S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 4, стр. 1–11 (2007) УДК 519.14
MSC 05C25

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $b_1 \leq 5$

М.С. НИРОВА

Abstract. Regular graph of degree k on v vertices such that any edge is contained exactly in λ triangles is called edge-regular graph with parameters (v,k,λ). Edge-regular graph Γ such that $|\Gamma(u)\cap\Gamma(w)| = \mu$ for any two vertices u,w with $d(u,w)=2$ is called amply regular graph with parameters (v,k,λ). It is obtained the description of amply regular graphs with $k-\lambda-1\leq 5$.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1,...,m_n$. Если $m_1=\cdots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,3}$ называется 3-*лапой*. *Треугольным графом* $T(m)$

Nirova, M.S., On amply regular graphs with $b_1 \leq 5$.

Работа поддержана РФФИ (грант 05-01-00046).

Поступила 10 января 2007 г., опубликована 20 января 2007 г.

называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $m \times n$ *решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф Γ диаметра 3, в котором для любых двух вершин u, w с $d(u, w) = 3$ получим $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$. Графом Шлефли называется единственный сильно регулярный граф с параметрами (27,16,10,8). Граф Клейна — это единственный дистанционно регулярный локально семиугольный граф диаметра 3 на 24 вершинах, являющийся 3-накрытием 8-клики. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

Пусть Γ является реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ), $w, z \in \Gamma_2(u)$. Пару вершин (u, w) назовем *хорошей*, если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, назовем *почти хорошей*, если $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 2$. Тройку вершин $(u; w, z)$ назовем *хорошей*, если $\mu(u, w) + \mu(u, z) \leq 2k - 4b_1 + 3$, назовем *почти хорошей*, если $\mu(u, w) + \mu(u, z) = 2k - 4b_1 + 4$. При изучении реберно регулярных графов полезным является описание почти хороших троек. Следующий результат особенно полезен при изучении графов диаметра, большего 2.

Теорема 1. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), $b_1 = k - \lambda - 1$ и $k \geq 3b_1 - 3$. Если тройка $(u; w, z)$ является почти хорошей и $[w] \cap [z] - [u]$ содержит вершину y, несмежную с вершинами из $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$, то либо $|\Delta| \leq 2$, либо $|\Delta| = 3$ и $(b_1, k) \in \{(5, 12), (6, 15), (6, 17)$.*

Пример 1. Пусть Γ — треугольный граф $T(n)$, граф Клебша или граф Шлефли. Тогда Γ содержит почти хорошую тройку $(u; w, z)$ со смежными вершинами w, z, подграф Δ является δ-кликой, δ равно 2 в случае треугольного графа, равно 3 в случае графа Клебша и равно 4 в случае графа Шлефли. Но в любом случае кажда вершина из $[w] \cap [z] - [u]$ смежна с некоторой вершиной из Δ.

Пример 2. Пусть Γ — граф, в котором окрестность любой вершины является треугольным графом $T(n)$. Тогда каждый μ-подграф из Γ является объединением изолированных октаэдров, $k = n(n-1)/2, b_1 = (n-2)(n-3)/2$ и $k - 2b_1 + 2 = (9n - n^2 - 8)/2$. Поэтому Γ содержит почти хорошую тройку лишь в случаях $n = 4$ ($\Gamma = K_{4\times 2}$) и $n = 5$ (Γ — граф Клебша).

Теорема 2. *Пусть Γ — связный вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и $b_1 \leq 5$. Тогда либо Γ является полным многодольным графом $K_{n\times(b_1+1)}$, либо регулярным графом без треугольников степени $b_1 + 1$, либо реберным графом регуляного графа без треугольников степени $b_1 + 1$, имеющего обхват, больший 4, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $b_1 = 2$ и Γ является 3×3-решеткой, треугольным графом $T(5)$, графом Петерсена или графом икосаэдра;

(2) $b_1 = 3$ и Γ является локально шестиугольным графом, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша;

(3) $b_1 = 4$ *и либо*

(i) *диаметр* Γ *равен* 2 *и* Γ *является графом Пэли с параметрами* $(17, 8, 3, 4)$, 5×5 *решеткой, треугольным графом* $T(7)$ *или дополнительным графом к* 4×4 *решетке, треугольному графу* $T(6)$ *или графу Клебша, либо*

(ii) $\mu = 1$ *и* Γ *является вполне регулярным графом с параметрами* $(v, 6, 1, 1)$, *либо*

(iii) $\mu = 2$ *и* Γ *является графом Клейна,* 5*-кубом, графом инцидентности симметричной* 2-$(11, 5, 2)$ *схемы или единственным вполне регулярным графом с параметрами* $(20, 6, 1, 2)$, *либо*

(iv) $\mu = 4$ *и* Γ *является графом Джонсона* $J(6, 3)$;

(5) $b_1 = 5$ *и либо*

(i) *диаметр* Γ *равен* 2 *и* Γ *является* 6×6 *решеткой, графом Шлефли, треугольным графом* $T(8)$ *или одним из трех графов Чанга, либо*

(ii) $\mu = 2$ *и* Γ *является либо* 6*-валентным ректаграфом, либо локально восьмиугольным графом диаметра, не большего* 4.

Пример. Пусть Γ — граф, вершинами которого являются 3-циклы из симметрической группы S_5, причем две вершины a, b смежны, если ab является инволюцией. Тогда Γ является вполне регулярным графом с параметрами $(20, 6, 1, 2)$.

2. Предварительные результаты

В этом параграфе доказано несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *реберно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ) *и* $b_1 = k - \lambda - 1$. *Если вершины* u, w *находятся на расстоянии* 2 *в* Γ, *то выполняются следующие утверждения:*

(1) *степень любой вершины в* μ*-подграфе из* Γ *не меньше* $k - 2b_1$;

(2) *вершина* d *имеет степень* α *в графе* $[u] \cap [w]$, *тогда и только тогда, когда* $[d]$ *содержит точно* $\alpha - (k - 2b_1)$ *вершин вне* $u^\perp \cup w^\perp$;

(3) *если* $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, *то подграф* $[u] \cap [w]$ *является кликой и* $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ *для любой вершины* $d \in [u] \cap [w]$;

(4) *если* $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$ *содержит единственную вершину* z, *то* $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

Доказательство. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержится в $[u] \cap [w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ-подграфе равна α. Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (1), (2).

Пусть $\{z\} = \Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Так как число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$. Лемма доказана.

Ввиду этой леммы μ-подграф, отвечающий хорошей паре, является кликой.

Лемма 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v,k,λ,μ). Тогда либо $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ и кратность $-m$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [3].

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем (теорема 3.12.4 [4]). Любой зейделев граф — это либо полный многодольный граф $K_{r\times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

Лемма 3. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения, и $b_1=k-\lambda-1$. Тогда*

(1) *если b_1 — простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r\times(b_1+1)}$ или зейделевым графом;*

(2) *если $b_1=2p$, p — простое число, то Γ либо является полным многодольным графом, либо имеет собственное значение -2 или -3, либо является дополнительным к зейделеву графу;*

(3) *если $b_1=4$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r\times 5}$, 5×5 решеткой, треугольным графом $T(7)$ или дополнительным графом к 4×4 решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша (заметим, что в половинном случае параметры графа равны $(17,8,3,4)$ и он является графом Пэли).*

Доказательство. Это предложение 2 из [5].

Лемма 4. *Пусть Γ — реберно регулярный граф, $\mu(u,w)=k-2b_1+1$ и $\mu(u,z)\le k-2b_1+2$ для некоторых вершин w,z из $\Gamma_2(u)$. Тогда $|[u]\cap[w]\cap[z]|<2$.*

Доказательство. Утверждение следует из лемм 4, 5 [6].

Лемма 5. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с $k\ge 3b_1-3$, $\mu(u,w)+\mu(u,z)=2k-4b_1+4$ для двух вершин w,z из $\Gamma_2(u)$, $\Delta=[u]\cap[w]\cap[z]$ и $\delta=|\Delta|$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *вершины w,z несмежны и $\delta\le 1$;*

(2) *Δ содержит две несмежные вершины и $\delta\le 2$;*

(3) *вершины w,z смежны, Δ является кликой и если $\delta>1$, то либо*

(i) *подграф Δ содержит единственную вершину d, смежную с вершиной вне $u^\perp\cup[w]\cup[z]$, $\delta=2$ и для $e\in\Delta(d)$ подграф $[d]\cup[e]$ содержит Δ, а $[d]\cap[e]$ содержится в $\{u,w,z\}\cup([u]\cap([w]\cup[z]))\cup([w]\cap[z]-[u])$, либо*

(ii) *подграф Δ не содержит вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp\cup[w]\cup[z]$, и для любых двух вершин $d,e\in\Delta$ подграф $[d]\cap[e]$ содержит $\lambda-1+\gamma$ вершин из $\{u,w,z\}\cup([u]\cap([w]\cup[z]))\cup([w]\cap[z]-[u])$, где $\gamma=|[w]\cap[z]-([d]\cup[e])|$.*

Доказательство. Если либо вершины w, z несмежны, либо Δ содержит две несмежные вершины, либо подграф Δ содержит вершину, смежную с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$, то лемма следует из теоремы 1 [7]. Поэтому можно считать, что вершины w, z смежны, Δ является кликой, не содержащей вершин, смежных с вершиной вне $u^\perp \cup [w] \cup [z]$.

Скажем, что вершина d из $[u] \cap [w] \cap [z]$ имеет тип (j), если $[d]$ содержит j вершин из $([w] - [u] \cup [z]) \cup ([z] - [u] \cup [w])$. Ясно, что $0 \leq j \leq 2$. Если $\mu(u, w) \neq \mu(u, z)$, то без ограничения общности, $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, $\mu(u, z) = k - 2b_1 + 3$.

Покажем, что для любых двух вершин $d, e \in \Delta$ подграф $[d] \cap [e]$ содержит $\lambda - 1 + \gamma$ вершин из $\{u, w, z\} \cup ([u] \cap ([w] \cup [z])) \cup ([w] \cap [z] - [u])$, где $\gamma = |[w] \cap [z] - ([d] \cup [e])|$. Доказательство проводится рассмотрением всех возможных случаев. Мы подробно рассмотрим два случая.

Пусть $\mu(u, w) = k - 2b_1 + 1$, $\mu(u, z) = k - 2b_1 + 3$ и вершины d, e типа (1). Тогда $[d] \cap [e]$ содержит u, w, z, $k - 2b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, $k - 2b_1 + 1 - \delta$ вершин из $[u] \cap [z] - [w]$ и не менее $2b_1 - 6 - (k - b_1 - 1 - \delta - \gamma)$ вершин из $[w] \cap [z] - [u]$. Итого, $k - b_1 - 2 + \gamma$ вершин.

Пусть $\mu(u, w) = \mu(u, z) = k - 2b_1 + 2$, вершина d типа (1) (для определенности $[d]$ содержит вершину из $[w] - [u] \cup [z]$), а e типа (2). Тогда $[d] \cap [e]$ содержит u, w, z, $k - 2b_1 - 1$ вершин из $[u] \cap [w]$, $k - 2b_1 + 2 - \delta$ вершин из $[u] \cap [z] - [w]$ и не менее $2b_1 - 7 - (k - b_1 - 1 - \delta - \gamma)$ вершин из $[w] \cap [z] - [u]$. Итого, $k - b_1 - 2 + \gamma$ вершин. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, являющийся антиподальным r-накрытием n-клики. Тогда $n - 2 - \lambda = (r - 1)\mu$ и Γ имеет новые собственные значения θ и τ, являющиеся корнями квадратного уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - (n - 1)$, и кратность θ равна $m_\theta = n(n - 1)(r - 1)/(n - 1 + \theta^2)$.*

Доказательство. См. [4, следствие 4.2.6].

Лемма 7. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $k \geq 3b_1$. Тогда диаметр Γ не больше 2.*

Доказательство. Это лемма 1.4.2 из [4].

Лемма 8. *Пусть Γ — связный граф, в котором $[u] \cap [w]$ является 2-кокликой для любых двух вершин u, w, находящихся на расстоянии 2. Тогда граф Γ регулярен.*

Доказательство. Пусть a, b — смежные вершины из Γ. Положим $A = [a] - b^\perp$, $B = [b] - a^\perp$. Для любой вершины $x \in A$ подграф $[x] \cap [b]$ содержит a и единственную вершину x' из B. Обратно, $[x'] \cap [a]$ содержит b и единственную вершину x из A. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между A и B. Отсюда $k_a = 1 + \lambda(a, b) + |A| = 1 + \lambda(a, b) + |B| = k_b$. Ввиду связности графа получим, что Γ является регулярным графом степени k. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

В этом параграфе Γ — реберно регулярный граф с $k \geq 3b_1 - 3$, $\mu(u,w) + \mu(u,z) = 2k - 4b_1 + 4$ для смежных вершин w, z из $\Gamma_2(u)$, подграф $\Delta = [u] \cap [w] \cap [z]$ является δ-кликой, $\delta > 0$ и $[w] \cap [z]$ содержит вершину y, несмежную ни с одной вершиной из Δ. Для определенности можно считать, что $\mu(u,z) \leq \mu(u,w)$. Если $x \in \Delta$, то через β_x (через β'_x) обозначим число вершин из $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$ (из $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$, смежных с x.

Лемма 9. *Если $\delta \geq 2$, то верно нестрогое неравенство $\delta \leq k - 2b_1 + 1$, причем в случае равенства выполняется одно из утверждений:*

(1) *$b_1 = 4$, $k = 9$ и $\delta = 2$;*

(2) *$b_1 = 5$, $k = 12$, $\delta = 3$ и Δ содержит ровно две вершины x с $\beta_x + \beta'_x = 2$.*

Доказательство. Если $a \in \Delta$, то $[a]$ содержит $k - 2b_1 + \beta_a$ вершин из $[u] \cap [w] - [z]$, β'_a вершин из $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ и $b_1 - 2 - \beta_a - \beta'_a$ вершин из $[w] \cap [z] - ([u] \cup \{y\})$.

Пусть $\delta = k - 2b_1 + 2$. Тогда $|[w] \cap [z] - ([u] \cup \{y\})| = b_1 - 4$. Поэтому $\beta_a = \beta'_a = 1$ для любой вершины a из Δ и $|[u] - ([w] \cup [z])| = 2b_1 - 2$. Ввиду леммы 1.5 для разных вершин $a, c \in \Delta$ подграф $[a] \cap ([u] - ([w] \cup [z]))$ не пересекает $[c]$, поэтому $(b_1 - 2)(k - 2b_1 + 2) \leq 2b_1 - 2$, $k \leq 2b_1 + 2/(b_1 - 2)$ и $b_1 \leq 4$. Так как $[w] \cap [z] - \Delta$ содержит вершину y, то $b_1 = 4$, $k = 9$, $\delta = k - 6 = 3$, подграф $[y]$ содержит по 3 вершины из $[w] - z^{\perp}$, $[z] - w^{\perp}$ и вершину x вне $w^{\perp} \cup z^{\perp}$.

Пусть вершина p из $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ смежна с вершиной q из Δ. Тогда $[p] \cap [q]$ содержит w, вершину r из $[q] \cap [z] - (w^{\perp} \cup [z])$ и обе вершины из $[u] \cap [q] - \Delta$. Симметрично, $[r] \cap [q]$ содержит обе вершины из $[u] \cap [q] - \Delta$.

Заметим, что если вершина из $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ несмежна с вершинами из Δ или несмежна с y, то ее степень в графе $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ равна 3. Поэтому можно считать, что $[y] \cap [q]$ содержит вершину p, имеющую степень 1 в графе $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$, и вершину r, имеющую степень 1 в графе $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$. Заменив тройку вершин $(u; w, z)$ на $(u; p, r)$, получим, что один из подграфов $[p] - ([u] \cup r^{\perp})$ или $[r] - ([u] \cup p^{\perp})$ не содержит вершину x. Без ограничения общности, $[p]$ содержит несмежную с r вершину o из $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$. Противоречие с тем, что $|[p] \cap [o]| < 4$.

Пусть $\delta = k - 2b_1 + 1$. Тогда $|[w] \cap [z] - ([u] \cup \{y\})| = b_1 - 3$, $|[u] - ([w] \cup [z])| = 2b_1 - 3$ и $\beta_x + \beta'_x \geq 1$ для любой вершины $x \in \Delta$. Если $b_1 = 3$, то $[w] \cup [z]$ содержит не менее 4 вершин из $[u]$ и $k \geq 7$. Но в случае $k = 7$ имеем $\lambda = 3$, противоречие с тем, что $k\lambda$ четно. Значит, $k = 8$ и $\delta = 3$. Для любых двух вершин a, c из Δ подграф $[a] \cap [c]$ содержит u, w, z и вершину из Δ. Поэтому $\beta_x + \beta'_x \geq 1$ для любой вершины $x \in \Delta$ и $\delta \geq 2$, противоречие. Итак, $b_1 > 3$.

Так как $\delta = k - 2b_1 + 1 \geq b_1 - 2$, то $\delta = 2$ влечет $b_1 = 4$, $k = 9$ и выполняется утверждение (1).

Пусть $\delta \geq 3$. Если Δ содержит две вершины a, c с $\beta_a + \beta'_a = \beta_c + \beta'_c = 1$, то $[a] \cap [c]$ содержит u, w, z и $\lambda - 3$ вершин из $[w] \cap [z]$. В этом случае $\beta_x + \beta'_x = 2$ для любой вершины $x \in \Delta - \{a, c\}$. Так как $2(b_1 - 2) + (b_1 - 3) \leq 2b_1 - 3$, то $b_1 \leq 4$, $k = 10$, $\delta = 3$. Но по предложению 3 из [5] граф Γ является полным многодольным или треугольным графом $T(7)$. В любом случае μ-подграфы из Γ не содержат 3-клик, противоречие.

Если окрестность каждой вершины из Δ содержит по вершине из $[w] - ([u] \cup z^{\perp})$ и из $[z] - ([u] \cup w^{\perp})$, то $3(b_1 - 3) \leq 2b_1 - 3$ и $b_1 \leq 6$. Если $b_1 = 6$, то

$2b_1-3=9$ и $k=14$, противоречие. Если же $b_1 \leq 5$, то некоторая вершина из $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$ несмежна с двумя вершинами a,c из Δ. Противоречие с леммой 1.5.

Итак, Δ содержит единственную вершину a с $\beta_a+\beta'_a=1$, $(b_1-2)+2(b_1-3)\leq 2b_1-3$, поэтому $b_1=5$, $k=12$ и $\delta=3$.

Лемма 10. *Если $\delta=k-2b_1\geq 3$, то $\delta=3$, $b_1=6$, $k=15$ и Δ содержит либо вершину a с $\beta_a+\beta'_a=0$ и ровно две вершины x с $\beta_x+\beta'_x=2$, либо вершину c с $\beta_c+\beta'_c=2$ и ровно две вершины x с $\beta_x+\beta'_x=1$.*

Доказательство. Пусть $\delta=k-2b_1\geq 3$. Тогда $|[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})|=b_1-2$ и $|[u]-([w]\cup[z])|=2b_1-4$.

Если $b_1=2$, то $k\geq 7$. Если $b_1=3$, то $k\geq 9$. Если $b_1=4$, то $k\geq 11$. В любом случае граф Γ является сильно регулярным с $\mu=k-2b_1+2$. Поэтому $b_1=3$ и Γ граф Клебша с параметрами (16,10,6,6). Однако, в графе Клебша каждая вершина из $[w]\cap[z]$ смежна с некоторой вершиной из Δ.

Если $b_1=5$, то $k\geq 13$. Но в случае $k=13$ получим $\lambda=7$, противоречие с тем, что тогда $k\lambda$ нечетно. Значит, $k\geq 14$ и $\delta\geq 4$.

Если Δ содержит вершину a с $\beta_a=\beta'_a=0$, то $[a]$ содержит b_1-2 вершин из $[u]-([w]\cup[z])$ и $b_1-2+2(b_1-4)\leq 2b_1-4$. В этом случае $b_1\leq 6$. Если $b_1=5$, то $k=14$ и Δ содержит 3 вершины x с $\beta_x+\beta'_x=2$. Так как каждая вершина из $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$ несмежна не более чем с одной вершиной из Δ, то $b_1=6$, $k=15$ и Δ содержит 2 вершины x с $\beta_x+\beta'_x=2$.

Допустим, что Δ не содержит вершин a с $\beta_a+\beta'_a=0$. Если Δ содержит 2 вершины a,c с $\beta_a+\beta'_a=\beta_c+\beta'_c=1$, то $2(b_1-3)+b_1-4\leq 2b_1-4$ и $b_1\leq 6$. Пусть a^* (c^*) — единственная вершина из $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$, несмежная с a (несмежная с c). Если $b_1=6$, то выполняется заключение леммы. Если же $b_1=5$, то $\delta\geq 4$ и для любой вершины x из Δ с $\beta_a+\beta'_a=2$ подграф $[x]$ содержит единственную вершину из $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$. Противоречие с тем, что одна из вершин a^*,c^* несмежна с x.

Пусть Δ содержит точно одну вершины c с $\beta_c+\beta'_c=1$, и c^* — единственная вершина из $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$, Тогда $b_1-3+(b_1-4)(\delta-1)\leq 2b_1-4$, $k\leq 2b_1+2+3/(b_1-4)$ и $b_1\leq 5+3/(b_1-4)$. Если $b_1=5$, то $\{c^*\}=[x]\cap[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$ для любой вершины $x\in\Delta-\{c\}$, противоречие с леммой 1.5. Если же $b_1=6$, то $k=15$ и для разных вершин d,e из Δ с $\beta_d+\beta'_d=\beta_e+\beta'_e=2$ подграф $[d]\cup[e]$ содержит $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$. В этом случае $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$ содержит 2 вершины d',d'', несмежные с d и 2 вершины e',e'', несмежные с e. Противоречие с тем, что вершина из $\{d',d''\}\cap\{e',e''\}$ несмежна ни с d, ни с e.

Лемма 11. *Если $\delta\geq 3$, то выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) $\delta=3, b_1=6$ *и* $k=17$*;*
(2) $\delta\geq k-2b_1$.

Доказательство. По лемме 1.5 подграф $[a]\cup[c]$ содержит Δ для любых двух вершин $a,c\in[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$.

Пусть $\delta=k-2b_1-i$. Тогда $|[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})|=b_1-2+i$ и каждая вершина из Δ несмежна по крайней мере с i вершинами из $[w]\cap[z]-([u]\cup\{y\})$. Поэтому $(k-2b_1-i)i\leq b_1-2+i$ и $(b_1-3-i)i\leq b_1-2+i$. Отсюда $i^2-i(b_1-4)+b_1-2\geq 0$ и дискриминант данного квадратного трехчлена равен $b_1^2-12b_1+24$. Поэтому либо $i < 1$, либо $i > (b_1-2+b_1-5)/2$. Но в последнем случае имеем $\delta i \le b_1-2+i$, $\delta \le 1+(b_1-2)/i \le 1+(b_1-2)/(b_1-4)$ и $b_1 \le 6$.

Пусть $3 \le \delta < k-2b_1$. Так как $\Gamma_2(u)$ содержит ребро, то Γ не является полным многодольным графом. Если $b_1 = 2$, то ввиду предложения 1 из [5] μ-подграфы из Γ не содержат 3-клик. Если $b_1 = 3$, то ввиду предложения 2 из [5] Γ — граф Клебша. Если $b_1 = 4$, то ввиду предложения 3 из [5] имеем $k \le 9$. Но в этом случае $k-2b_1+2 \le 3$, противоречие. Если $b_1 = 5$ и $k \ge 14$, то по теореме из [10] либо Γ — граф Шлефли или один из трех графов Чанга, либо одним из двух графов степени 14 на 24 вершинах. В случае графов Чанга имеем $k-2b_1+2 = 4$ и $\delta \ge k-2b_1$. Если $b_1 = 5, k = 14$ и $\mu(u,w) = 6$, то $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$ и $\mu(u,z) = 8$ для любой вершины $z \in \Gamma_2(u) - \{w\}$, противоречие.

Заметим, что в графах Клебша и Шлефли каждая вершина из $[w] \cap [z]$ смежна с некоторой вершиной из Δ.

Пусть $b_1 = 6$. Тогда $\delta = 3 = k-2b_1-2$, поэтому $k = 17$. Лемма доказана.

Из лемм, доказанных в §2, следует теорема 1.

4. Редукция к графам диаметра, большего 2 с $b_1 = 5$

Пусть до конца работы граф Γ удовлетворяет условиям теоремы 2. Если диаметр Γ равен 2, то по лемме 1.3 Γ — один из графов в заключении теоремы 2. Если $b_1 = 4$, то по [11] Γ — один из графов в заключении теоремы 2.

Лемма 12. *Пусть Γ — связный реберно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором $b_1 = 2$. Тогда Γ является тривалентным графом без треугольников, реберным графом тривалентного графа без треугольников или графом икосаэдра.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.7 имеем $k \le 5$. Если $k = 5$, то Γ является локально пятиугольным графом и совпадает с графом икосаэдра.

Если $k = 3$, то Γ является графом без треугольников. Если же $k = 4$, то $\lambda = 1$ и Γ является реберным графом тривалентного графа без треугольников.

Лемма 13. *Пусть Γ — связный ребно регулярный граф диаметра, большего 2, с $b_1 = 3$. Тогда Γ является одним из следующих графов:*

(1) *четырехвалентный граф без треугольников;*

(2) *реберный граф четырехвалентного графа без треугольников;*

(3) *локально шестиугольный граф.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.7 имеем $k \le 8$. Если k нечетно, то λ нечетно, противоречие с тем, что $k\lambda/2$ — это число ребер в Γ. Значит, k четно.

Если $k = 4$, то Γ является графом без треугольников. Если $k = 6$, то окрестность каждой вершины в Γ является шестиугольником или объединением двух треугольников.

Если окрестность некоторой вершины a в Γ является шестиугольником, то окрестность каждой вершины из $\Gamma(a)$ является шестиугольником и по связности графа Γ является локально шестиугольным графом.

Пусть $k = 8$. Тогда окрестность каждой вершины в Γ является регулярным графом степени 4 и $\mu = 2$ или 4. Ввиду леммы 1.1 имеем $\mu > 2$. Если $\mu = 4$, то по теореме 1.5.5 из [4] граф Γ является многоугольником или графом Тэйлора.

По теореме 1.5.3 из [4] окрестности вершин в Γ являются кокликами или сильно регулярными графами с параметрами (v', k', λ', μ') и $k' = 2\mu'$, противоречие. Лемма доказана.

5. Графы диаметра, большего 2, с $b_1 = 5$

В этом параграфе Γ – связный вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) диаметра, большего 2, и $b_1 = 5$. В этом случае $\mu \leq b_1$ и k четно.

Лемма 14. *Если $\mu = 5$, то $k = 6$ и Γ является полным двудольным графом $K_{7,7}$ с удаленным максимальным паросочетанием.*

Доказательство. Пусть $\mu = 5$. По теореме 1.5.5 из [4] граф Γ является многоугольником или графом Тэйлора. По теореме 1.5.3 из [4] окрестности вершин в Γ являются кокликами или сильно регулярными графами с параметрами (v', k', λ', μ') и $k' = 2\mu'$. В первом случае $k = 6$ и Γ является полным двудольным графом $K_{7,7}$ с удаленным максимальным паросочетанием. Во втором случае $k' = \lambda$ и $v' = k$. Если $\mu' = 2$, то $k' = 4$ и $v' = k = 9$. Противоречие с тем, что в этом случае $b_1 = 4$.

Если $\mu' = 3$, то $k' = 6$ и $k = 12$. В этом случае $15 = 6(k' - \lambda' - 1)$, противоречие. Если $\mu' = 4$, то $k' = 8$ и $k = 15$. В этом случае окрестность каждой вершины в Γ является треугольным графом $T(6)$. Противоречие с тем, что каждый μ-подграф в Γ должен быть 5-кликой.

Лемма 15. *Если $\mu = 4$, то диаметр Γ равен 2.*

Доказательство. Пусть $\mu = 4$. По прямоугольному соотношению k делится на 4. Если $k = 12$, то $\mu = k - 2b_1 + 2$ и ввиду следствия из [9] граф Γ является Зейделевым.

Пусть $k = 8$. Тогда $\lambda = 2$ и окрестность вершины в Γ является восьмиугольником или объединением двух четырехугольников. По теореме 1.9.3 из [4] вполне регулярный граф диаметра, не меньшего 4, с $k = 2\mu$ является многоугольником или графом Адамара, поэтому диаметр Γ равен 3.

Пусть $uwxy$ — геодезический путь в Γ. Тогда $|\Gamma_2(u)| = 10$. По предложению 1.9.1 из [4] имеем $c_3(u, y) \geq 5$. Если $c_3(u, y) = 5$, то $([u] \cap \Gamma_2(y)) \cup ([y] \cap \Gamma_2(u))$ является $K_{5,5}$-подграфом с удаленным максимальным паросочетанием. Противоречие с тем, что окрестность вершины в Γ не содержит 5-коклик. Если $c_3(u, y) = 6$, то $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит 2 вершины z_1, z_2 и $|[y] \cap [z_i] \cap \Gamma_2(u)| = 2$, противоречие с тем, что $[z_1] \cap [z_2]$ содержит y и не менее 4 вершин из $\Gamma_3(u) - [y]$. Если $c_3(u, y) = 7$, то $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит некоторую вершину z и $|[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)| \geq 3$, противоречие с тем, что $\lambda = 2$. Значит, $c_3(u, y) = 8$ и $|\Gamma_3(u)| = 1$. Противоречие с тем, что тогда $v = 19$ и $vk\lambda$ не делится на 6.

Лемма 16. *Если $\mu = 3$, то диаметр Γ равен 2.*

Доказательство. Пусть $\mu = 3$. По прямоугольному соотношению k делится на 3. Если $k = 12$, то $\mu = k - 2b_1 + 1$ и Γ является графом Тервиллигера без 3-лап. По теореме 1.2.3 из [4] либо $\mu = 1$, либо Γ — граф икосаэдра.

Пусть $k = 6$. Тогда $\lambda = 0$ и по теореме 1.9.3 из [4] вполне регулярный граф диаметра, не меньшего 4, с $k = 2\mu$ является многоугольником или графом Адамара, противоречие со следствием 1.8.2 из [4]. Поэтому диаметр Γ равен 3.

Пусть $uwxy$ — геодезический путь в Γ, $\Delta = ([u] \cap \Gamma_2(y)) \cup ([y] \cap \Gamma_2(u))$. Тогда $|\Gamma_2(u)| = 10$. По предложению 1.9.1 из [4] имеем $c_3(u, y) \geq 4$. Если $c_3(u, y) = 4$, то Δ является $K_{4,4}$-подграфом с удаленным максимальным паросочетанием. В этом случае для любой вершины из $\Gamma_2(u) - \Delta$ ее окрестность содержит не более одной вершины из $[u] \cap \Delta$. Противоречие с тем, что для различных вершин $p, q \in [u] - \Delta$ подграф $[p] \cap [q]$ содержит не менее 6 вершин из $\Gamma_2(u)$.

Если $c_3(u, y) = 5$, то $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит вершину z и $|[y] \cap [z] \cap \Gamma_2(u)| = 0$. Противоречие с тем, что вершина из $[u] \cap [z] \cap \Delta$ смежна с 6 вершинами из $\Gamma_2(u)$. Значит, $c_3(u, y) = 6$ для любой вершины y из $\Gamma_3(u)$. Допустим, что $z \in \Gamma_3(u) - \{y\}$. Тогда $[u]$ содержит точно 3 вершины f_1, f_2, f_3, смежные с парами вершин из $\Delta \cap [z]$. Противоречие с тем, что для различных вершин $p, q \in [z] \cap \Delta$ подграф $[p] \cap [q]$ содержит y, z и не менее 2 вершин из $\{f_1, f_2, f_3\}$. Значит, $|\Gamma_3(u)| = 1$ и $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)| = 4$. Противоречие с тем, что для различных вершин $p, q \in [x] \cap \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(y)$ подграф $[p] \cap [q]$ содержит x и 3 вершины из $[u] - [x]$.

Лемма 17. *Если $\mu = 1$, то Γ является либо регулярным графом без треугольников степени 6, либо реберным графом регулярного графа без треугольников степени 6, имеющего обхват, больший 4.*

Доказательство. Пусть $\mu = 1$. Тогда окрестность каждой вершины в Γ является объединением $t+1$ изолированных $(\lambda+1)$-клик. Так как $b_1 = t(\lambda+1)$, то либо $t = 1$ и $\lambda = 4$, либо $t = 5$ и $\lambda = 0$. В последнем случае Γ является регулярным графом без треугольников степени 6. Если же $t = 1$ и $\lambda = 4$, то Γ является реберным графом регулярного графа без треугольников степени 6, имеющего обхват, больший 4.

Лемма 18. *Если $\mu = 2$, то либо $k = 6$, либо Γ является локально восьмиугольным графом диаметра, не большего 4.*

Доказательство. Пусть $\mu = 2$. Так как $k - 2b_1 + 1 \leq 2$, то $k \leq 11$. В случае $k = 10$ имеем $\mu = k - 2b_1 + 2$ и по следствию из [9] Γ является графом Зейделя. Поэтому $k = 6$ или 8.

Пусть $k = 8$. Тогда Γ является локально восьмиугольным графом (в противном случае окрестность некоторой вершины a содержит 4-цикл $uwxy$ и $\mu(u, x) \geq 3$) и $|\Gamma_2(u)| = 20$ для любой вершины u. Для $x \in \Gamma_2(u)$ степень вершины x в графе $\Gamma_2(u)$ не меньше 4, если $[u] \cap [x]$ является кокликой.

По предложению 1.9.1 из [4] имеем $c_i(u, y) \geq i$ для любых двух вершин u, y с $d(u, y) = i$. Допустим, что $d(u, y) = 5$. Тогда $|[y] \cap \Gamma_4(u)| \geq 5$ и $|[x] \cap \Gamma_3(u)| \geq 4$ для любой вершины $x \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Поэтому $|\Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(y)| \geq 10$. Так как $|[w] \cap \Gamma_2(u)| \geq 3$ для любой вершины $w \in \Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(y)$, то $[w] \cap [y]$ является кликой. Противоречие с тем, что некоторое ребро из $[y]$ попадает в окрестности двух вершин из $\Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(y)$. Лемма, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Список литературы

[1] А.А. Махнев, И.М. Минакова *Об одном классе реберно регулярных графов*, Известия Гомельского госуниверситета, Вопросы алгебры **3** (2000), 145–154.

[2] С.Р. Зарипов, А.А. Махнев, И.П. Яблонко *Реберно регулярные графы диаметра 2 с* $\lambda \geq 2k/3 - 2$, Труды Украинского матем. конгресса, Киев 2001, секция 1: Алгебра и теория чисел, Институт математики НАН Украины, Киев 2003, 46–61.

[3] А.А. Махнев *О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы*, Дискр. анализ и исслед. операций **3** (1996), 71–83.

[4] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier *Distance-regular graphs*, Berlin etc, Springer-Verlag, 1989.

[5] А.А. Махнев *О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов*, Известия РАН, сер. матем. **68** (2004), 159–172.

[6] А.А. Веденев, А.Н. Кузнецов, А.А. Махнев, В.В. Носов *О хороших парах в реберно регулярных графах*, Дискрет. матем. **15** (2003), 77–97.

[7] И.Н. Белоусов, Е.И. Гурский, А.С. Дергач, А.А. Махнев *О почти хороших парах в реберно регулярных графах*, Проблемы теор. и приклад. матем. Труды молодежной конфер. Екатеринбург 2004, 9–11.

[8] В.В. Кабанов, А.А. Махнев *Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности*, Матем. сборник **187** (1996), 495–503.

[9] И.Н. Белоусов, А.А. Махнев *О почти хороших парах вершин в реберно регулярных графах*, Известия Урал. гос. ун-та, Екатеринбург 2005, N 7, 35–48.

[10] В.И. Казарина, А.А. Махнев *О реберно регулярных графах с* $b_1 = 5$, Алгебра, логика и кибернетика. Тез. докл. Иркутск 2004, 159–161.

[11] С.А. Васильев, А.А. Махнев *О вполне регулярных графах с* $b_1 = 4$, Известия Гомельского гос. ун-та, Гомель 2006, 101–108.

Марина Сефовна Нирова
Кабардино-балкарский госуниверсиет,
ул. Чернышевского 173,
360004, Нальчик, Россия
E-mail address: nirova_m@mail.ru