S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 99–109 (2004) УДК 519.17
MSC 05C

О НИЖНЕЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ МАКСИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ВЕРШИН И ОБХВАТОМ

В. А. ТАШКИНОВ

Abstract. For every $g \geq 3$ we prove the existence of a simple graph with maximum degree at most 6, girth at least g and chromatic number at least 4.

1. Введение

Пусть $\chi(G)$ и $\Delta(G)$ — хроматическое число и максимальная степень вершин графа G соответственно. Обхватом графа G называется длина кратчайшего цикла в графе G. Обозначим через $\mathfrak{G}(\Delta, g)$ класс всех обыкновенных графов с максимальной степенью вершин, не превосходящей Δ, и с обхватом не менее g. Пусть $\psi(\Delta) = \min\limits_{g} \max\limits_{G \in \mathfrak{G}(\Delta,g)} \chi(G)$.

Б. Грюнбаум [1] предположил, что $\psi(\Delta) = \Delta$ при $\Delta \geq 3$, т. е. что оценка теоремы Брукса точна для графов с любым обхватом. Это предположение оказалось неверным. О. В. Бородин и А. В. Косточка [2] доказали, что $\psi(\Delta) \leq \frac{3(\Delta+2)}{4}$. Затем А. В. Косточка [3] доказал, что $\psi(\Delta) \leq \left\lfloor \frac{\Delta}{2} \right\rfloor + 2$. Наконец, Дж.-Х. Ким [4] доказал, что $\psi(\Delta) \leq (1+o(1))\frac{\Delta}{\log \Delta}$. С другой стороны, А. В. Косточка и Н. П. Мазурова [5] доказали нижнюю оценку для этой величины $\psi(\Delta) \geq \left\lfloor \frac{\Delta}{2 \ln \Delta} \right\rfloor + 1$. Однако при $\Delta \leq 8$ эта оценка становится тривиальной ($\psi(8) \geq 2$). В [5] было показано, что $\psi(8) \geq 4$. В настоящей работе

Tashkinov, V.A., On the lower bound for the chromatic number of graphs with given maximal degree and girth.

Работа поддержана РФФИ (гранты 02-01-00039 и 00-01-00916).

Поступила 1 декабря 2004 г., опубликована 9 декабря 2004 г.

доказывается, что $\psi(6) \geq 4$. Отметим также, что значения $\psi(4)$ и $\psi(5)$ не известны.

Пусть заданы неотрицательные целые числа N, M, R, k, n и N_i, $1 \leq i \leq k$, удовлетворяющие условиям

$$
\left\{\begin{array}{rcl} N, k & \geq & 2, \\ N = 2n & = & \sum_{i=1}^{k} N_i \\ 2M & \leq & N, \end{array}\right. \quad \text{и} \tag{1}
$$

а также множество помеченых вершин $V = \{v_1, \ldots, v_N\}$ и одно из $\binom{N}{N_1 \ldots N_k}$ разбиений множества V на попарно непересекающиеся подмножества $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ с $|V_i| = N_i$ для любого i, $1 \leq i \leq k$, которые в дальнейшем будут называться цветовыми классами. Для данного разбиения $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ множества V на k цветовых классов будем называть одноцветными ребра, оба конца которых содержатся в одном и том же цветовом классе.

Обозначим через $\mathfrak{M}(N, 1)$ класс всех совершенных паросочетаний на множестве вершин V. Через $\mathfrak{M}(N, R)$ обозначим класс всех R-однородных мультиграфов на этом же множестве вершин, получающихся объединением ребер R попарно различных совершенных паросочетаний из класса $\mathfrak{M}(N, 1)$. При этом считается, что мультиграфы, получающиеся из различных наборов совершенных паросочетаний различны. Наконец, пусть $\mu(N, R) = |\mathfrak{M}(N, R)|$.

Ребро, инцидентное данной вершине множества V, можно выбрать $2n - 1$ способом. Следовательно,

$$
\left\{\begin{array}{rl} \mu(2n, 1) & = (2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \quad \text{и} \\ \mu(2n, R) & = \dbinom{\mu(2n, 1)}{R}. \end{array}\right. \tag{2}
$$

Зафиксированная выше раскраска $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ вершин множества V в k цветов индуцирует разбиение класса $\mathfrak{M}(N, R)$ на подклассы по числу одноцветных ребер. Обозначим через $\mathfrak{M}_{=}(M, R, N_1, \ldots, N_k)$ и $\mathfrak{M}_{\leq}(M, R, N_1, \ldots, N_k)$ подклассы класса $\mathfrak{M}(N, R)$, состоящие из мультиграфов, содержащих ровно M или не более чем M одноцветных ребер соответственно. Пусть $\mu_{=}(M, R, N_1, \ldots, N_k) = |\mathfrak{M}_{=}(M, R, N_1, \ldots, N_k)|$ и $\mu_{\leq}(M, R, N_1, \ldots, N_k) = |\mathfrak{M}_{\leq}(M, R, N_1, \ldots, N_k)|$. Т. к. $\{\mathfrak{M}_{=}(M, R, N_1, \ldots, N_k)\}_{M=0}^{n}$ состоит из попарно непересекающихся подклассов, то

$$
\mu_{\leq}(M, R, N_1, \ldots, N_k) = \sum_{i=0}^{M} \mu_{=}(i, R, N_1, \ldots, N_k). \tag{3}
$$

Всякому мультиграфу G из $\mathfrak{M}(M, R, N_1, \ldots, N_k)$ соответствует разбиение числа M на R неупорядоченных неотрицательных слагаемых: $\sum_{i=0}^{M} i\alpha_i = M$, $\sum_{i=0}^{M} \alpha_i = R$, для которого мультиграф G получается объединением ребер α_0 совершенных паросочетаний из класса $\mathfrak{M}(0, 1, N_1, \ldots, N_k)$, $\ldots$, α_i совершенных паросочетаний из класса $\mathfrak{M}(i, 1, N_1, \ldots, N_k)$, $\ldots$. Наоборот, по всевозможным разбиениям числа M на R неупорядоченных неотрицательных слагаемых и величинам $\mu(M,1,N_1,\dots,N_k)$, можно вычислить величину

$$\mu_{=}(M,R,N_1,\dots,N_k)=\sum_{A(M,R)}\prod_{i=0}^{M}\binom{\mu_{=}(i,1,N_1,\dots,N_k)}{\alpha_i}, \tag{4}$$

где $A(M,R)=\{(\alpha_0,\dots,\alpha_M)|\ \sum_{i=0}^{M} i\alpha_i=M\ \&\sum_{i=0}^{M}\alpha_i=R\}$.

Множество из $2m$ вершин можно покрыть ребрами совершенного паросочетания $(2m-1)!!=\dfrac{(2m)!}{2^m m!}$ различными способами. Два множества одинаковой мощности n можно соединить ребрами совершенного паросочетания $n!$ различными способами. Для любого i, $1\le i\le k$, множество V_i можно разбить на k попарно непересекающихся подмножеств $V_i=\bigcup_{j=1}^{k}V_{i,j}$ с $|V_{i,j}|=N_{i,j}$ для любого j, $1\le j\le k$, $\dbinom{N_i}{N_{i,1}\dots N_{i,k}}$ различными способами. Согласованное разбиение $N_i=\sum_{j=1}^{k}N_{i,j}$ всех целых чисел N_i, $1\le i\le k$, на k неотрицательных целых слагаемых каждое так, чтобы для всех i, $1\le i\le k$, $N_{i,i}$ было четным и для всех i и j, $1\le i<j\le k$, $N_{i,j}=N_{j,i}$, существует тогда и только тогда, когда матрица $\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^{k}$ является матрицей смежности некоторого псевдографа G с помечеными вершинами $V_1,\dots,V_k$, имеющими заданные степени $deg_G V_i=N_i$, $1\le i\le k$. Пусть $N_{i,i}=2M_i$, $1\le i\le k$. Обозначим $\mathbb{N}(M;N_1,\dots,N_k)$ множество всех возможных матриц смежности псевдографов указанного вида, для которых $\sum_{i=1}^{k}M_i=M$. Число $\mu_{\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^{k}}$ совершенных паросочетаний, покрывающих множество вершин V в соответствии с матрицей $\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^{k}\in\mathbb{N}(M;N_1,\dots,N_k)$, равно $\mu_{\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^{k}}=\prod_{i=1}^{k}\left[\dbinom{N_i}{N_{i,1}\dots N_{i,k}}(N_{i,i}-1)!!\right]\prod_{1\le i<j\le k}N_{i,j}!$, т. е.

$$\mu_{\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^{k}}=\frac{\prod_{i=1}^{k}N_i!}{2^M\prod_{i=1}^{k}M_i!\prod_{1\le i<j\le k}N_{i,j}!}. \tag{5}$$

С другой стороны

$$\mu_{=}(M,1,N_1,\dots,N_k)=\sum_{\mathbb{N}(M;N_1,\dots,N_k)}\mu_{\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^{k}}. \tag{6}$$

2. О числе коротких циклов в графах из $\mathfrak{M}(N,R)$

Целью настоящей работы является доказательство существования при достаточно больших N среди графов класса $\mathfrak{M}(N,R)$ таких графов, которые имеют большое хроматическое число даже после удаления из каждого цикла длины меньше g по одному ребру. Для этого покажем сначала, что среднее число коротких циклов в графах из $\mathfrak{M}(N,R)$ не зависит от N.

Пусть $c_g(N,R)$ — общее число циклов длины меньше g во всех графах из $\mathfrak{M}(N,R)$ (каждый такой цикл на множестве V считается столько раз, сколько графов из $\mathfrak{M}(N,R)$ его содержат). Тогда

Лемма 1. *Для достаточно больших N при $R \geq 2$ имеет место*

$$\frac{c_g(N,R)}{\mu(N,R)} < (R-1)!R^g.$$

Доказательство. Пусть $1 < l < g$ произвольно. Цикл длины l при $l \geq 3$ на вершинах из V можно выбрать $\dfrac{N(N-1)\dots(N-l+1)}{2l}$ различными способами. Цикл длины 2 можно выбрать $\dfrac{N(N-1)}{2}$ различными способами. Рассмотрим произвольный цикл C длины l на вершинах из V, множество ребер которого разбито на R попарно непересекающихся подмножеств $E(C) = E_1 \cup \dots \cup E_R$ (необязательно непустых). Пусть $|E_i| = \varepsilon_i$ для всех i, $1 \leq i \leq R$. Заметим, что набор совершенных паросочетаний, из которых сформирован любой граф из $\mathfrak{M}(N,R)$, содержащий цикл C, порождает такое разбиение множества ребер цикла C на R попарно непересекающихся подмножеств, каждое из которых состоит из попарно несмежных ребер одного и того же совершенного паросочетания.

Обратно, если компоненты указанного разбиения множества ребер цикла C являются паросочетаниями, то каждую из этих компонент можно продолжить до совершенного паросочетания, сформировав тем самым граф из $\mathfrak{M}(N,R)$, содержащий цикл C. Подмножество E_i, $1 \leq i \leq R$, можно продолжить до совершенного паросочетания $(N-2\varepsilon_i-1)!!$ различными способами. Для любого мультииндекса $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_R)$ обозначим $|\varepsilon| = \sum_{i=1}^{R}\varepsilon_i$ и $\binom{l}{\varepsilon} = \binom{l}{\varepsilon_1\dots\varepsilon_R}$ (число разбиений l-элементного множества на R попарно непересекающихся подмножеств, состоящих соответственно из ε_1, …, ε_R элементов). Тогда цикл C при $l \geq 3$ содержится не более чем в

$$\sum_{|\varepsilon|=l}\binom{l}{\varepsilon}\prod_{i=1}^{R}(N-2\varepsilon_i-1)!! = (N-1)!!^R\sum_{|\varepsilon|=l}\binom{l}{\varepsilon}\prod_{i=1}^{R}\prod_{j=1}^{\varepsilon_i}\frac{1}{N-2\varepsilon_i+2j-1} \leq$$

$$(N-1)!!^R\sum_{|\varepsilon|=l}\binom{l}{\varepsilon}\prod_{i=1}^{R}\frac{1}{(N-l+1)^{\varepsilon_i}} = \frac{(N-1)!!^R}{(N-l+1)^l}R^l$$

графах из $\mathfrak{M}(N,R)$. При $l=2$ и $R \geq 2$ цикл C содержится не более чем в

$$\binom{(N-3)!!}{2}\binom{(N-1)!!-2}{R-2} \leq \frac{(N-3)!!^2}{2!}\frac{(N-1)!!^{R-2}}{(R-2)!} \leq \frac{(N-1)!!^R}{2(N-1)^2}R^2$$

графах из $\mathfrak{M}(N,R)$. Поэтому

$$c_g \le \sum_{l=2}^{g-1} \frac{\prod_{i=1}^{l}(N-i+1)}{2l} \frac{(N-1)!!^R}{(N-l+1)^l} R^l \le \frac{(N-1)!!^R}{4} \sum_{l=2}^{g-1} R^l \left(1+\frac{l-1}{N-l+1}\right)^l.$$

Заметим теперь, что

$$(N-1)!!^R = \binom{(N-1)!!}{R} \frac{R!(N-1)!!^R}{\prod_{i=1}^{R}((N-1)!!-i+1)} \le$$

$$\le \mu(N,R)R! \left(1+\frac{R-1}{(N-1)!!-R+1}\right)^R.$$

Выберем вещественное $\delta > 0$ так, чтобы $\frac{(1+\delta)^{g+R}}{2} < 1$. Тогда натуральное N всегда можно выбрать настолько большим, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\frac{R-1}{(N-1)!!-R+1} < \delta$ и $\frac{l-1}{N-l+1} < \delta$ для любого l, $1 < l < g$. Следовательно, для достаточно больших N

$$c_g \le \frac{\mu(N,R)R!}{4}(1+\delta)^R \sum_{l=2}^{g-1} R^l(1+\delta)^l \le \frac{\mu(N,R)R!}{4}(1+\delta)^R \frac{(R(1+\delta))^g-1}{R(1+\delta)-1}.$$

Т. к. при $R \ge 2$ имеет место соотношение $2(R(1+\delta)-1) \ge R$, то

$$c_g \le \mu(N,R)R! \frac{(1+\delta)^{R+g}}{2} R^{g-1} < \mu(N,R)(R-1)!R^g,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 1. *Больше половины графов из $\mathfrak{M}(N,R)$ для достаточно больших N содержат каждый не более $2(R-1)!R^g$ циклов длины меньше g.*

3. О максимуме величины $\dfrac{\prod_{i=1}^{k} N_i!}{\prod_{i=1}^{k} M_i! \prod_{1\le i<j\le k} N_{i,j}!}$

В этом разделе ограничимся рассмотрением случая $k=3$. Пусть $l(i,j)$ — единственное натуральное число из $\{1,2,3\}\setminus\{i,j\}$ для любых i, j, $1 \le i < j \le 3$.

Лемма 2. *Для любого $M \ge 0$ при достаточно больших $N = 2n$, если*

(7) $$\begin{cases} M_1+M_2+M_3 = M \quad \text{и} \\ N_{1,2}+N_{1,3}+N_{2,3} = n-M, \end{cases}$$

то величина $\frac{N_1!N_2!N_3!}{M_1!M_2!M_3!N_{1,2}!N_{1,3}!N_{2,3}!}$ принимает наибольшее значение при

(*i*) $M_{i_1} \ge M_{i_2} \ge M_{i_3}$;
(*ii*) $N_{i_1,i_2} \ge N_{i_1,i_3} \ge N_{i_2,i_3}$;
(*iii*) $M_{i_1} - M_{i_3} \le 1$ *и*
(*iv*) $N_{i_1,i_2} - N_{i_2,i_3} \le 3$,

где (i_1, i_2, i_3) *– любая перестановка чисел* $(1, 2, 3)$*, для которой* $N_{i_1} \geq N_{i_2} \geq N_{i_3}$.

Доказательство. Предположим, что при данном наборе значений переменных M_1, M_2, M_3, $N_{1,2}$, $N_{1,3}$ и $N_{2,3}$, удовлетворяющем условиям (7), величина

$$\Pi = \frac{N_1!N_2!N_3!}{M_1!M_2!M_3!N_{1,2}!N_{1,3}!N_{2,3}!}$$

принимает свое наибольшее значение. Такое предположение корректно, поскольку рассматриваемая величина принимает лишь конечное число (натуральных!) значений.

Пусть индексы i и j, $1 \leq i < j \leq 3$, произвольны. Рассмотрим набор значений переменных, получающийся из данного, добавлением единицы к M_j и вычитанием единицы из M_i. На этом наборе рассматриваемая величина принимает значение

$$\Pi' = \frac{(N_i-2)!(N_j+2)!N_{l(i,j)}!}{(M_i-1)!(M_j+1)!M_{l(i,j)}!N_{1,2}!N_{1,3}!N_{2,3}!}.$$

Обозначим $R_{i,j} = \dfrac{\Pi'}{\Pi}$. Тогда в силу максимальности выбора Π

$$R_{i,j} = \frac{(N_j+1)(N_j+2)M_i}{(N_i-1)N_i(M_j+1)} \leq 1 \quad \text{для всех } i,\ j,\ 1 \leq i < j \leq 3. \tag{8}$$

Аналогично, если рассмотрим набор значений переменных, получающийся из данного, добавлением единицы к $N_{j,l(i,j)}$ и вычитанием единицы из $N_{i,l(i,j)}$. На этом наборе рассматриваемая величина принимает значение

$$\Pi' = \frac{(N_i-1)!(N_j+1)!N_{l(i,j)}!}{M_1!M_2!M_3!N_{i,j}!(N_{i,l(i,j)}-1)!(N_{j,l(i,j)}+1)!}.$$

Обозначим $S_{i,j} = \dfrac{\Pi'}{\Pi}$. Тогда в силу максимальности выбора Π

$$S_{i,j} = \frac{(N_j+1)N_{i,l(i,j)}}{N_i(N_{j,l(i,j)}+1)} \leq 1 \quad \text{для всех } i,\ j,\ 1 \leq i < j \leq 3. \tag{9}$$

1. Если $N_i \geq N_j$, то $M_i \geq M_j$.
   В самом деле, если $M_i + 1 \leq M_j$, то
   $$R_{j,i} = \frac{(N_i+1)(N_i+2)M_j}{(N_j-1)N_j(M_i+1)} \geq \frac{(N_i+1)(N_i+2)}{(N_j-1)N_j} > 1,$$
   что противоречит условию (8).
2. Если $N_i \geq N_j$, то $N_{i,l(i,j)} \geq N_{j,l(i,j)}$.
   В самом деле, если $N_{i,l(i,j)} + 1 \leq N_{j,l(i,j)}$, то
   $$S_{j,i} = \frac{(N_i+1)N_{j,l(i,j)}}{N_j(N_{i,l(i,j)}+1)} \geq \frac{(N_i+1)}{N_j} > 1,$$
   что противоречит условию (9).

Изменим теперь нумерацию переменных так, чтобы было

$$N_1 \geq N_2 \geq N_3. \tag{10}$$

Тогда в силу пунктов 1 и 2

3. $M_1 \geq M_2 \geq M_3$ и
4. $N_{1,2} \geq N_{1,3} \geq N_{2,3}$.

Отсюда сразу следует, что

5. $N_{1,2} \geq \dfrac{n-M}{3}$.
6. $N_3 > 0$ при достаточно большом N.
   В самом деле, если $N_3 = 0$, то $M_3 = N_{1,3} = N_{2,3} = 0$. Рассмотрим набор значений переменных, получающийся из данного, прибавлением к $N_{1,3}$ и к $N_{2,3}$ по единице и вычитанием двойки из $N_{1,2}$. На этом наборе рассматриваемая величина принимает значение
   $$\Pi' = \frac{(N_1-1)!(N_2-1)!(N_3+2)!}{M_1!M_2!M_3!(N_{1,2}-2)!(N_{1,3}+1)!(N_{2,3}+1)!}.$$
   Обозначим $T = \dfrac{\Pi'}{\Pi}$. Тогда $T = \dfrac{(N_3+2)(N_3+1)(N_{1,2}-1)N_{1,2}}{N_1N_2(N_{1,3}+1)(N_{2,3}+1)} =$
   $$1 + \frac{2N_{1,2}(N_{1,2}-1)-(N_{1,2}+2M_1)(N_{1,2}+2M_2)}{N_1N_2}.$$
   В силу пункта 5 значение квадратного трехчлена от переменной $N_{1,2}$ в числителе растет с ростом $N = 2n$. Поэтому $T > 1$ для достаточно большого N, вопреки максимальности выбора Π.
7. $M_1 - M_3 > 0$.
   В самом деле, неравенство (9) для $i = 1$ и $j = 3$ эквивалентно неравенству
   $$(N_3+1)N_{1,2} \leq N_1(N_{2,3}+1),$$
   которое, в свою очередь, легко преобразовывается в
   $$(N_{1,3}+2M_3)(N_{1,2}-N_{2,3}-1) \leq 2(M_1-M_3)(N_{2,3}+1).$$
   Т. к. по пункту 6 $N_3 > 0$, а $N_{2,3} \leq N_{1,3}$, то $N_{1,3}+2M_3 > 0$. Поэтому
   $$N_{1,2} - N_{2,3} \leq 1 + \frac{2(M_1-M_3)(N_{2,3}+1)}{N_{1,3}+2M_3}. \tag{11}$$
   Но при $M_1 = M_3$ отсюда сразу следует $N_{1,2} - N_{2,3} \leq 1$, что и требуется доказать.
8. $M_1 - M_3 \leq 1$ при достаточно большом N.
   В самом деле, неравенство (8) для $i = 1$ и $j = 3$ эквивалентно неравенству
   $$0 \geq (N_3+1)(N_3+2)M_1 - (N_1-1)N_1(M_3+1) =$$
   $$(M_1-M_3-1)N_1(N_1-1)-$$
   $$M_1[(N_{1,2}-N_{2,3})+2(M_1-M_3-1)](N_1+N_3+1).$$
   Если $M_1 = 0$, то $M_3 = 0$ и, следовательно, $M_1 - M_3 = 0$, вопреки пункту 7. Пусть $M_1 > 0$. Тогда рассматриваемое неравенство можно записать в виде
   $$(M_1-M_3-1)\left[\frac{N_1(N_1-1)}{M_1(N_1+N_3+1)} - 2\right] \leq$$
   $$N_{1,2} - N_{2,3} \leq 1 + \frac{2(M_1-M_3)(N_{2,3}+1)}{N_{1,3}+2M_3} \leq$$
   $$1 + \frac{2(M_1-M_3)[(N_{1,3}+2M_3)+2(M_1-M_3)-(2M_1-1)]}{N_{1,3}+2M_3} \leq$$

$$1 + 4(M_1 - M_3)^2 \leq 5 + (M_1 - M_3 - 1)4(M + 1).$$

С другой стороны, поскольку $N_1 \geq \dfrac{N}{3}$, $N_2 \geq 1$, т. е. $N_1 + N_3 + 1 \leq N$, и $M_1 - M_3 - 1 \geq 1$, то

$$5 \geq \left[\frac{N_1(N_1-1)}{M_1(N_1+N_3+1)} - 4M - 6\right] \geq \frac{(N-3)}{9M} - 4M - 6,$$

что невозможно для достаточно больших N.

9. $N_{1,2} - N_{2,3} \leq 3$ при достаточно большом N.
В самом деле, в силу пунктов 7 и 8 $M_1 = M_3 + 1$. Поэтому, если $N_{1,2} - N_{2,3} \geq 4$, то неравенство (11) можно переписать в виде

$$\frac{2(N_{2,3}+1)}{N_{1,3}+2M_3} \geq N_{1,2} - N_{2,3} - 1 \geq 3, \text{ т. е.}$$

$$3(N_{1,3} - N_{2,3}) + 6M_3 \leq 2 - N_{2,3}$$

Отсюда сразу следует, что $M_3 = N_{1,3} - N_{2,3} = 0$ и, следовательно, $N_{1,3} = N_{2,3} \leq 2$. Учитывая это, неравенство (11) можно переписать в виде

$$N_{1,2} \leq 1 + N_{2,3} + 2 + \frac{2}{N_{1,3}} \leq 7.$$

Это невозможно при достаточно больших N.

□

4. О числе графов из $\mathfrak{M}(N,R)$, имеющих малое число одноцветных ребер

Лемма 3. *Предположим, что для некоторых констант c_1 и c_2 максимум величины* $\dfrac{\prod_{i=1}^{k} N_i!}{\prod_{i=1}^{k} M_i! \prod_{1\leq i<j\leq k} N_{i,j}!}$ *при* $\sum_{i=1}^{k} M_i = M$ *и* $\sum_{1\leq i<j\leq k} N_{i,j} = n - M$ *при достаточно больших N достигается на значениях переменных, удовлетворяющих условиям* $\max_{1\leq i\leq k} M_i - \min_{1\leq i\leq k} M_i \leq c_1$ *и* $\max_{1\leq i<j\leq k} N_{i,j} - \min_{1\leq i<j\leq k} N_{i,j} \leq c_2$. *Тогда для достаточно больших N*

$$\frac{\mu_{\leq}(M,R,N_1,\ldots,N_k)}{\mu(N,R)} < C(k,M,R)N^{c(k,M,R)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{Rn}. \tag{12}$$

Доказательство. Сначала, используя равенства (2) и формулу Стирлинга в виде неравенств

$$C_1\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < C_2\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

оценим снизу величину

$$\mu(N,R) = \binom{\mu(N,1)}{R} \geq \frac{(\mu(N,1)-R+1)^R}{R!} = \frac{(\mu(N,1))^R}{R!}\left(1 - \frac{R-1}{\mu(N,1)}\right)^R \geq$$

$$C'(R)\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^R > C'(R)\left(\frac{C_1\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^n C_2\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right)^R = C(R)\left(\frac{2n}{e}\right)^{Rn}.$$

Заметим теперь, что для любых неотрицательных целых $k > 0$ и $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_k$, если $A_1 + \dots + A_k = A$ и $A_1 - A_k = c$, то

$$\frac{A-(k-1)c}{k} \leq A_k \leq A_1 \leq \frac{A+(k-1)c}{k}. \tag{13}$$

В самом деле, $A \leq A_k + (k-1)A_1 = kA_k + (k-1)c$, т.е. $A_k \geq \dfrac{A-(k-1)c}{k}$. Правое неравенство доказывается аналогично.

Используя неравенства (13), оценим снизу для достаточно больших N ту часть знаменателя формулы (5), которая зависит от N.

$$\prod_{1\leq i<j\leq k} N_{i,j}! \geq N_{k-1,k}!^{\frac{k(k-1)}{2}} \geq \left[\left(\frac{n-M-c_2\left(\frac{k(k-1)}{2}-1\right)}{\frac{k(k-1)}{2}}\right)!\right]^{\frac{k(k-1)}{2}} >$$

$$\left[C_1\sqrt{\frac{2n-2M-x}{k(k-1)}}\left(\frac{2n-2M-x}{k(k-1)e}\right)^{\frac{2n-2M-x}{k(k-1)}}\right]^{\frac{k(k-1)}{2}} >$$

$$C_1''(k,M)n^{\frac{k(k-1)}{4}}\left(\frac{2n}{k(k-1)e}\right)^{n-M-\frac{x}{2}} = C''(k,M)n^{c''(k,M)}\left(\frac{2n}{k(k-1)e}\right)^n,$$

где $x = c_2(k+1)(k-2))$. Совершенно аналогично для достаточно больших N оценивается сверху числитель формулы (5).

$$\prod_{i=1}^{k} N_i! \leq N_1!^k \leq (2M_1+(k-1)N_{1,2})!^k \leq \left[\left(\frac{2n+2c_1(k-1)+x}{k}\right)!\right]^k <$$

$$C_2'(k)n^{\frac{k}{2}}\left(\frac{2n}{ke}\right)^{2n+2c_1(k-1)+x} = C'(k)n^{c'(k)}\left(\frac{2n}{ke}\right)^{2n}.$$

Таким образом

$$\mu_{\|N_{i,j}\|_{i,j=1}^k} < \frac{C'(k)n^{c'(k)}\left(\frac{2n}{ke}\right)^{2n}}{2^M\prod_{i=1}^k M_i! C''(k,M)n^{c''(k,M)}\left(\frac{2n}{k(k-1)e}\right)^n} \leq$$

$$C_0(k,M)n^{c_0(k,M)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\left(\frac{2n}{e}\right)^n.$$

Как известно, число $P(m,k)$ представлений неотрицательного целого числа m в виде упорядоченной суммы k неотрицательных целых чисел равно

$\binom{m+k-1}{k-1}$. Поэтому на k помеченных вершинах существует

$$\binom{M+k-1}{k-1}\binom{n-M+\frac{k(k-1)}{2}-1}{\frac{k(k-1)}{2}-1} \le C_3(k,M)n^{c_3(k)}$$

различных псевдографов, имеющих n ребер, M из которых являются петлями. Таким образом,

$$\mu_{=}(M,1,N_1,\dots,N_k) < C_0(k,M)n^{c_0(k,M)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\left(\frac{2n}{e}\right)^n|\mathbb{N}(M;N_1,\dots,N_k)| \le$$

$$C_4(k,M)n^{c_4(k,M)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\left(\frac{2n}{e}\right)^n.$$

Поскольку $A(M,R) \subseteq A(R) = \{(\alpha_0,\dots,\alpha_M)|\ \sum_{i=0}^{M}\alpha_i = R\}$, то

$$\sum_{A(M,R)}\prod_{i=0}^{M}\frac{1}{\alpha_i!} \le \frac{1}{R!}\sum_{A(R)}\frac{R!}{\alpha_1!\dots\alpha_M!} = \frac{M^R}{R!}.$$

Поэтому по формуле (4)

$$\mu_{=}(M,R,N_1,\dots,N_k) \le \sum_{A(M,R)}\prod_{i=0}^{M}\frac{[\mu_{=}(i,1,N_1,\dots,N_k)]^{\alpha_i}}{\alpha_i!} <$$

$$C_5(k,M,R)n^{c_5(k,M,R)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{Rn}\left(\frac{2n}{e}\right)^{Rn}.$$

Наконец, по формуле (3)

$$\frac{\mu_{\le}(M,R,N_1,\dots,N_k)}{\mu(N,R)} = \sum_{i=0}^{M}\frac{\mu_{=}(i,R,N_1,\dots,N_k)}{\mu(N,R)} <$$

$$\sum_{i=0}^{M}\frac{C_5(k,M,R)n^{c_5(k,M,R)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{Rn}\left(\frac{2n}{e}\right)^{Rn}}{C(R)\left(\frac{2n}{e}\right)^{Rn}} \le C(k,M,R)n^{c(k,M,R)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{Rn},$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 2. *В условиях леммы 3 при $(k-1)^R < k^{R-2}$ для любого M при достаточно больших N почти все графы из $\mathfrak{M}(N,R)$ содержат более M одноцветных ребер относительно любого разбиения множества V на k цветовых классов.*

Доказательство. $2n$-элементное множество V можно разбить на k цветовых классов k^{2n} различными способами. Следовательно, отношение числа графов из $\mathfrak{M}(N,R)$, имеющих не более M одноцветных ребер относительно хотя бы одного разбиения множества V на k цветовых классов, к общему числу графов в $\mathfrak{M}(N,R)$ не превосходит

$$k^{2n}\frac{\mu_{\le}(M,R,N_1,\dots,N_k)}{\mu(N,R)} < k^{2n}C(k,M,R)n^{c(k,M,R)}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{Rn} =$$

$$C(k,M,R)n^{c(k,M,R)}\left(\frac{(k-1)^R}{k^{R-2}}\right)^n \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 3. *Для любого $g \geq 3$ существует обыкновенный граф G с максимальной степенью вершин $\Delta(G) \leq 6$ и обхватом не менее g, который имеет хроматическое число $\chi(G) \geq 4$.*

Доказательство. В силу леммы 2 все условия леммы 3 для $k = 3$ и $R = 6$ выполнены. Кроме того $(k-1)^R = 64 < 81 = k^{R-2}$. Поэтому в силу следствия 2 при достаточно больших N почти все графы из $\mathfrak{M}(N,6)$ содержат больше $2\cdot 5!6^g$ одноцветных ребер относительно любого разбиения множества V на 3 цветовых класса. В силу следствия 1 для достаточно больших N больше половины графов из $\mathfrak{M}(N,6)$ содержат каждый не более $2\cdot 5!6^g$ циклов длины меньше g. Следовательно, при достаточно больших N в $\mathfrak{M}(N,6)$ найдется граф G, который содержит не более $2\cdot 5!6^g$ циклов длины меньше g и который имеет больше $2\cdot 5!6^g$ одноцветных ребер относительно любого разбиения множества V на 3 цветовых класса. Но тогда после удаления одного ребра из каждого цикла графа G, имеющего длину меньше g, получится граф G' с максимальной степенью вершин $\Delta(G') \leq 6$ и с обхватом не менее g, в котором относительно каждого разбиения множества V на 3 цветовых класса найдется хотя бы одно одноцветное ребро. Это означает, что $\chi(G) \geq 4$, что и требовалось. □

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность А. В. Косточке и Д. Г. Фон-Дер-Флаассу за помощь, оказанную во время подготовки этой работы к опубликованию.

Список литературы

[1] B. Grünbaum, *A problem in graph coloring*, Amer. Math. Monthly, **77**:10 (1970), 1088-1092.

[2] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, *On an upper bound of a graph's chromatic number, depending on the graph's degree and density*, J. Combinatorial Theory Ser. B, **23** (1977), 247–250.

[3] A. V. Kostochka, *Degree, girth and chromatic number*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, 679–696, Colloq. Math. Soc. Ja'nos Bolyai, 18, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[4] J.-H. Kim, *On Brooks' theorem for sparse graphs*, Combin. Probab. Comput., **4** (1995), 97–132

[5] А. В. Косточка, Н. П. Мазурова, *Одна оценка в теории раскраски графов*, Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач, **30** (1977), С. 23-29.

Владимир Александрович Ташкинов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: valet@math.nsc.ru