_j(x) = (-1)^{j-1}\ln(\frac{1+x}{j}), \quad j = 1,2.$$

Коэффициент $u_0(M)$ разложения (6) при нулевой степени малого параметра должен удовлетворять уравнению

$$\partial_{\tau_1} u_0(M) - \sum_{j=1}^{2} \partial_{\xi_j}^2 u_0(M) = 0.$$

Это уравнение в классе U имеет решение, представимое в виде

$$u_0(M) = v_0(x,t) + c_0(x,t)exp(-\tau_2) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[z_{0,j}(x,t)\exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) + u_{0,j}(N_j)],$$

если функция $u_{0,j}(N_j)$ будет решением уравнения

$$\partial_{\tau_1} u_{0,j}(N_j) - \partial_{\xi_j}^2 u_{0,j}(N_j) = 0, \quad j = 1,2.$$

Краевые условия свяжутся соотношениями

$$c_0(x,t)|_{t=0} = h(x) - v_0(x,0), \quad z_{0,j}(x,t)|_{t=0} = z_{0,j}^0(x),$$

$$u_{0,j}(N_j)|_{t=0} = 0, \quad z_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -c_0(j-1,t),$$

$$u_{0,j}(N_j)|_{\xi_j=0} = d_{0,j}(x,t), \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -v_0(j-1,t)$$

Уравнения для определения функций $v_0(x,t),\ c_0(x,t),\ z_{0,j}(x,t)$ запишутся

$$(1+3t^2)v_0(x,t) = t^2 + x^2, \quad \partial_t c_0(x,t) = 0, \quad \partial_t z_{0,j}(x,t) = 0.$$

Отсюда и из уравнения относительно функции $u_{0,j}(N_j)$ при соответствующих начальных и краевых условиях найдем

$$v_0(x,t) = \frac{t^2+x^2}{1+3t^2}, \quad c_0(x,t) =, \quad z_{0,j}(x,t) = z^0_{0,j}(x),$$

$$u_{0,j}(N_j) = d_{0,j}(x,t)erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}).$$

В эти соотношения вошли произвольные функции $z^0_{0,j}(x)$, $d_{0,j}(x,t)$, они определяются из следующих задач:

$$\frac{dz^0_{0,j}(x)}{dx} - \frac{1}{2(1+x)}z^0_{0,j}(x) = 0, \quad z^0_{0,j}(x)|_{x=j-1} = -h(j-1)+(j-1)^2,$$

$$\partial_x d_{0,j}(x,t) - \frac{1}{2(1+x)}d_{0,j}(x,t) = 0, \quad d_{0,j}(x,t)|_{x=j-1} = -\frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}.$$

Решив эти задачи найдем

$$z^0_{0,j}(x) = (j-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{j}}, \quad d_{0,j}(x,t) = -\frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}\sqrt{\frac{1+x}{j}},$$

тогда, на основании полученных выражений, главный член асимптотики решения расширенной задачи запишется:

$$u_0(M) = \frac{t^2+x^2}{1+3t^2} + [h(x)-x^2]exp(-\tau_2)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[(j-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{j}}\exp(-\tau_2)erfc(\frac{\zeta_j}{2\sqrt{t}}) - \frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}\sqrt{\frac{1+x}{j}}erfc(\frac{\xi_j}{2\sqrt{\tau_1}}].$$

Производя здесь сужение посредством регуляризующих функций, получим главный член асимптотики решения исходной задачи:

$$u_0(x,t,q(x,t,\epsilon)) = \frac{t^2+x^2}{1+3t^2} + [h(x)-x^2]exp(-\frac{t+t^3}{\epsilon})+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}[(j-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{j}}exp(-\frac{t+t^3}{\epsilon})erfc(\frac{(-1)^{j-1}\ln(\frac{1+x}{j})}{2\epsilon\sqrt{t}})-$$

$$-\frac{(j-1)^2+t^2}{1+3t^2}\sqrt{\frac{1+x}{j}}erfc(\frac{(-1)^{j-1}\ln(\frac{1+x}{j})}{2\sqrt{\epsilon t}})].$$

Список литературы

[1] Бутузов В.Ф.*Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии,* ДАН СССР,1978, **242**:2, 268–271.

[2] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений,* Высшая школа, Москва, 1990.

[3] Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений,* Наука, Москва, 1981.

[4] Омуралиев А.С. *Регуляризованная асимпт. решения параболической задачи с двумя вязкими границами,* Наука и новые технологии, 1998, вып.4, 22–25.

[5] Исакова Е.К. *Асимптотическое разложение решения параболического уравнения с малым параметром,* Матем.сб.,69,вып.3,300–320.

[6] Ладыженская О.А. и др. *Линейные и квазилинейные уравнения параболическоги типа,* Наука, Москва, 1967.

Асан Сыдыгалиевич Омуралиев
Кыргызско-Турецкий университет "Манас
пр.Мира 56,
720044, г.Бишкек,Кыргызстан
E-mail address: asan@manas.kg