S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 35–37 (2004) УДК 512.57
MSC 08A55, 08C15

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ЧАСТИЧНЫХ АЛГЕБР С ПОМОЩЬЮ ПРЕДЕЛОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЙ

М. С. ШЕРЕМЕТ

Abstract. It is proved that a class of partial algebras is a quasivariety if and only if it is closed under surjective direct limits and subdirect products.

В работе изучаются квазимногообразия частичных алгебр для сильного равенства, т. е. классы частичных алгебр, определимые предложениями вида

$$(\forall\overline{x})\Big(\bigwedge_{i<n} s_i(\overline{x}) \approx t_i(\overline{x}) \to s_n(\overline{x}) \approx t_n(\overline{x})\Big),$$

где равенство $s(\overline{x}) \approx t(\overline{x})$ считается выполненным на наборе $\overline{a}$ элементов частичной алгебры $\mathcal{A}$, тогда и только тогда, когда соответствующие значения $s^{\mathcal{A}}(\overline{a})$ и $t^{\mathcal{A}}(\overline{a})$ определены и совпадают.

Такие классы частичных алгебр привлекают к себе заметное внимание исследователей. В частности, аналогично случаю алгебраических систем было найдено множество характеризаций (в терминах замкнутости относительно различных алгебраических операторов) для квазимногообразий частичных алгебр [5]. Тем не менее, открытым оставался вопрос о возможности их характеризации в терминах подпрямых произведений и сюръективных прямых пределов, подобно тому, как для систем это было сделано в [1]. В данной статье дается положительный ответ на этот вопрос.

Условимся в дальнейшем под термином *алгебра* понимать частичную алгебру некоторой фиксированной сигнатуры Ω. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ — это

Sheremet, M. S., A characterization of quasivarieties of partial algebras by means of limits and products.

Работа выполнена при поддержке гранта 03-51-4110 INTAS.

Поступила 13 июля 2004 г., опубликована 16 сентября 2004 г.

множество A, снабженное операциями $f^{\mathcal{A}}$ $(f \in \Omega)$ треубемой арности. Необходимые нам понятия гомоморфизма, подалгебры, прямого предела и (под)прямого произведения вполне аналогичны случаю полных алгебр; при необходимости читатель может найти их, например, в [2] или [5].

Пусть $\mathbf{K}$ — класс алгебр, X — некоторое множество, а Σ — некоторое множество соотношений вида $s \approx t$, где s, t — термы от переменных из X. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *определенной в* $\mathbf{K}$ *соотношениями* Σ *в порождающих сиволах* X, если $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ и существует отображение $v : X \to A$ со следующими свойствами:

1) $\mathcal{A}$ порождается элементами $v(X)$ и все равенства из Σ выполняются в $\mathcal{A}$ при означивании v.
2) Если равенства Σ выполняются в алгебре $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$ при означивании $w : X \to B$, то существует гомоморфизм $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ такой, что $w = uv$.

В этом случае будем называть $v(x)$ порождающим элементом, соответствующим символу $x \in X$.

Стандартным образом (см., например, [4]) можно доказать, что если $\mathbf{K}$ замкнут относительно подалгебр и прямых произведений, то любые множества порождающих символов X и соотношений Σ определяют в $\mathbf{K}$ некоторую алгебру.

Пусть $\mathbf{P_s}$ и $\underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}$ обозначают соответственно операторы взятия подпрямых произведений и прямых пределов по сюръективным гомоморфизмам. Пусть также $\mathbf{Q}(\mathbf{K})$ обозначает наименьшее квазимногообразие, содержащее данный класс алгебр $\mathbf{K}$.

ТЕОРЕМА. *Для любого класса алгебр* $\mathbf{K}$ *верно* $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}\mathbf{P_s}(\mathbf{K})$.

Доказательство. Известно [5], что истинность квазитождеств сохраняется при взятии подалгебр, прямых произведений и пределов. Следовательно, имеет место включение справа налево. Остается доказать обратное.

Воспользуемся идеей, реализованной в [3] и [1]. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, удовлетворяющая всем квазитождествам, истинным на $\mathbf{K}$. Пусть D — множество всех истинных на $\mathcal{A}$ предложений вида $f(\overline{a}) \approx b$ с константами из $\mathcal{A}$. Для любого $H \subseteq D$ существует алгебра $\mathcal{F}_H$, определенная в классе $\mathbf{SP}(\mathbf{K})$ множеством соотношений H в порождающих символах a, $a \in A$.

Пусть a_H — порождающий элемент алгебры $\mathcal{F}_H$, соответствующий порождающему символу $a \in A$. По определению для любого $H \subseteq D$ существует сюръективный гомоморфизм $\varphi_H : \mathcal{F}_H \to \mathcal{A}$, переводящий a_H в a $(a \in A)$; а для любых $G \subseteq H \subseteq D$ существует гомоморфизм $\varphi_{GH} : \mathcal{F}_G \to \mathcal{F}_H$, переводящий a_G в a_H $(a \in A)$. Ясно, что $\varphi_G = \varphi_H\varphi_{GH}$, $G \subseteq H \subseteq D$. (Заметим, что в отличие от полного случая гомоморфизмы φ_{GH} не обязаны быть сюръективными — чем больше соотношений, тем большее число термов от порождающих может быть определено.)

Для каждого $H \subseteq D$ выберем некоторую алгебру $\overline{\mathcal{F}_H} \in \mathbf{P}(\mathbf{K})$, для которой $\mathcal{F}_H \leqslant \overline{\mathcal{F}_H}$. Пусть I — множество конечных подмножеств в D. Для $i \in I$ положим $\uparrow\! i = \{j \in I \mid i \subseteq j\}$. Рассмотрим $\overline{\mathcal{G}_i} = \prod\limits_{j \in \uparrow i} \overline{\mathcal{F}_j}$ и

$$G_i = \bigl\{g \in \overline{G_i} \bigm| (\exists j \in \uparrow\! i)(\forall k \in \uparrow\! j)\bigl(g(j) \in F_j \wedge \varphi_{jk}(g(j)) = g(k)\bigr)\bigr\}, \tag{1}$$

для всех $i \in I$. Тогда G_i — носитель подпрямого произведения алгебр $\overline{\mathcal{F}_j}$, $j \in \uparrow\! i$. Поэтому $\mathcal{G}_i \in \mathbf{P_s}(\mathbf{K})$ для всех $i \in I$. Для произвольных $i \subseteq j$ в I определим гомоморфизм $\psi_{ij} : \mathcal{G}_i \to \mathcal{G}_j$ по правилу $\big[\varphi_{ij}(g)\big](k) = g(k)$, $k \in {\uparrow}j$. Тогда все ψ_{ij} сюръективны и $(I, \mathcal{G}_i, \psi_{ij})$ является прямым семейством.

Обозначим $\mathcal{G}_\infty$ — предел этого семейства и $\psi_{i\infty} : \mathcal{G}_i \to \mathcal{G}_\infty$ — предельные гомоморфизмы, $i \in I$. Пусть $g \in G_i$ и j, k как в (1). Тогда $\varphi_k(g(k)) = \varphi_k\varphi_{jk}(g(j)) = \varphi_j(g(j))$, т. е. от выбора j этот элемент не зависит — обозначим его $\psi_i(g)$. Нетрудно проверить, что соответствие ψ_i будет гомоморфизмом из $\mathcal{G}_i$ на $\mathcal{A}$, причем $\psi_i = \psi_j\psi_{ij}$ для всех $i \subseteq j$ в I. Поэтому согласно свойствам прямого предела существует гомоморфизм ψ_∞ из $\mathcal{G}_\infty$ на $\mathcal{A}$ такой, что $\psi_i = \psi_\infty\psi_{i\infty}$ для всех $i \in I$.

Покажем, что ψ_∞ — изоморфизм. Допустим, значение $f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})$ определено и равно a_n ($f \in \Omega$, $a_r \in A$). Рассмотрим $g_r \in G_\varnothing$ такие, что $\psi_\varnothing(g_r) = a_r$, $r \leqslant n$. Требуется доказать, что $\mathcal{G}_\infty \vDash f(\psi_{\varnothing\infty}(g_0, \dots, g_{n-1})) \approx \psi_{\varnothing\infty}(g_n)$. Для каждого g_r выберем j_r как в (1), т. е. такое, что $a_r = \varphi_{j_r}(g_r(j_r))$. И пусть $k = j_0 \cup \dots \cup j_n \cup \{f(a_0, \dots, a_{n-1}) \approx a_n\}$. Тогда $g_r(k) = (a_r)_k$ — порождающий элемент $\mathcal{F}_k$, соответствующий символу a_k, и $\mathcal{F}_k \vDash f(g_0(k), \dots, g_{n-1}(k)) \approx g_n(k)$. Следовательно, $\mathcal{G}_k \vDash f(\psi_{\varnothing k}(g_0, \dots, g_{n-1}) \approx \psi_{\varnothing k}(g_n)$, поскольку $[\psi_{\varnothing k}(g_r)](l) = g(l)$ для всех $l \in {\uparrow}k$ и $r \leqslant n$. В силу свойств прямого предела получаем требуемое.

Таким образом, ψ_∞ — изоморфизм $\mathcal{G}_\infty$ на $\mathcal{A}$. В частности, $\mathcal{A} \in \underrightarrow{\mathbf{L}}_{\mathbf{s}}\mathbf{P}_{\mathbf{s}}(\mathbf{K})$. $\square$

Список литературы

[1] В. А. Горбунов, В. И. Туманов, *Строение решеток квазимногообразий*, Труды Ин-та матем. СО АН СССР, **2** (1982), 12–44.

[2] В. А. Горбунов, М. С. Шеремет, *Хорновы классы предикатных систем и многообразия частичных алгебр*, Алгебра и логика, **39**:1 (2000), 23–36.

[3] С. Р. Когаловский, *К теореме Биркгофа*, Успехи матем. наук, **20**:5 (1965), 206-207.

[4] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, М.: Наука, 1970.

[5] P. Burmeister, *A model-theoretic oriented approach to partial algebras. Part I*, Berlin: Academie-Verlag, 1986.

Михаил Сергеевич Шеремет
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: sheremet@math.nsc.ru