S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 2, стр. 68–78 (2005)* УДК 512.66
MSC 46M18

# О РЕФЛЕКТИВНЫХ ПОДКАТЕГОРИЯХ ПОЛУАБЕЛЕВЫХ КАТЕГОРИЙ

Н.В. ГЛОТКО, В.И. КУЗЬМИНОВ

Abstract. We discuss some category-theoretical and homological aspects of functional analysis. We consider a pair consisting of a quasiabelian category and its full reflective subcategory. We introduce notions of reduced and nonreduced cohomologies for complexes in reflective subcategory of quasi- abelian category and develop a version of "relative homological algebra" for such subcategories.

## 1. Введение

В данной статье мы обсуждаем некоторые теоретико - категорные и гомологические аспекты функционального анализа. Мы рассматриваем пары: полуабелева категория и ее рефлективная подкатегория и находим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы полная рефлективная подкатегория полуабелевой категории была предабелевой (полуабелевой). Для комплекса в рефлективной полной подкатегории полуабелевой категории мы вводим объекты редуцированных и нередуцированных когомологий и обсуждаем вопрос, как влияет предположение о строгости одного из дифференциалов комплексов, образующих короткую строго точную последовательность комплексов в рефлективной полной подкатегории полуабелевой категории на свойства других дифференциалов этих комплексов.

---

Glotko, N.V., Kuzminov, V.I., On reflective subcategories of quasiabelian categories.



Работа выполнена при финансовой поддержке по проекту № 8311 программы Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы", и при поддержке проекта INTAS № 03-51-3251 "Simplicial algebra, homology theories, K-theory and homotopy theory".

*Поступила 17 мая 2005 г., опубликована 14 июня 2005 г.*

## 2. Полные рефлективные подкатегории в полуабелевой категории

Пусть $\mathcal{A}$ - аддитивная категория, в которой выполнена

**Аксиома 1.** *Каждый морфизм $f$ имеет ядро* $\ker f$ *и коядро* $\operatorname{coker} f$.

В аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме 1, каждый морфизм $f$ допускает каноническое разложение $f = \operatorname{im} f \cdot \bar{f} \cdot \operatorname{coim} f$, где $\operatorname{im} f = \operatorname{kercoker} f$, $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker} \ker f$.

Морфизм $f$ называется *строгим*, если $\bar{f}$ – изоморфизм. Будем использовать следующие обозначения: $O_C^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}}, M_C^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}}$, $P_C^{\mathcal{A}}$ – классы всех строгих морфизмов, мономорфизмов, строгих мономорфизмов, эпиморфизмов, строгих эпиморфизмов категории $\mathcal{A}$ соответственно.

Аддитивная категория $\mathcal{A}$, удовлетворяющая аксиоме 1 называется *предабелевой* ([4]), если $\bar{f} \in M^{\mathcal{A}} \cap P^{\mathcal{A}}$. .

Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется *полуабелевой* ([6]), если в ней кроме аксиомы 1 выполнены еще две следующие аксиомы.

**Аксиома 2.** *В каждом коуниверсальном квадрате*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & C \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow \\ A & \xrightarrow[g]{} & B \end{array} \tag{1}$$

$$g \in P_C^{\mathcal{A}} \Longrightarrow f \in P_C^{\mathcal{A}}$$

**Аксиома 3.** *В каждом универсальном квадрате*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow \\ C & \xrightarrow[g]{} & D \end{array} \tag{2}$$

$$f \in M_C^{\mathcal{A}} \Longrightarrow g \in M_C^{\mathcal{A}}$$

В [4] установлено, что всякая полуабелева категория является предабелевой категорией.

Последовательность $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ называется *точной*, если $\operatorname{im} \varphi = \ker \psi$. В предабелевой категории эта последовательность точна тогда и только тогда, когда $\operatorname{coim} \psi = \operatorname{coker} \varphi$.

Последовательность $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ будем называть *строго точной* и писать $\varphi|\psi$, если $\varphi = \ker \psi$, $\psi = \operatorname{coker} \varphi$.

Пусть $\mathcal{B}$– подкатегория категории $\mathcal{A}$. Рефлекцией объекта $A \in Ob(\mathcal{A})$ в $\mathcal{B}$ называется такой морфизм $\pi_A : A \to RA$, что $RA \in Ob(\mathcal{B})$ и для любого объекта $B \in Ob(\mathcal{B})$ и морфизма $u : A \to B$ существует единственный морфизм $v : RA \to B$, $v \in Mor(\mathcal{B})$, для которого $u = v \cdot \pi_A$.

Подкатегория $\mathcal{B}$ категории $\mathcal{A}$ называется рефлективной, если каждый объект $A \in Ob(\mathcal{A})$ обладает рефлекцией в $\mathcal{B}$. В дальнейшем будем предполагать, что рефлективная подкатегория $\mathcal{B}$ обладает еще и следующим свойством: если объект $A \in Ob(\mathcal{A})$ изоморфен в $\mathcal{A}$ некоторому объекту $B \in Ob(\mathcal{B})$, то $A \in Ob(\mathcal{B})$.

Для морфизма $u : A_1 \to A_2$ и рефлекций $\pi_{A_1} : A_1 \to RA_1$, $\pi_{A_2} : A_2 \to RA_2$ существует единственный морфизм $v : RA_1 \to RA_2$, для которого $\pi_{A_2} \cdot u = v \cdot \pi_{A_1}$. Будем обозначать этот морфизм $v$ через $Ru$.

Примерами рефлективных подкатегорий полуабелевых категорий служат подкатегория отделимых полных топологических векторных пространств в категории всех топологических векторных пространств, подкатегория абелевых групп без кручения в категории всех абелевых групп.

В настоящей работе нас интересует вопрос, какие условия нужно накладывать на полную рефлективную подкатегорию полуабелевой категории, чтобы она была предабелевой ( полуабелевой ). Ответ на этот вопрос дается в теоремах 1 и 2.

Другая задача, с которой мы имеем дело состоит в том, чтобы выяснить, как влияет предположение о строгости одного из дифференциалов комплексов, образующих короткую строго точную последовательность комплексов в рефлективной полной подкатегории полуабелевой категории на свойства других дифференциалов этих комплексов.

Мы вводим ( для комплекса в рефлективной подкатегории ) объекты редуцированных и нередуцированных когомологий и доказываем вариант теоремы 2 из [5], справедливый в полной рефлективной подкатегории полуабелевой категории.

Следующее утверждение доказано в ([2], гл. IV, предложение 4.7 )

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{B}$– полная рефлективная подкатегория категории $\mathcal{A}$. Тогда*

1) *Если $u : A \to B$, $v : B \to A$ такие морфизмы в $\mathcal{A}$, что $B \in Ob(\mathcal{B})$ и $v \cdot u = \mathrm{id}_A$, то $A \in Ob(\mathcal{B})$.*

2) $\ker_{\mathcal{A}} u = \ker_{\mathcal{B}} u$ *для любого $u \in Mor(\mathcal{B})$.*

3) $R\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} u = \mathrm{coker}_{\mathcal{B}} Ru$ *для любого $u \in Mor(\mathcal{A})$.*

4) *Если в $\mathcal{A}$ в коуниверсальном квадрате* (1) $A, B, C \in Ob(\mathcal{B})$, *то $D \in Ob(\mathcal{B})$ и квадрат* (1) *коуниверсален в $\mathcal{B}$.*

5) *Для универсального в $\mathcal{A}$ квадрата* (2) *квадрат*

$$\begin{array}{ccc} RA & \xrightarrow{Rf} & RB \\ {\scriptstyle R\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle R\psi} \\ RC & \xrightarrow[Rg]{} & RD \end{array}$$

*универсален в $\mathcal{B}$.*

Из леммы 1 следует, что полная рефлективная подкатегория $\mathcal{B}$ категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющей аксиоме 1, сама удовлетворяет аксиоме 1. Поэтому произвольный морфизм $f \in Mor(\mathcal{B})$ допускает канонические разложения $f =$

$\mathrm{im}_{\mathcal{A}} f \cdot \bar{f}_{\mathcal{A}} \cdot \mathrm{coim}_{\mathcal{A}} f$ и $f = \mathrm{im}_{\mathcal{B}} f \cdot \bar{f}_{\mathcal{B}} \cdot \mathrm{coim}_{\mathcal{B}} f$, связанные между собой коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & \mathrm{Coim}_{\mathcal{A}} f & \xrightarrow{\bar{f}_{\mathcal{A}}} & \mathrm{Im}_{\mathcal{A}} f & \longrightarrow & B \\ \mathrm{Id}\Big\downarrow & & \pi\Big\downarrow & & \lambda\Big\downarrow & & \mathrm{Id}\Big\downarrow \\ A & \longrightarrow & \mathrm{Coim}_{\mathcal{B}} f & \xrightarrow{\bar{f}_{\mathcal{B}}} & \mathrm{Im}_{\mathcal{B}} f & \longrightarrow & B \end{array} \qquad (3)$$

в которой $\pi$– рефлекция.

**Лемма 2.** *Пусть $\mathcal{B}$– полная рефлективная подкатегория полуабелевой категории $\mathcal{A}$ и $f \in Mor(\mathcal{B})$. Тогда $\bar{f}_{\mathcal{B}} \in P^{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда*

$$R(\mathrm{Ker}\, \pi_{Coker_{\mathcal{A}} f}) = 0.$$

**Доказательство.** Для $f \in Mor(\mathcal{B})$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}_{\mathcal{A}} f & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} f & \longrightarrow & 0 \\ & & \lambda\Big\downarrow & & \mathrm{Id}\Big\downarrow & & \pi_1\Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}_{\mathcal{B}} f & \xrightarrow{\alpha_1} & B & \xrightarrow{\beta_1} & \mathrm{Coker}_{\mathcal{B}} f, & & \end{array} \qquad (4)$$

в которой $\pi_1$ – рефлекция, $\beta = \mathrm{coker}_{\mathcal{A}} f$, $\alpha = \mathrm{ker}_{\mathcal{A}} \beta$, $\alpha_1 = \mathrm{ker}_{\mathcal{A}} \beta_1$.

Так как $\beta \in P^{\mathcal{A}}_C$ и $\alpha = \mathrm{ker}_{\mathcal{A}} \beta$, то $\beta = \mathrm{coker}_{\mathcal{A}} \alpha$. Теорема о Ker – Coker-последовательности в полуабелевой категории ([3]), примененная к диаграмме (4), доставляет изоморфизм $\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} \pi_1 \simeq \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} \lambda$. Поэтому $R(\mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} \pi_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $R(\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} \lambda) = 0$. По лемме1 п.3 $R(\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} \lambda) = 0$ тогда и только тогда, когда $R\lambda \in P^{\mathcal{B}}$.

Имеем $\bar{f}_{\mathcal{B}} \cdot \pi = \lambda \cdot \bar{f}_{\mathcal{A}} = (R\lambda) \cdot \pi_2 \cdot \bar{f}_{\mathcal{A}}$, где $\pi$ и $\pi_2$ – рефлекции объектов $\mathrm{Coim}_{\mathcal{A}} f$ и $\mathrm{Im}_{\mathcal{A}} f$ соответственно, $\bar{f}_{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$.

Поэтому, для произвольного $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Im}_{\mathcal{B}} f, X)$, $X \in Ob(\mathcal{B})$, $u \cdot \bar{f}_{\mathcal{B}} = 0$ тогда и только тогда, когда $u \cdot R\lambda = 0$. Следовательно, $R\lambda \in P^{\mathcal{B}}$ тогда и только тогда, когда $\bar{f}_{\mathcal{B}} \in P^{\mathcal{B}}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathcal{B}$–полная рефлективная подкатегория аддитивной категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющей аксиоме 1. Обозначим через $\mathcal{S}$ класс всех таких объектов $C$ категории $\mathcal{A}$, для которых найдутся строгий эпиморфизм $p : A \to C$ и мономорфизм $u : C \to B$ такие, что $A, B \in Ob(\mathcal{B})$.

Рассмотрим следующие аксиомы, относящиеся к паре категорий $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, где $\mathcal{B}$—полная рефлективная подкатегория категории $\mathcal{A}$.

**П 1.** $R(\mathrm{Ker}\, \pi_A) = 0$ *для всех объектов $A \in Ob(\mathcal{A})$, которые являются коядрами в $\mathcal{A}$ морфизмов категории $\mathcal{B}$.*

**П 2.** *Если $C \in \mathcal{S}$, $u : C \to B$, $B \in Ob(\mathcal{B})$, $u \in M^{\mathcal{A}}$, то $Ru \in M^{\mathcal{B}}$.*

**Лемма 3.** *Если $\mathcal{A}$– предабелева категория, $\mathcal{B}$– ее полная рефлективная подкатегория, то аксиома* П2 *эквивалентна тому, что $\bar{f}_{\mathcal{B}} \in M^{\mathcal{B}}$ для любого морфизма $f \in Mor(\mathcal{B})$.*

**Доказательство.** Пусть выполнена аксиома П2 и $f \in Mor(\mathcal{B})$. Поскольку категория $\mathcal{A}$ предабелева, то морфизм $f$ представим в виде $f = u \cdot \mathrm{coim}_{\mathcal{A}} f$, где $u \in M^{\mathcal{A}}$. По аксиоме П2 $Ru \in M^{\mathcal{B}}$. Так как $\mathrm{coim}_{\mathcal{B}} f = R(\mathrm{coim}_{\mathcal{A}} f)$ и $f = Ru \cdot R(\mathrm{coim}_{\mathcal{A}} f)$, то $Ru = \mathrm{im}_{\mathcal{B}} f \cdot \bar{f}_{\mathcal{B}}$. Следовательно, $\bar{f}_{\mathcal{B}} \in M^{\mathcal{B}}$.

Обратно, пусть $\bar{f}_{\mathcal{B}} \in M^{\mathcal{B}}$ для любого морфизма $f \in Mor(\mathcal{B})$, $A, B \in Ob(\mathcal{B})$, $p : A \to C$– строгий эпиморфизм в $\mathcal{A}$, $u : C \to B$– мономорфизм в $\mathcal{A}$. Тогда $\pi_C \cdot p = \operatorname{coim}_{\mathcal{B}} f$ и $Ru = (\operatorname{im}_{\mathcal{B}} f) \cdot \bar{f}_{\mathcal{B}}$, где $f = u \cdot p$. Так как $\operatorname{im}_{\mathcal{B}} f$, $\bar{f}_{\mathcal{B}} \in M^{\mathcal{B}}$, то $Ru \in M^{\mathcal{B}}$. Лемма доказана.

Объединение лемм 2 и 3 дает следующий результат:

**Теорема 1.** *Полная рефлективная подкатегория $\mathcal{B}$ полуабелевой категории $\mathcal{A}$ предабелева тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы* П1 *и* П2.

Для того, чтобы категория $\mathcal{B}$ стала полуабелевой требуется следующее условие:

**П 3.** *Пусть*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\nu} & B \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_B} \\ C & \xrightarrow[\lambda]{} & RB \end{array}$$

*– коуниверсальный квадрат, $C \in Ob(\mathcal{B})$, $B \in \mathcal{S}$, $\lambda \in M^{\mathcal{B}}_C$. Тогда $\mu$– рефлекция.*

**Лемма 4.** *Пусть $\mathcal{B}$- полная рефлективная подкатегория полуабелевой категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая* П1*. В $\mathcal{B}$ выполнена аксиома* А2 *тогда и только тогда, когда выполняется* П3.

**Доказательство.** Пусть квадрат $f \cdot \psi = g \cdot \varphi$ коуниверсален в $\mathcal{B}$ и $f \in P^{\mathcal{B}}_C$. Без ограничения общности можно предполагать, что $g \in M^{\mathcal{B}}_C$. Если мы докажем, что $\varphi \in P^{\mathcal{B}}_C$, то отсюда уже будет следовать, что для любого морфизма $f$ категории $\mathcal{E}$ $\overline{f}_{\mathcal{B}} \in M$ ([4], теорема 1). Далее для доказательства полуабелевости воспользуемся теоремой 2 из [4].

Категория $\mathcal{B}$ – аддитивная подкатегория категории $\mathcal{A}$, удовлетворяющая условию П1. Поэтому, по лемме 3 ([4]), $\psi \in M^{\mathcal{B}}_C$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \operatorname{Ker}\varphi & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{\theta} & \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}} i & \xrightarrow{h} & B \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\downarrow & & {\scriptstyle\rho}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow \\ \operatorname{Ker} f & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{\sigma} & \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}} j & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

Здесь $h \cdot \theta = \varphi$, $\pi \cdot \sigma = f$, $i = \ker\varphi$, $j = \ker f$. Квадрат $\sigma \cdot \psi = \rho \cdot \theta$ универсален в $\mathcal{A}$, $\psi \in M^{\mathcal{B}}_C$ влечет $\psi \in M^{\mathcal{A}}_C$. В силу универсальности квадрата $\sigma \cdot \psi = \rho \cdot \theta$, $\rho \in M^{\mathcal{A}}_C$.

Очевидно $\sigma \cdot \psi = \rho \cdot \theta$ также и коуниверсален в $\mathcal{A}$. Но тогда в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}}\psi \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & {\scriptstyle\tau}\downarrow \\ \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}} i & \xrightarrow{\rho} & \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}} j & \longrightarrow & \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}}\rho \end{array}$$

морфизм $\tau$ является мономорфизмом по теореме о Ker – Coker - последовательности. С другой стороны, так как $\theta \in P^{\mathcal{A}}_C$, то квадрат $(\operatorname{coker}\rho) \cdot \sigma = \tau \cdot \operatorname{coker}_{\mathcal{A}}\psi$ универсален в $\mathcal{A}$. Поскольку $\sigma \in P^{\mathcal{A}}_C$, то и $\tau \in P^{\mathcal{A}}_C$. Таким образом, $\tau$– изоморфизм. Имеются морфизмы $\lambda : \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}}\psi \to \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}} g$, $\nu : \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}}\rho \to \operatorname{Coker}_{\mathcal{A}} g$, удовлетворяющие соотношениям $\lambda \cdot (\operatorname{coker}_{\mathcal{A}}\psi) = (\operatorname{coker}_{\mathcal{A}} g) \cdot f$, $\nu \cdot (\operatorname{coker}_{\mathcal{A}}\rho) =$

$(\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} g)\cdot\pi$ , $\nu\cdot\tau = \lambda$. Так как квадрат $f\cdot\psi = g\cdot\varphi$ коуниверсален и $\psi \in M_C^{\mathcal{A}}$, то $\lambda \in M$. Отсюда $\nu \in M$. Действительно, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}}\psi \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "g"] & D \arrow[r] & \mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} g \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

Пусть морфизм $u : X \to C$, $X \in Ob(\mathcal{A})$ таков, что $\lambda \cdot (\mathrm{coker}_{\mathcal{A}}\psi) \cdot u = 0$. Тогда $(\mathrm{coker}_{\mathcal{A}} g) \cdot f \cdot u = 0$. Поэтому существует такой морфизм $v : X \to B$, что $g \cdot v = f \cdot u$, так как $g \in M_C^{\mathcal{A}}$. В силу коуниверсальности квадрата $f \cdot \psi = g \cdot \varphi$ существует такой морфизм $w : X \to A$, что $\psi \cdot w = u, \varphi \cdot w = v$. То есть $\psi = \ker(\lambda\cdot\mathrm{coker}_{\mathcal{A}}\psi)$. Отсюда $\lambda \in M^{\mathcal{A}}$. Таким образом $\nu \in M$ и квадрат $\pi\cdot\rho = g\cdot h$ коуниверсален. Морфизм $\pi-$ рефлекция, $\mathrm{Coker}_{\mathcal{A}} j \in \mathcal{S}$, $g \in M_C^{\mathcal{A}}$. Но тогда, по П3, $h-$ рефлекция, откуда $\varphi \in P_C^{\mathcal{B}}$.

Обратно, пусть в $\mathcal{B}$ выполнена аксиома А2. Проверим П3. Пусть

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"'] & B \arrow[d, "\pi_B"'] \\
C \arrow[r, "\lambda"'] & RB
\end{tikzcd}$$

– коуниверсальный квадрат, $C \in Ob(\mathcal{B})$, $B \in \mathcal{S}$, $\lambda \in M_C^{\mathcal{B}}$. Покажем, что $\mu-$ рефлекция. Имеется коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
T \times_B A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varkappa"'] & T \arrow[d, "s"'] \\
A \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"'] & B \arrow[d, "\pi_B"'] \\
C \arrow[r, "\lambda"'] & RB,
\end{tikzcd}$$

где $T \in Ob(\mathcal{B})$, $\pi_B \cdot s = Rs$, $s \in P_C^{\mathcal{A}}$, $Rs \in P_C^{\mathcal{B}}$. Символом $\eta$ будем обозначать композицию $\mu \cdot \varkappa$. Квадрат $Rs \cdot \sigma = \lambda\eta$ коуниверсален в $\mathcal{A}$. Так как $T, C, RB \in Ob(\mathcal{B})$ то, по лемме 1 он коуниверсален и в $\mathcal{B}$. Так как выполнена аксиома 2, то $\eta \in P_C^{\mathcal{B}}$. С другой стороны, поскольку $\mathcal{B}$ аддитивна, то $\sigma \in M_C^{\mathcal{B}}$. Далее, квадрат $\pi_{\mathcal{B}} \cdot \nu = \lambda \cdot \mu$ коуниверсален, поэтому $\nu \in M_C^{\mathcal{A}}$. Поскольку $s \in P_C^{\mathcal{A}}$ и квадрат $s \cdot \sigma = \nu \cdot \varkappa$ коуниверсален по построению, то $\varkappa \in P_C^{\mathcal{A}}$.

Поскольку $B \in \mathcal{S}$, то $\pi_B \in M$. Отсюда $\lambda \cdot \mu = \pi_B \cdot \nu \in M$. Поэтому $\mu \in M$. Пусть $i : \mathrm{Ker}_{\mathcal{B}}\eta \to T \times_B A$. Так как $\eta \cdot i = \mu \cdot \varkappa \cdot i = 0$, то $\varkappa \cdot i = 0$.

Рассмотрим $v : A \to X$, $X \in Ob(\mathcal{B})$. Тогда $v \cdot \varkappa \cdot i = 0$. Поскольку $i|\eta$ в $\mathcal{B}$, то существует $w : C \to X$, $w \cdot \eta = v \cdot \varkappa$, поэтому $w \cdot \mu \cdot \varkappa = v \cdot \varkappa$ и $w \cdot \mu = v$. Таким образом, $\mu-$ рефлекция. Лемма доказана.

В [4] было показано, что для полуабелевости категории $\mathcal{A}$ достаточно аксиомы 2, если $\bar{f}_{\mathcal{A}} \in P_{\mathcal{A}}$ для любого $f \in Mor(\mathcal{A})$.

Таким образом, имеем теорему.

**Теорема 2.** *Рефлективная полная подкатегория $\mathcal{B}$ полуабелевой категории $\mathcal{A}$ полуабелева тогда и только тогда, когда выполнены аксиомы* П1 *и* П3.

Для дальнейших приложений нам потребуется некоторое усиление аксиомы П3. А именно:

**П 4.** *Если в последовательности*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

$\psi = \operatorname{coker}_{\mathcal{A}}\varphi$, $A, B \in Ob(\mathcal{B})$, $\varphi \in M$, *то* $\varphi \in M_C^{\mathcal{B}}$ *тогда и только тогда, когда* $C \in Ob(\mathcal{B})$.

Эта аксиома выполняется например в рефлективной подкатегории отделимых полных топологических векторных пространств категории всех топологических векторных пространств.

**Лемма 5.** *Если выполнены аксиомы* П1 *и* П4, *то рефлективная полная подкатегория* $\mathcal{B}$ *полуабелевой категории* $\mathcal{A}$ *полуабелева.*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что П4 влечет П3. Докажем сначала, что П3 следует из следующего условия

(G) $\pi_B \in P_C^{\mathcal{A}}$ для всякого $B \in Ob(\mathcal{A})$ такого, что существует $A \in Ob(\mathcal{B})$ и $p : A \to B$, $p \in P_C^{\mathcal{A}}$

В самом деле, рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\nu} & B \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{\mathcal{B}}} \\ C & \xrightarrow{\lambda} & RB, \end{array}$$

где $C \in Ob(\mathcal{B})$, $B \in \mathcal{S}$, $\lambda \in M_C^{\mathcal{B}}$. Так как $B \in \mathcal{S}$, то $\pi_{\mathcal{B}} \in M$. С другой стороны, $\pi_{\mathcal{B}} \in P_C^{\mathcal{A}}$ по (G). Отсюда $\pi_{\mathcal{B}}$– изоморфизм и, поскольку квадрат $\pi_{\mathcal{B}} \cdot \nu = \lambda \cdot \mu$ коуниверсален, то и $\mu$– изоморфизм.

Докажем теперь, что из П4 следует (G). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}_{\mathcal{A}}p & \xrightarrow{j} & A & \xrightarrow{p} & B & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & B \\ & & {\scriptstyle s}\downarrow & & \downarrow\mathrm{Id} & & \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{\mathcal{B}}} \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}_{\mathcal{B}}Rp & \xrightarrow[i]{} & A & \xrightarrow[\sigma]{} & \operatorname{Coim}_{\mathcal{A}}Rp & \xrightarrow[\nu]{} & RB \end{array}$$

Здесь $\ker_{\mathcal{B}}Rp = \ker_{\mathcal{A}}Rp$, $p \in P_C^{\mathcal{A}}$, $Rp \in P_C^{\mathcal{B}}$, $i \cdot s = j$, $\nu \cdot \sigma = Rp$, $\tau \cdot p = \sigma$, $\nu \cdot \tau = \pi_{\mathcal{B}}$. Так как $i|\sigma$ в $\mathcal{A}$ и $i \in M_C^{\mathcal{B}}$ то, по П4, $\operatorname{Coim}_{\mathcal{A}}Rp \in Ob(\mathcal{B})$. Таким образом, существует $\mu$ такой, что $\mu \cdot \pi_{\mathcal{B}} = \tau$. Легко видеть, что $\nu$ и $\mu$– взаимно обратные изоморфизмы, откуда $Rp \in P_C^{\mathcal{A}}$. Но тогда $\pi_{\mathcal{B}} \in P_C^{\mathcal{A}}$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что в $\mathcal{B}$ выполнены аксиомы П1 и П4.

**Лемма 6.** *Для* $f \in Mor(\mathcal{B})$ *справедливы утверждения*

1) $f \in P_C^{\mathcal{B}}$ *тогда и только тогда, когда* $f \in P_C^{\mathcal{A}}$;
2) $f \in P^{\mathcal{A}}$ *влечет* $f \in P^{\mathcal{B}}$;
3) $\operatorname{Coim}_{\mathcal{B}}f = \operatorname{Coim}_{\mathcal{A}}f$.

## 3. Относительная когомологическая алгебра в рефлективной подкатегории

Пусть $\mathbf{A} = (A^i, d_A^i)_{i\in\mathbb{Z}}$– коцепной комплекс категории $\mathcal{B}$.

**Определение 1.** *Будем называть редуцированными когомологиями комплекса* **A** *объекты*

$$H^i_{\mathcal{B}}A = \mathrm{Ker}_{\mathcal{B}} d^i_A / \mathrm{Im}_{\mathcal{B}} d^{i-1}_A,$$

*а нередуцированными когомологиями–*

$$H^i_{\mathcal{A}}A = \mathrm{Ker}_{\mathcal{A}} d^i_A / \mathrm{Im}_{\mathcal{A}} d^{i-1}_A,$$

в соответствии с терминологией, принятой в [5]. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Coim}\, d^{i-1}_A & \xrightarrow{\bar{\alpha}_{\mathcal{A}}} & \mathrm{Im}_{\mathcal{A}} d^{i-1}_A & \xrightarrow{p_0} & \mathrm{Ker}\, d^i_A & \xrightarrow{\nu_1} & H^i_{\mathcal{A}}A & \longrightarrow & 0 \\
\mathrm{Id}\downarrow & & r\downarrow & & \mathrm{Id}\downarrow & & \pi\downarrow & & \\
\mathrm{Coim}\, d^{i-1}_A & \xrightarrow{\bar{\alpha}_{\mathcal{B}}} & \mathrm{Im}_{\mathcal{B}} d^{i-1}_A & \xrightarrow{q_0} & \mathrm{Ker}\, d^i_A & \xrightarrow{\nu_2} & H^i_{\mathcal{B}}A & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

Здесь $\bar{\alpha}_{\mathcal{A}} = \overline{(d^{i-1}_A)}_{\mathcal{A}}$, $\bar{\alpha}_{\mathcal{B}} = \overline{(d^{i-1}_A)}_{\mathcal{B}}$.

Согласно определению 1, $\nu_1 = \mathrm{coker}_{\mathcal{A}} p_0$, $\nu_2 = \mathrm{coker}_{\mathcal{B}} q_0$. Легко проверить, что $p_0 \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{A}} = q_0 \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{B}}$ и, кроме того, $\nu_2 = \mathrm{coker}_{\mathcal{B}}(q_0 \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{B}})$, $\nu_1 = \mathrm{coker}_{\mathcal{A}}(p_0 \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{A}})$.

Таким образом, $\pi$– рефлекция и, согласно П4, $\pi \in P^{\mathcal{A}}_C$.

Далее, предположим, что $d^{i-1}_A \in O^{\mathcal{B}}_C$. Тогда $\bar{\alpha}_{\mathcal{B}}$– изоморфизм. Имеем: $r \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{A}} = \bar{\alpha}_{\mathcal{B}}$, $q_0 \cdot r = p_0$. Так как $p_0, q_0 \in M^{\mathcal{A}}_C$, то $r$– изоморфизм. Отсюда $\bar{\alpha}_{\mathcal{A}}$– изоморфизм. Кроме того, так как $r$– изоморфизм, то $\nu_1 = \mathrm{coim}_{\mathcal{A}} \nu_2$ и $\pi \in M$. Но $\pi \in P^{\mathcal{A}}_C$. Отсюда $\pi$– изоморфизм.

Рассмотрим теперь случай, когда $\pi$– изоморфизм. Тогда, по П4 $q_0 \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{B}} \in M^{\mathcal{B}}_C$. Отсюда $\bar{\alpha}_{\mathcal{B}} \in M^{\mathcal{B}}_C$. То есть, $d^{i-1}_A \in O^{\mathcal{B}}_C$.

Таким образом, доказано

**Предложение 1.** *Для любого комплекса* **A** *категории* $\mathcal{B}$ *выполнены утверждения*

1) $H^i_{\mathcal{B}}A = R(H^i_{\mathcal{A}}A)$, $\pi \in P^{\mathcal{A}}_C$, *где* $\pi : H^i_{\mathcal{A}}A \to H^i_{\mathcal{B}}A$ *– рефлекция.*

2) *Если* $\pi$ *– изоморфизм, то* $d^{i-1}_A \in O^{\mathcal{B}}_C$.

3) *Если* $d^{i-1}_A \in O^{\mathcal{B}}_C$, *то* $\pi$ *– изоморфизм и* $d^{i-1}_A \in O^{\mathcal{A}}_C$. *Вообще, для любого морфизма* $\alpha$, *если* $\alpha \in O^{\mathcal{B}}_C$, *то* $\alpha \in O^{\mathcal{A}}_C$

Пусть

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

–короткая строго точная последовательность комплексов категории $\mathcal{B}$. Ей соответствуют две полуточные последовательности когомологий:

$$\ldots \longrightarrow H^i_{\mathcal{A}}A \xrightarrow{H^i_{\mathcal{A}}\varphi} H^i_{\mathcal{A}}B \xrightarrow{H^i_{\mathcal{A}}\psi} H^i_{\mathcal{A}}C \xrightarrow{H^i_{\mathcal{A}}\delta} H^{i+1}_{\mathcal{A}}A \longrightarrow \ldots \quad (5)$$

$$\ldots \longrightarrow H^i_{\mathcal{B}}A \xrightarrow{H^i_{\mathcal{B}}\varphi} H^i_{\mathcal{B}}B \xrightarrow{H^i_{\mathcal{B}}\psi} H^i_{\mathcal{B}}C \xrightarrow{H^i_{\mathcal{B}}\delta} H^{i+1}_{\mathcal{B}}A \longrightarrow \ldots \quad (6)$$

Как следствие теоремы о когомологической последовательности из [1] и предложения 1 имеем

**Предложение 2.** *Пусть*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

*– короткая строго точная последовательность комплексов категории $\mathcal{B}$. Тогда*

1) *Если $d^i_A \in O^{\mathcal{B}}_C$, то последовательность* (6) *точна в $H^i_{\mathcal{A}}B, H^i_{\mathcal{A}}C$, $H^i_{\mathcal{A}}\psi \in O^{\mathcal{A}}_C$ и $H^{i+1}_{\mathcal{A}}A \in \mathcal{B}$,* (5) *точна в $\mathcal{B}$ в $H^i_{\mathcal{B}}B, H^i_{\mathcal{B}}C$, $H^i_{\mathcal{B}}\psi \in O^{\mathcal{B}}_C$.*

2) *Если $d^i_B \in O^{\mathcal{B}}_C$, то последовательность* (6) *точна в $H^i_{\mathcal{A}}C, H^{i+1}_{\mathcal{A}}A$, $H^i_{\mathcal{A}}\delta \in O^{\mathcal{A}}_C$ и $H^{i+1}_{\mathcal{A}}B \in \mathcal{B}$,* (5) *точна в $\mathcal{B}$ в $H^i_{\mathcal{B}}C, H^{i+1}_{\mathcal{B}}A$, $H^i_{\mathcal{B}}\delta \in O^{\mathcal{B}}_C$.*

3) *Если $d^i_C \in O^{\mathcal{B}}_C$, то последовательность* (6) *точна в $H^{i+1}_{\mathcal{A}}A, H^{i+1}_{\mathcal{A}}B$, $H^{i+1}_{\mathcal{A}}\varphi \in O^{\mathcal{A}}_C$ и $H^{i+1}_{\mathcal{A}}C \in \mathcal{B}$,* (5) *точна в $\mathcal{B}$ в $H^{i+1}_{\mathcal{B}}A, H^{i+1}_{\mathcal{B}}B$, $H^{i+1}_{\mathcal{B}}\varphi \in O^{\mathcal{B}}_C$.*

**Лемма 7.** *Пусть*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

*– короткая точная последовательность комплексов категории $\mathcal{B}$. Тогда диаграмма*

$$\begin{array}{ccccccc}
H^i_{\mathcal{A}}A & \xrightarrow{H^i_{\mathcal{A}}\varphi} & H^i_{\mathcal{A}}B & \xrightarrow{H^i_{\mathcal{A}}\psi} & H^i_{\mathcal{A}}C & \xrightarrow{H^i_{\mathcal{A}}\delta} & H^{i+1}_{\mathcal{A}}A \\
{\scriptstyle \pi'^i}\downarrow & & {\scriptstyle \pi^i}\downarrow & & {\scriptstyle \pi''^i}\downarrow & & {\scriptstyle \pi'^{i+1}}\downarrow \\
H^i_{\mathcal{B}}A & \xrightarrow{H^i_{\mathcal{B}}\varphi} & H^i_{\mathcal{B}}B & \xrightarrow{H^i_{\mathcal{B}}\psi} & H^i_{\mathcal{B}}C & \xrightarrow{H^i_{\mathcal{B}}\delta} & H^{i+1}_{\mathcal{B}}A
\end{array}$$

*коммутативна.*

**Определение 2.** *Пусть $(A, i)$ – строгий подобъект объекта $B$ в терминологии* [6], *где $i : A \to B$ – строгое вложение, $A, B \in Ob(\mathcal{A})$. Имеется короткая строго точная последовательность:*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} B/A \longrightarrow 0$$

*Будем говорить, что подобъект $A$ замкнут в $B$ и писать $A \in Cl_{\mathcal{A}}(B)$, если $\pi_{B/A} \in M$.*

В качестве примера можно рассмотреть категорию отделимых полных топологических векторных пространств как полную рефлективную подкатегорию категории всех топологических векторных пространств. В данном случае рефлекцией является композиция $i \cdot p$, где $i$– пополнение отделимого пространства, а $p$– отображение взятия факторпространства по замыканию нуля и выполнена аксиома П4. Если $B$–топологическое векторное подпространство топологического векторного пространства $A$ и вложение $i : A \to B$ является открытым отображением на свой образ то $A \in Cl_{\mathcal{T}op\mathcal{V}ect}(B)$ тогда и только тогда, когда $A$ замкнуто в $B$ в обычном смысле ([7]).

**Теорема 3.** *Пусть*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B} \xrightarrow{\psi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

*– короткая строго точная последовательность комплексов категории $\mathcal{B}$. Тогда*

1) *Если $d^i_A \in O^{\mathcal{B}}_C$, то $d^{i-1}_C \in O^{\mathcal{B}}_C$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}_{\mathcal{A}}H^i_{\mathcal{A}}\varphi \in Cl_{\mathcal{A}}(H^i_{\mathcal{A}}B)$.*

2) *Если* $d_B^i \in O_C^{\mathcal{B}}$, *то* $d_A^i \in O_C^{\mathcal{B}}$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \psi \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i C)$.

3) *Если* $d_C^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$, *то* $d_B^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \delta \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i A)$.

**Доказательство.** Докажем, например, 1). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{\mathcal{A}}^i A \arrow[r] \arrow[d, "\pi'^i"'] & H_{\mathcal{A}}^i B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi^i"'] & \operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \psi \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & H_{\mathcal{A}}^i C \arrow[r] \arrow[d, "\pi''^i"'] & {} \\
H_{\mathcal{B}}^i A \arrow[r, "\lambda"] & H_{\mathcal{B}}^i B \arrow[r, "\tau"] & \operatorname{Im}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \psi \arrow[r] & H_{\mathcal{B}}^i C \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \operatorname{Coim} H_{\mathcal{A}}^i \delta \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & H_{\mathcal{A}}^{i+1} A \arrow[d, "\pi'^{i+1}"'] \\
{} \arrow[r] & \operatorname{Coim} H_{\mathcal{B}}^i \delta \arrow[r] & H_{\mathcal{B}}^{i+1} A
\end{tikzcd}$$

Здесь $\lambda = R(\operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i(\psi))$.

Пусть $d_A^i \in O_C^{\mathcal{B}}$. Тогда, по предложению 1, $d_A^i \in O_C^{\mathcal{A}}$. Далее, есть точность в $\mathcal{A}$ в $H_{\mathcal{A}}^i B, H_{\mathcal{A}}^i C$, $H_{\mathcal{A}}^i \psi \in O_C^{\mathcal{A}}$ и точность в $\mathcal{B}$ в $H_{\mathcal{B}}^i B, H_{\mathcal{B}}^i C, H_{\mathcal{B}}^i \psi \in O_C^{\mathcal{B}}$ по предложению 3. Тогда, по лемме 6 и предложению 1 , $H_{\mathcal{B}}^i \psi \in O_C^{\mathcal{A}}$ и $\operatorname{Im}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \psi = \operatorname{Im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{B}}^i \psi$. Кроме того, $\pi'^{i+1}$–изоморфизм.

В силу точности нижней последовательности в $H_{\mathcal{B}}^i B, H_{\mathcal{B}}^i C$ и строгости морфизма $H_{\mathcal{B}}^i \psi$, $\operatorname{im} H_{\mathcal{B}}^i \psi = \operatorname{kercoim} H_{\mathcal{B}}^i \delta$, $\tau = \operatorname{coker}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \varphi \in P_C^{\mathcal{B}}$, что влечет $\tau \in P_C^{\mathcal{A}}$ по лемме 6. Далее, $\nu \cdot \operatorname{coim} H_{\mathcal{A}}^i \delta = (\operatorname{coim} H_{\mathcal{B}}^i \delta) \cdot \pi''^i \in P_C^{\mathcal{A}}$. То есть, $\nu \in P_C^{\mathcal{A}}$. С другой стороны, так как морфизм $\pi'^{i+1}$ является изоморфизмом, $\alpha_2 \cdot \nu = \pi'^{i+1} \cdot \alpha_1 \in M$, то $\nu$– изоморфизм. Далее, поскольку рефлекция переводит коядра категории $\mathcal{A}$ в коядра категории $\mathcal{B}$,то $R\sigma : H_{\mathcal{B}}^i B \to R(\operatorname{Im} H_{\mathcal{A}}^i \psi)$ является коядром в категории $\mathcal{B}$ морфизма $H_{\mathcal{B}}^i \varphi$. С другой стороны, так как есть точность (в категории $\mathcal{B}$) в $H_{\mathcal{B}}^i B$ и $H_{\mathcal{B}}^i \psi \in O_C^{\mathcal{B}}$, то $\tau = \operatorname{coker}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \varphi$. Таким образом, $\tau = R\sigma$ и $\operatorname{Im}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \psi = R(\operatorname{Im} H_{\mathcal{A}}^i \psi)$. То есть, $\rho$– рефлекция. Далее, $\sigma = \operatorname{coker}(\operatorname{im} H_{\mathcal{A}}^i \varphi)$, $\rho \cdot \sigma = \tau \cdot \pi^i \in P_C^{\mathcal{A}}$. Отсюда $\rho \in P_C^{\mathcal{A}}$.

Пусть $d_C^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$. Тогда есть точность в $H_{\mathcal{B}}^i A, H_{\mathcal{B}}^i B, H_{\mathcal{A}}^i A, H_{\mathcal{A}}^i B$, $H_{\mathcal{B}}^i \varphi \in O_C^{\mathcal{B}}, H_{\mathcal{A}}^i \varphi \in O_C^{\mathcal{A}}$ и морфизм $\pi''^i$–изоморфизм по предложению 3. Кроме того, $(\operatorname{im}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \psi) \cdot \rho = \pi''^i \cdot \operatorname{im}_{\mathcal{A}} H_{\mathcal{A}}^i \psi$. Теперь, так как $\pi''^i$–изоморфизм, имеем: $\rho \in M_C^{\mathcal{A}}$. Таким образом, $\operatorname{Im} H_{\mathcal{A}}^i \varphi \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i B)$.

Обратно, пусть $\operatorname{Im} H_{\mathcal{A}}^i \varphi \in Cl_{\mathcal{A}}(H_{\mathcal{A}}^i B)$. Тогда $\rho \in M$. С другой стороны, $\rho \in P_C^{\mathcal{A}}$, то есть $\rho$– изоморфизм. В силу точности когомологических последовательностей в членах $H_{\mathcal{A}}^i C, H_{\mathcal{B}}^i C$ и строгости морфизмов $H_{\mathcal{A}}^i \psi, H_{\mathcal{B}}^i \psi$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} H_{\mathcal{A}}^i \psi \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & H_{\mathcal{A}}^i C \arrow[r] \arrow[d, "\pi''^i"'] & \operatorname{Coim} H_{\mathcal{A}}^i \delta \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \psi \arrow[r] & H_{\mathcal{B}}^i C \arrow[r] & \operatorname{Coim} H_{\mathcal{B}}^i \delta \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{im} H_{\mathcal{A}}^i \psi | \operatorname{coim} H_{\mathcal{A}}^i \delta$, $\operatorname{im}_{\mathcal{B}} H_{\mathcal{B}}^i \psi | \operatorname{coim} H_{\mathcal{B}}^i \delta$. Кроме того, морфизмы $\nu$ и $\rho$ являются изоморфизмами. Используя аксиому 3 из [4] заключаем, что $\pi''^i$– изоморфизм. Теперь по предложению 1 $d_C^{i-1} \in O_C^{\mathcal{B}}$. Пункты 2) и 3) доказываются аналогично. Теорема доказана.

## Список литературы

[1] Копылов Я.А., Кузьминов В.И. *О точности когомологической последовательности для короткой точной последовательности комплексов в полуабелевой категории*, Труды конференции «Геометрия и приложения». Новосибирск. Изд- во Института математики, 2001, С. 76-83.
[2] Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. *Основы теории категорий*, М.: Наука, 1974.
[3] Копылов Я.А., Кузьминов В.И. *О $Ker - Coker$- последовательности в полуабелевой категории*, Сиб. мат. журн. 2000, Т. 41, N. 3, С. 615-624.
[4] Кузьминов В.И., Черевикин А.Ю. *О полуабелевых категориях*, Сиб. мат. журн. 1972, Т. 13, N. 6, С. 1284-1294.
[5] Кузьминов В.И., Шведов И.А. *Гомологические аспекты теории банаховых комплексов*, Сиб. мат. журн. 1999, Т. 40, N. 4, С. 893-904.
[6] Райков Д.А. *Полуабелевы категории*, Докл. АН СССР. 1969, Т. 188, N. 5, С. 1006-1009.
[7] Шефер Х. *Топологические векторные пространства*, М.: Мир, 1971.

Николай Владимирович Глотко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
*E-mail address*: glotko@math.nsc.ru

Владимир Иванович Кузьминов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
*E-mail address*: kuzminov@math.nsc.ru