S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 24–34 (2004)

УДК 510.64, 512.57
MSC 08B05, 08A55

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ ДЛЯ ЛОГИКИ ТОЖДЕСТВ ЭВАНСА

М. С. ШЕРЕМЕТ

Abstract. A complete and sound, relative to the notion of validity introduced by T. Evans, set of inference rules is constructed for identities of partial algebras.

В настоящей работе исследуется понятие истинности тождеств на частичных алгебрах, введенное Т. Эвансом [1]. Известно, что для алгебр с частичными операциями истинность формального равенства термов может быть естественно определена более чем одним способом. Пусть $t^{\mathcal{A}}[v]$ обозначает значение терма t (если оно определено) на частичной алгебре $\mathcal{A}$ при означивании переменных v. В различных работах по частичным алгебрам можно встретить следующие варианты определения истинности тождеств:

— тождество $s \approx t$ называется истинным сильно на частичной алгебре $\mathcal{A}$, если для любого означивания переменных v значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определены и совпадают (см., например, [2]);

— тождество $s \approx t$ называется истинным слабо на $\mathcal{A}$, если для любого означивания v из того, что значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определены, следует, что они совпадают (см. [3, 2]);

— тождество $s \approx t$ называется истинным (по Клини) на $\mathcal{A}$, если для любого означивания v из того, что одно из значений $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определено, следует, что определено другое и они совпадают (см. [3, 4]).

Для всех перечисленных выше случаев полные и корректные системы правил вывода были построены, см. [5, 6, 4] соответственно.

Sheremet, M. S., Completeness theorem for the Evans logic of identities.

Работа выполнена при поддержке гранта E 02-1.0-32 Министерства образования РФ и гранта 03-51-4110 INTAS.

Поступила 27 мая 2004 г., опубликована 16 сентября 2004 г.

В настоящей работе мы следуем определению, данному в [1], которое отличается от упомянутых выше. Нестрого говоря, тождество α считается истинным на частичной алгебре $\mathcal{A}$, если основные операции $\mathcal{A}$ нельзя доопределить согласно α. Формальное определение состоит в следующем. Тождество $s \approx t$ называется *истинным* на частичной алгебре $\mathcal{A}$ (обозначается $\mathcal{A} \vDash s \approx t$) если для любого означивания переменных v выполняются следующие условия:

— если значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определены, то они совпадают;
— если s имеет вид $f(s_0, \ldots, s_{m-1})$ для некоторого символа операции f и значения $t^{\mathcal{A}}[v]$ и $s_i^{\mathcal{A}}[v]$, $i < m$, определены, то значение $s^{\mathcal{A}}[v]$ также определено;
— если t имеет вид $g(t_0, \ldots, t_{n-1})$ для некоторого символа операции g и значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t_i^{\mathcal{A}}[v]$, $i < n$, определены, то значение $t^{\mathcal{A}}[v]$ также определено (см. [1, стр. 66]).

Определение, введенное Т. Эвансом, было направлено на решение следующей задачи: можно ли для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ полных алгебр указать способ аксиоматизации класса всех частичных подалгебр алгебр из $\mathbf{V}$? Задача такого рода возникла в связи с его исследованиями по разрешимости проблемы равенства слов [1, 7]. Оказывается, что если Σ — базис тождеств многообразия $\mathbf{V}$, то истинность Σ на частичной алгебре $\mathcal{A}$ является необходимым (а в определенных случаях и достаточным) условием того, что $\mathcal{A}$ является “частью” некоторой алгебры из $\mathbf{V}$. (В этой связи следует упомянуть также работу А. И. Мальцева [8].)

В настоящей работе строится полная и корректная система правил вывода тождеств для данного понятия истинности.

Автор выражает глубокую благодарность Л. Л. Максимовой за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения, а также за многочисленные замечания, позволившие улучшить изложение.

Автор также весьма признателен рецензенту, указавшему несколько существенных исправлений.

1.. **Основные определения. Доказательство корректности.** Пусть Ω — произвольная функциональная сигнатура. Всюду далее под *алгеброй* понимается частичная алгебра сигнатуры Ω. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}$ — это множество A вместе с семейством $f^{\mathcal{A}}$ ($f \in \Omega$) частичных функций на A. Зафиксируем также некоторое счетное множество переменных X и пусть T обозначает множество всех термов сигнатуры Ω от переменных из X.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра и $v : X \to A$ — произвольное отображение. Для терма $t \in T$ стандартным образом определяется его *значение* $t^{\mathcal{A}}[v]$ в алгебре $\mathcal{A}$ при означивании v:

если $t \in X$, то значение $t^{\mathcal{A}}[v]$ определено и равно $v(t)$;

если $t = f(t_0, \ldots, t_{n-1})$, где $f \in \Omega$, то значение $t^{\mathcal{A}}[v]$ определено и равно элементу $a \in A$ тогда и только тогда, когда все значения $t_i^{\mathcal{A}}[v]$ определены и значение частичной функции $f^{\mathcal{A}}$ на элементах $t_0^{\mathcal{A}}[v], \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}[v]$ определено и равно a.

Если $t \in T$ и $w : X \to T$, то $t[w]$ обозначает результат подстановки в t терма $w(x)$ вместо переменной x (для всех $x \in X$). В этом случае $t[w]$ совпадает со значением $t^{\mathcal{T}}[w]$, где $\mathcal{T}$ — полная алгебра всех Ω-термов от переменных X. Если

S — множество термов, то $S[w]$ обозначает множество $\{t[w] \mid t \in S\}$. Конечные последовательности вида $u_0, \ldots, u_n$ часто будем обозначать кратко $\overline{u}$.

Для $s, t \in T$ рассмотрим множество термов $Ev(s,t)$, определенное следующим образом:

$$Ev(s,t) = \begin{cases} \{s,t\}, & \text{если } t \text{ — переменная;} \\ \{s, t_0, \ldots, t_{n-1}\}, & \text{если } t = f(t_0, \ldots, t_{n-1}),\ f \in \Omega. \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{A} \vDash s \approx t$ равносильно следующему условию: для любого отображения $v : X \to A$ если все термы из $Ev(s,t)$ или все термы из $Ev(t,s)$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v, то значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определены и совпадают.

Рассмотрим правила Rf, Sy и Rp, определенные по следующим схемам.

$$Rf:\ \frac{\varnothing}{x \approx x}\ (x \in X); \qquad Sy:\ \frac{s \approx t}{t \approx s}\ (s, t \in T);$$

$$Rp:\ \frac{u_0 \approx v_0,\ \ldots,\ u_{n-1} \approx v_{n-1}}{f(u_0, \ldots, u_{n-1}) \approx f(v_0, \ldots, v_{n-1})}\ (u_i, v_i \in T,\ f \in \Omega).$$

Пусть также Sb^{Ev} обозначает правило, определенное схемой

$$\frac{s \approx t}{s[v] \approx t[v]}\ (s, t \in T,\ v : X \to T),$$

где на v накладываются следующие условия: если s — переменная, то $v(s)$ — также переменная или s входит в t; если t — переменная, то $v(t)$ — также переменная или t входит в s.

ЛЕММА 1. *Правила Rf, Sy, Rp и Sb^{Ev} сохраняют истинность тождеств.*

Доказательство. Для правил Rf и Sy утверждение леммы очевидно. Рассмотрим правило Rp. Пусть $\mathcal{A} \vDash u_0 \approx v_0, \ldots, u_{n-1} \approx v_{n-1}$. И пусть значения термов $f(u_0, \ldots, u_{n-1})$ и $v_0, \ldots, v_{n-1}$ определены на алгебре $\mathcal{A}$ при некотором означивании $w : X \to A$. Тогда по предположению $u_i^{\mathcal{A}}[w] = v_i^{\mathcal{A}}[w]$, $i < n$. Следовательно, значение $f(\overline{v})^{\mathcal{A}}[w]$ определено и равно $f(\overline{u})^{\mathcal{A}}[w]$.

Рассмотрим правило Sb^{Ev}. Пусть $\mathcal{A} \vDash s \approx t$ и $x_0, \ldots, x_{m-1}$ — в точности все переменные, входящие в s или в t. Тогда при выполнении условий в правиле Sb^{Ev} получаем, что для каждого $i < m$ либо терм $v(x_i)$ является собственным подтермом терма $s[v]$ или терма $t[v]$, либо $v(x_i) = s[v] = t[v]$. Предположим, что все термы из множества $Ev(s[v], t[v])$ (или из множества $Ev(t[v], s[v])$) определены в алгебре $\mathcal{A}$ при некотором означивании $w : X \to A$. Тогда получим, в частности, что определены все значения $v(x_i)^{\mathcal{A}}[w]$, $i < m$. Рассмотрим произвольное отображение $w' : X \to A$ для которого $w'(x_i) = v(x_i)^{\mathcal{A}}[w]$, $i < m$. Тогда в алгебре $\mathcal{A}$ при означивании w' будут определены все термы из множества $Ev(s,t)$ (из множества $Ev(t,s)$, соответственно). Поскольку $\mathcal{A} \vDash s \approx t$, получаем, что определены значения $s^{\mathcal{A}}[w'] = s[v]^{\mathcal{A}}[w]$, $t^{\mathcal{A}}[w'] = t[v]^{\mathcal{A}}[w]$ и они совпадают. □

Тождество $s \approx t$ назовем *неправильным справа*, если t — переменная и t не входит в s. Будем говорить, что тождество $s \approx t$ *неправильное*, если $s \approx t$ или $t \approx s$ является неправильным справа; в противном случае тождество $s \approx t$ будем называть *правильным*.

Таким образом, что если $s \approx t$ — правильное тождество, то для любого отображения $v : X \to T$ переход $s \approx t/s[v] \approx t[v]$ является применением правила Sb^{Ev}. Отметим, что для рассматриваемого нами понятия истинности тождеств ни правило подстановки (без ограничений) ни правило транзитивности действительно не являются корректными.

Пример 1. Пусть f и g — различные символы операций, скажем, одноместные, а x и y — различные переменные. Тогда тождество $f(x) \approx g(y)$ может быть получено из тождества $f(x) \approx y$ по правилу подстановки. С другой стороны, если $\mathcal{A}$ — одноэлементная алгебра, на которой операция $f^{\mathcal{A}}$ определена, а операция $g^{\mathcal{A}}$ — нет, то $\mathcal{A} \vDash f(x) \approx y$, но $\mathcal{A} \nvDash f(x) \approx g(y)$. Таким образом, истинность второго тождества не следует из истинности первого.

Пример 2. Определим следующую алгебру: $\mathcal{N} = (N; \oplus, \ominus, \otimes, s)$, где N — множество всех натуральных чисел, s — одноместная операция взятия последующего элемента, а $\oplus$, $\ominus$ и $\otimes$ — двуместные операции сложения, вычитания и умножения соответственно. Операции s, $\oplus$ и $\otimes$ определены всюду, а результат операции $(m \ominus n)$ определен тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$.

Рассмотрим терм $0(x) = x \ominus x$, а для $n \in N \setminus \{0\}$ пусть $n(x)$ обозначает терм $s(\ldots s(x \ominus x)...)$ полученный n-кратным применением операции s к терму $(x \ominus x)$. Тогда для каждого $n \in N$ терм $n(x)$ задает на $\mathcal{N}$ всюду определенную постоянную функцию, принимающую значение n.

Рассмотрим теперь следующие термы:

$$u(x) = 2(x) \ominus x, \qquad t(x) = x \ominus 1(x),$$
$$v(x) = u(x) \otimes u(x), \qquad w(x) = 1(x) \ominus t(x).$$

Тогда области определения термов $u(x)$ и $v(x)$ на $\mathcal{N}$ равны $\{0, 1, 2\}$, терма $t(x)$ — $\{1, 2, 3, \ldots\}$, а терма $w(x)$ — $\{1, 2\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что имеют место соотношения $\mathcal{N} \vDash u(x) \approx w(x)$ и $\mathcal{N} \vDash w(x) \approx v(x)$, но неверно, что $\mathcal{N} \vDash u(x) \approx v(x)$.

Перечисленные в лемме 1 четыре правила не образуют полной системы правил вывода тождеств. Чтобы сформулировать недостающие правила, нам потребуются некоторые вспомогательные конструкции.

Для произвольных множества термов S и множества тождеств E обозначим:

$\downarrow S =: \{t \in T \mid T$ — подтерм некоторого терма из $S\}$;

$E^* =: \{t \approx t \mid t \in T\} \cup \{t \approx s \mid s \approx t \in E\} \cup E$ — рефлексивно-симметричное замыкание множества E;

$\rho_E =: \{(p[v], q[v]) \mid p \approx q \in E^*,\ v : X \to T\}$ — отношение, полученное из E^* с помощью произвольных подстановок.

Теперь зададим на множестве всех термов T оператор замыкания Cl_E по правилу: $\mathrm{Cl}_E(S) = \bigcup_{n \in \omega} S_n$, $S \subseteq T$, где множества S_n строятся по индукции следующим образом. Полагаем $S_0 = \downarrow S$ и для $n \in \omega$ терм t принадлежит множеству S_{n+1} тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий (1) или (2):

(1) $t = s(q_0, \ldots, q_{m-1})$ для некоторых пар $(p_0, q_0), \ldots, (p_{m-1}, q_{m-1}) \in \rho_E$ и терма $s(x_0, \ldots, x_{m-1})$ таких, что $s(p_0, \ldots, p_{m-1})$, $q_0, \ldots, q_{m-1} \in S_n$;

(2) $t = q[w]$ для некоторого тождества $p \approx q \in E^*$ и отображения $w : X \to T$ таких, что $Ev(p, q)[w] \subseteq S_n$.

Заметим, что $S_n \subseteq S_{n+1}$ для всех n, поскольку пары вида (t, t) и тождества $t \approx t$ принадлежат отношению ρ_E и множеству E^* соответственно.

Отношение $\rho_E \cap (\mathrm{Cl}_E(S))^2$ будем обозначать ρ_{ES}.

Основное свойство оператора Cl_E — в следующей лемме.

ЛЕММА 2. *Пусть E — множество тождеств, S — множество термов и пусть $t \in \mathrm{Cl}_E(S)$. Предположим, что все термы из S определены в алгебре $\mathcal{A}$ при означивании $v : X \to A$ и $\mathcal{A} \vDash E$. Тогда значение $t^{\mathcal{A}}[v]$ также определено.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Cl}_E(S) = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ как в определении. Поскольку $S_0 = \downarrow S$, при $t \in S_0$ доказывать нечего. Пусть для некоторого n значения всех термов из S_n определены в $\mathcal{A}$ при означивании v, рассмотрим $t \in S_{n+1}$.

Пусть выполняется (1). Тогда для каждого $i < m$ найдутся тождество $s_i(\overline{x}) \approx t_i(\overline{x}) \in E^*$ и последовательность термов $\overline{u}_i$ такие, что $p_i = s_i(\overline{u}_i)$, $q_i = t_i(\overline{u}_i)$. Получаем, что $\mathcal{A} \vDash s_i(\overline{x}) \approx t_i(\overline{x})$ и по предположению значения термов $s(s_0(\overline{u}_0), \ldots, s_{m-1}(\overline{u}_{m-1}))$, $t_0(\overline{u}_0), \ldots, t_{m-1}(\overline{u}_{m-1})$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v. Поэтому $s_i(\overline{u}_i)^{\mathcal{A}}[v] = t_i(\overline{u}_i)^{\mathcal{A}}[v]$, и значение терма $t = s(t_0(\overline{u}_0), \ldots, t_{m-1}(\overline{u}_{m-1}))$ также определено в $\mathcal{A}$ при означивании v.

Пусть выполняется (2). Тогда $\mathcal{A} \vDash p \approx q$ и по предположению все термы из множества $Ev(p, q)[w]$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v. Пусть $x_0, \ldots, x_{m-1}$ — все переменные, входящие в p или в q. Тогда термы $w(x_0), \ldots, w(x_{m-1})$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v. Рассмотрим произвольное отображение $v' : X \to A$ такое, что $v'(x_i) = w(x_i)^{\mathcal{A}}[v]$, $i < m$. Тогда все термы из $Ev(p, q)$ будут определены в $\mathcal{A}$ при означивании v'. Следовательно, значение $q[w]^{\mathcal{A}}[v] = q^{\mathcal{A}}[v']$ также будет определено. □

ЛЕММА 3. *Пусть E — множество тождеств, S — множество термов. Тогда $\downarrow\mathrm{Cl}_E(S) \subseteq \mathrm{Cl}_E(S)$.*

Доказательство. Проверим по индукции, что $\downarrow S_n \subseteq S_n$, $n \in \omega$.

При $n = 0$ имеем $\downarrow S_0 = \downarrow S = S_0$. Пусть $\downarrow S_n \subseteq S_n$ выполняется для некоторого n, и пусть t' — собственный подтерм $t \in S_{n+1}$. Предположим сначала, что для t выполняется (1). Здесь возможны два случая:

а) t' — подтерм некоторого q_i. Тогда $t' \in \downarrow S_n \subseteq S_n \subseteq S_{n+1}$;

б) t' имеет вид $r(\overline{q})$, где $r(\overline{x})$ — подтерм $s(\overline{x})$. Тогда $r(\overline{p}) \in \downarrow S_n \subseteq S_n$ и получаем, что $t' \in S_{n+1}$ по условию (1).

Предположим теперь, что для t выполняется (2). Тогда поскольку $t' \neq t$, получаем $t' \in \downarrow Ev(p, q)[w] \subseteq \downarrow S_n \subseteq S_n \subseteq S_{n+1}$, что и требовалось. □

Непосредственно из определения следует

ЛЕММА 4. *Пусть E — множество тождеств, S — множество термов и пусть $t \in \mathrm{Cl}_E(S)$. Тогда $t \in \mathrm{Cl}_F(S)$ для некоторого конечного подмножества $F \subseteq E$ и всякая переменная, входящая в t, входит в некоторый терм из S.*

Определим теперь новое правило Tr^{Ev} согласно схеме

$$\frac{s_0 \approx s_1, \ldots, s_{n-1} \approx s_n, F}{s_0 \approx s_n},$$

где F — конечное множество тождеств и $s_0, \ldots, s_n$ — термы, удовлетворяющие условию $s_0, \ldots, s_n \in \mathrm{Cl}_F(Ev(s_0, s_n)) \cap \mathrm{Cl}_F(Ev(s_n, s_0))$.

Пусть также R обозначает правило, определенное схемой

$$\frac{t \approx y, F}{u \approx v},$$

где $t \approx y$ — неправильное справа тождество, F — конечное множество тождеств, а u и v — термы такие, что $t, u, v \in \mathrm{Cl}_F(Ev(u, v)) \cap \mathrm{Cl}_F(Ev(v, u))$.

ЛЕММА 5. *Правила Tr^{Ev} и R сохраняют истинность тождеств.*

Доказательство. Рассмотрим правило Tr^{Ev}. Пусть $\mathcal{A} \vDash s_i \approx s_{i+1}$ $(i < n)$, $\mathcal{A} \vDash F$ и предположим, что все термы из множества $Ev(s_0, s_n)$ (или из множества $Ev(s_n, s_0)$) определены в алгебре $\mathcal{A}$ при означивании v. Тогда в силу леммы 2 и условия на правило Tr^{Ev} получаем, что термы $s_0, \ldots, s_n$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v. Следовательно, $s_0^{\mathcal{A}}[v] = \ldots = s_n^{\mathcal{A}}[v]$.

Рассмотрим правило R. Пусть $\mathcal{A} \vDash F$, $\mathcal{A} \vDash t \approx y$ и предположим, что все термы из множества $Ev(u, v)$ (или из множества $Ev(v, u)$) определены в алгебре $\mathcal{A}$ при означивании w. Тогда в силу леммы 2 и условия на правило R получаем, что термы t, u, v определены в $\mathcal{A}$ при означивании w. Поскольку переменная y не входит в t, значение $t^{\mathcal{A}}[w]$ определено при любом выборе $w(y) \in A$. А поскольку $\mathcal{A} \vDash t \approx y$, получаем, что $\mathcal{A}$ одноэлементна. Следовательно, $u^{\mathcal{A}}[w] = v^{\mathcal{A}}[w]$. □

2.. **Построение алгебры, заданной соотношениями на определенность термов.** Пусть SV обозначает правило вывода, определенное схемой

$$\frac{s \approx t}{s[v] \approx t[v]} \ (s, t \in T, \ v : X \to X).$$

Правило SV является частным случаем правила Sb^{Ev}, поэтому сохраняет истинность тождеств. Для множества тождеств $E \cup \{p \approx q\}$ пусть $E \Vdash p \approx q$ обозначает, что $p \approx q$ выводится из E по правилам Rf, Sy, Rp и SV. Заметим, что для любых термов $t(x_0, \ldots, x_{n-1})$, $u_0, \ldots, u_{n-1}$ и $v_0, \ldots, v_{n-1}$ тождество $t(\overline{u}) \approx t(\overline{v})$ выводится из тождеств $u_0 = v_0, \ldots, u_{n-1} \approx v_{n-1}$ с помощью нескольких применений правила Rp. В частности, любое тождество вида $t \approx t$ выводится (из пустого множества тождеств) с помощью Rf и Rp.

ЛЕММА 6. *Пусть E — множество тождеств, S — множество термов и пусть Y — множество всех переменных, входящих в термы из S. Тогда существуют алгебра $\mathcal{A}$ и означивание $v : X \to A$ со следующими свойствами.*

1) *$\mathcal{A} \vDash E$, $\mathcal{A}$ порождается множеством $v(Y)$ и для терма t от переменных из Y значение $t^{\mathcal{A}}[v]$ определено тогда и только тогда, когда $t \in \mathrm{Cl}_E(S)$.*
2) *Если для термов s и t от переменных из Y значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определены и совпадают, то*

(3) *существуют термы p_i, q_i и отображения $v_i : X \to T$ $(i \leqslant n)$ такие, что $p_i[v_i]$, $q_i[v_i] \in \mathrm{Cl}_E(S)$, $E \Vdash p_i \approx q_i$ $(i \leqslant n)$ и $s = p_0[v_0]$, $q_i[v_i] = p_{i+1}[v_{i+1}]$, $i < n$, $q_n[v_n] = t$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7. *В приводимом ниже доказательстве леммы 6 мы построим по множествам E и S определенную алгебру, обозначим ее $\mathcal{A}_{ES}$, и докажем, что алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ES}$ вместе с некоторым означиванием v удовлетворяет требованиям леммы. Кроме того, мы докажем, что построение алгебры $\mathcal{A}_{ES}$ однозначно определяется отношением ρ_{ES} (см. стр. 28) в следующем смысле: если мы возьмем произвольные множество тождеств E' и множество термов S', для которых $\rho_{E'S'} = \rho_{ES}$, то алгебры $\mathcal{A}_{E'S'}$ и $\mathcal{A}_{ES}$ будут совпадать.*

Доказательство. Обозначим $U = \mathrm{Cl}_E(S)$. Определим на множестве T отношение φ:

$$\begin{aligned}\varphi \;=\; \bigl\{\bigl(r(p_0,\dots,p_{m-1}), r(q_0,\dots,q_{m-1})\bigr) \bigm| r(x_0,\dots,x_{m-1}) \in T,\\ (p_0,q_0),\dots,(p_{m-1},q_{m-1}) \in \rho_E\bigr\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что φ рефлексивно и симметрично. Проверим следующее его свойство:

(4) если $(s_0,t_0),\dots,(s_{n-1},t_{n-1}) \in \varphi$ и $f \in \Omega$ имеет арность n, то 1) $(f(\overline{s}), f(\overline{t})) \in \varphi$; 2) $f(\overline{s}), t_0,\dots,t_{n-1} \in U$ влечет $f(\overline{t}) \in U$.

Пусть $(s_0,t_0),\dots,(s_{n-1},t_{n-1}) \in \varphi$. Тогда найдутся термы $r_i(x_0,\dots,x_{m-1})$ и пары $(p_j,q_j) \in \rho_E$ $(i < n,\ j < m)$ такие, что $s_i = r_i(p_0,\dots,p_{m-1})$, $t_i = r_i(q_0,\dots,q_{m-1})$. Более того, можно считать, что каждая переменная x_j входит в один из термов r_i. Рассмотрим терм $r(\overline{x}) = f(r_0(\overline{x}),\dots,r_{n-1}(\overline{x}))$. Тогда $(f(\overline{s}), f(\overline{t})) = (r(\overline{p}), r(\overline{q}))$ и эта пара принадлежит φ по определению. Далее, пусть $f(\overline{s})$, $t_0,\dots,t_{n-1} \in U$. Тогда каждый q_j является подтермом некоторого $r_i(\overline{q})$, т. е. некоторого t_i, и поэтому $q_j \in U$. Согласно лемме 3 получаем, что $r(\overline{q}) \in U$, т. е. $f(\overline{t}) \in U$.

Установим другое свойство отношения φ:

(5) для любой пары $(s,t) \in \varphi$ существуют термы p, q и отображение $v : X \to T$ такие, что $E \Vdash p \approx q$ и $s = p[v]$, $t = q[v]$.

Действительно, пусть $(s,t) \in \varphi$. Тогда либо $(s,t) \in \rho_E$, либо $s = r(s_0,\dots,s_{n-1})$ и $t = r(t_0,\dots,t_{n-1})$ для некоторых пар $(s_0,t_0),\dots,(s_{n-1},t_{n-1}) \in \rho_E$ и нетривиального терма $r(x_0,\dots,x_{n-1})$. В первом случае требуемое легко следует из определения отношения ρ_E. Предположим поэтому, что выполняется второй случай. Снова, используя определение ρ_E, для каждого $i < n$ можно найти термы $p_i(\overline{x}_i)$, $q_i(\overline{x}_i)$ и последовательность термов $\overline{u}_i$ такие, что $E \Vdash p_i(\overline{x}_i) \approx q_i(\overline{x}_i)$ и $s_i = p_i(\overline{u}_i)$, $t_i = q_i(\overline{u}_i)$. Поскольку правило SV допустимо, можно считать, что последовательности $\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_{m-1}$ выбраны так, что никакие две из них не содержат общих переменных. Рассмотрим термы $p(\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_{n-1}) = r(p_0(\overline{x}_0),\dots,p_{n-1}(\overline{x}_{n-1}))$ и $q(\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_{n-1}) = r(q_0(\overline{x}_0),\dots,q_{n-1}(\overline{x}_{n-1}))$. Тогда $E \Vdash p(\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_{m-1}) \approx q(\overline{x}_0,\dots,\overline{x}_{m-1})$ и можно сделать одновременную подстановку $\overline{x}_0 \mapsto \overline{u}_0,\dots,\overline{x}_{m-1} \mapsto \overline{u}_{m-1}$, получая равенства $s = p(\overline{u}_0,\dots,\overline{u}_{n-1})$, $t = q(\overline{u}_0,\dots,\overline{u}_{n-1})$.

Пусть θ — транзитивное замыкание отношения $\varphi \cap U^2$. Тогда θ рефлексивно, симметрично, транзитивно и обладает следующим свойством:

(6) если $(p_0,q_0),\dots,(p_{n-1},q_{n-1}) \in \theta$ и $f(\overline{p}) \in U$ для некоторого $f \in \Omega$, то $f(\overline{q}) \in U$ и $(f(\overline{p}), f(\overline{q})) \in \theta$.

Проверим (6), пусть $(p_0,q_0),\dots,(p_{n-1},q_{n-1}) \in \theta$. Тогда для каждого $i < n$ найдутся $r_i^0,\dots,r_i^{m_i} \in U$ такие, что $p_i = r_i^0 \,\varphi\, r_i^1 \,\varphi \cdots \varphi\, r_i^{m_i} = q_i$. Поскольку φ рефлексивно, можно считать, что $m_i = m$ для всех $i < n$. Обозначим $\overline{r}^j = (r_0^j,\dots,r_{n-1}^j)$, $j \leqslant m$. Тогда $\overline{r}^j \in U^n$ и $\overline{p} = \overline{r}^0$, $\overline{q} = \overline{r}^m$. Предположим, что $f(\overline{p}) \in U$. Последовательно применяя (4) получаем: $f(\overline{p}) \,\varphi\, f(\overline{r}^1) \,\varphi \cdots \varphi\, f(\overline{r}^{m-1}) \,\varphi\, f(\overline{q})$ и $f(\overline{r}^1) \in U,\dots,f(\overline{r}^{m-1}) \in U$, $f(\overline{q}) \in U$, т. е. $(f(\overline{u}), f(\overline{v})) \in \theta$ по определению.

В силу (6) на множестве $A = U/\theta$ можно определить алгебру $\mathcal{A}$ таким образом, что

(7) $$f^{\mathcal{A}}(p_0/\theta,\dots,p_{n-1}/\theta) = q/\theta \;\Leftrightarrow\; f(\overline{p}) \in U \text{ и } q/\theta = f(\overline{p})/\theta$$

для любых $n \in \omega$, n-арного символа $f \in \Omega$ и элементов $p_0, \ldots, p_{n-1}, q \in U$. Тогда для любых $m \in \omega$, терма $t(x_0, \ldots, x_{m-1})$ и элементов $p_0, \ldots, p_{m-1}, q \in U$ будет выполняться

$$t^{\mathcal{A}}(p_0/\theta, \ldots, p_{m-1}/\theta) = q/\theta \;\Leftrightarrow\; t(\overline{p}) \in U \text{ и } q/\theta = t(\overline{p})/\theta. \tag{8}$$

Действительно, пусть $t(\overline{x})$ имеет вид $f(t_0(\overline{x}), \ldots, t_{n-1}(\overline{x}))$, где $f \in \Omega$, и для термов $t_0(\overline{x}), \ldots, t_{n-1}(\overline{x})$ утверждение (8) выполняется. Введем обозначение $\overline{p}/\theta = (p_0/\theta, \ldots, p_{m-1}/\theta)$. Тогда поскольку U замкнуто относительно подтермов, согласно индукционному предположению получаем:

$$\begin{aligned}
&t^{\mathcal{A}}(\overline{p}/\theta) = q/\theta \;\Leftrightarrow\\
&t_i^{\mathcal{A}}(\overline{p}/\theta) \text{ определены и } q/\theta = f^{\mathcal{A}}\big(t_0^{\mathcal{A}}(\overline{p}/\theta), \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}(\overline{p}/\theta)\big) \;\Leftrightarrow\\
&t_i(\overline{p}) \in U \text{ и } q/\theta = f^{\mathcal{A}}\big(t_0(\overline{p})/\theta, \ldots, t_{n-1}(\overline{p})/\theta\big) \;\Leftrightarrow\\
&t_i(\overline{p}), f\big(t_0(\overline{p}), \ldots, t_{n-1}(\overline{p})\big) \in U \text{ и } q/\theta = f\big(t_0(\overline{p}), \ldots, t_{n-1}(\overline{p})\big)/\theta \;\Leftrightarrow\\
&t(\overline{p}) \in U \text{ и } q/\theta = t(\overline{p})/\theta.
\end{aligned}$$

Возьмем произвольное отображение $v : X \to A$ такое, что $v(y) = y/\theta$, $y \in Y$. Проверим, что $\mathcal{A}$ и v обладают требуемыми свойствами. Из (8) сразу следует, что для терма t от переменных из Y значение $t^{\mathcal{A}}[v]$ определено тогда и только тогда, когда $t \in U$. Очевидно также, что множество $v(Y)$ порождает $\mathcal{A}$. Покажем, что $\mathcal{A} \vDash E$. Пусть $p \approx q \in E^*$ и в алгебре $\mathcal{A}$ при некотором означивании w определены все термы из $Ev(p,q)$ или все термы из $Ev(q,p)$. Поскольку $q \approx p$ также принадлежит E^*, будем считать, что выполняется первый случай. Рассмотрим произвольное отображение $u : X \to U$, для которого $w(x) = u(x)/\theta$, $x \in X$. Тогда по предположению все термы из множества $Ev(p,q)[u]$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v. Согласно (8) получаем, что $Ev(p,q)[u] \subseteq U$. Поскольку $(p,q) \in E^*$, согласно лемме 3 отсюда следует, что $p[u]$, $q[u] \in U$. Снова применяя (8) получаем, что определены значения $p^{\mathcal{A}}[w] = p[u]/\theta$ и $q^{\mathcal{A}}[w] = q[u]/\theta$. Но $(p[u], q[u]) \in \rho_E \cap U^2 \subseteq \theta$, поэтому эти значения совпадают.

Пусть теперь s и t — произвольные термы от переменных из Y и значения $s^{\mathcal{A}}[v]$ и $t^{\mathcal{A}}[v]$ определены и равны. Тогда согласно (8) получаем $(s,t) \in \theta$, т. е. $s = s_0 \,\varphi\, s_1 \,\varphi \cdots \varphi\, s_{n+1} = t$ для некоторых $s_0, \ldots, s_{n+1} \in U$. Следовательно, в силу (5) найдутся термы p_i, q_i, и отображения v_i $(i \leqslant n)$ такие, что $s = p_0[v_0]$, $q_i[v_i] = s_{i+1} = p_{i+1}[v_{i+1}]$, $i < n$, $q_n[v_n] = t$ и $E \Vdash p_i \approx q_i$ $(i \leqslant n)$. Получаем, что условие (3) выполняется.

Проверим теперь утверждение замечания 7. Приведенное построение алгебры $\mathcal{A}$ определяется однозначно множеством термов U и эквивалентностью θ. Далее, θ является транзитивным замыканием отношения $\varphi \cap U^2$ и, поскольку U замкнуто относительно подтермов, получаем:

$$\begin{aligned}
\varphi \cap U^2 = \big\{\big(r(p_0, \ldots, p_{m-1}), r(q_0, \ldots, q_{m-1})\big) \in U^2 \;\big|\;\\
r(x_0, \ldots, x_{m-1}) \in T, (p_0, q_0), \ldots, (p_{m-1}, q_{m-1}) \in \rho_E \cap U^2\big\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}$ однозначно строится по U и отношению $\rho_{ES} = \rho_E \cap U^2$. А поскольку U является проекцией ρ_{ES}, скажем, на первую координату, задание последнего отношения определяет построение алгебры $\mathcal{A}$ однозначно. □

В дальнейшем алгебру $\mathcal{A}$ и означивание v, построенные в лемме 6 по множеству тождеств E и множеству термов S будем обозначать $\mathcal{A}_{ES}$ и v_{ES} соответственно.

Согласно следствию 8 ниже, аналогично случаю полных алгебр можно сказать, что в классе всех частичных алгебр, удовлетворяющих тождествам E, алгебра $\mathcal{A}_{ES}$ определяется соотношениями "все термы из S определены".

Напомним, что *гомоморфизмом* из алгебры $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{B}$ называется отображение $\varphi : A \to B$, удовлетворяющее условию

(9) если значение $f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})$ определено и равно a_n для некоторых $a_0, \dots, a_n \in A$ и $f \in \Omega$, то значение $f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_{n-1}))$ определено и равно $\varphi(a_n)$.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Пусть E — множество тождеств, S — множество термов и Y — множество всех переменных, входящих в какой-либо терм из S. Предположим, что все термы из S определены в некоторой алгебре $\mathcal{B}$ при означивании w и, кроме того, $\mathcal{B} \vDash E$. Тогда существует гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A}_{ES} \to \mathcal{B}$ такой, что $\varphi(v_{ES}(y)) = w(y)$ для любого $y \in Y$.*

Доказательство. Пусть $U = \mathrm{Cl}_E(S)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ES}$ и $v = v_{ES}$. Согласно лемме 6 (1) имеем $A = \{t^{\mathcal{A}}[v] \mid t \in U\}$, где все указанные значения определены. А согласно лемме 2 все значения $t^{\mathcal{B}}[w]$ также определены. Докажем, что правило $\varphi(t^{\mathcal{A}}[v]) = t^{\mathcal{B}}[w]$, $t \in U$, корректно определяет отображение φ из A в B. Пусть $s^{\mathcal{A}}[v] = t^{\mathcal{A}}[v]$ для некоторых $s, t \in U$. Тогда согласно лемме 6 (2) выполняется условие (3), см. стр. 29. Применяя лемму 2 получаем, что значения всех термов $p_i[v_i]$ и $q_i[v_i]$, $i \leqslant n$, определены в алгебре $\mathcal{B}$ при означивании w. А поскольку $\mathcal{B} \vDash E$, по лемме 1 получаем, что $\mathcal{B} \vDash p_i \approx q_i$, $i \leqslant n$. Следовательно, все значения $p_i[v_i]^{\mathcal{B}}[w]$, $q_i[v_i]^{\mathcal{B}}[w]$, $i \leqslant n$, совпадают. В частности, $s^{\mathcal{B}}[w] = t^{\mathcal{B}}[w]$, что и требовалось.

Проверим, что φ является гомоморфизмом. Пусть a_i и f как в (9). Тогда $a_i = t_i^{\mathcal{A}}[v]$ для подходящих термов $t_i \in U$ $(i < n)$, поэтому значение $f(t_0, \dots, t_{n-1})^{\mathcal{A}}[v]$ определено. Согласно лемме 6 (1) получаем, что $f(t_0, \dots, t_{n-1}) \in U$, поэтому значение $f(t_0, \dots, t_{n-1})^{\mathcal{B}}[w]$ определено согласно лемме 2. Таким образом,

$$\varphi(f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})) = \varphi(f(t_0, \dots, t_{n-1})^{\mathcal{A}}[v]) =$$

$$= f(t_0, \dots, t_{n-1})^{\mathcal{B}}[w] = f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_{n-1})).$$

□

3.. **Доказательство полноты.**

ЛЕММА 9. *Пусть E — множество правильных тождеств и $E \Vdash p \approx q$. Тогда $p \approx q$ — правильное тождество.*

Доказательство. Всякое тождество вида $t \approx t$ и всякое тождество симметричное правильному является правильным. Далее, тождества, полученные по правилу Rp, всегда имеют вид $s \approx t$, где $s, t \in T \setminus X$. Такие тождества являются правильными и, кроме того, остаются правильными после применения правила SV. Наконец, если $x \in X$ и тождество $s \approx x$ — правильное, тогда x входит в s. Поэтому, применяя правило SV, мы снова получим правильное тождество. □

ЛЕММА 10. *Пусть E — множество тождеств и E_1 — множество правильных тождеств из E. Пусть также S — множество термов такое, что $\mathrm{Cl}_E(S)$ не содержит термов вида $s[v]$, где $s \approx y \in E^*$ неправильное справа и $v : X \to T$. Тогда $\mathrm{Cl}_E(S) = \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$.*

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только включение $\mathrm{Cl}_E(S) \subseteq \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$. Пусть $\mathrm{Cl}_E(S) = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ как в определении. Предположим, что $S_n \subseteq \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$ для некоторого $n \in \omega$ (заметим, что для $n = 0$ это верно). Пусть $t \in S_{n+1}$, докажем, что $t \in \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$.

Пусть выполняется (1) и пусть $p_i = s_i[v_i]$, $q_i = t_i[v_i]$, где $s_i \approx t_i \in E^*$ и $v_i : X \to T$ $(i < m)$. Тогда никакое из тождеств $s_i \approx t_i$ не может быть неправильным, поскольку $p_i, q_i \in \mathrm{Cl}_E(S)$, $i < m$. Следовательно, все эти тождества принадлежат $(E_1)^*$ и поэтому $t \in \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$.

Пусть выполняется (2). Тогда $p[w], q[w] \in \mathrm{Cl}_E(S)$, поэтому тождество $p \approx q$ не может быть неправильным. Следовательно, $p \approx q \in (E_1)^*$ и $t \in \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$. $\square$

Для множества тождеств $E \cup \{p \approx q\}$ пусть $E \vDash p \approx q$ обозначает, что $\mathcal{A} \vDash E$ влечет $\mathcal{A} \vDash p \approx q$ для любой алгебры $\mathcal{A}$. Пусть также $E \vdash p \approx q$ обозначает, что $p \approx q$ выводится из E при помощи правил Rf, Sy, Rp, Sb^{Ev}, Tr^{Ev} и R. Напомним, что правило SV является частным случаем правила Sb^{Ev}, поэтому из $E \Vdash p \approx q$ следует $E \vdash p \approx q$.

ТЕОРЕМА. *Для любого множества тождеств $E \cup \{p \approx q\}$ выполняется*

$$E \vDash p \approx q \quad\Leftrightarrow\quad E \vdash p \approx q.$$

Доказательство. Импликация справа налево следует из лемм 1 и 5. Обратно, пусть $E \vDash p \approx q$. Положим $S = \{p, q\}$, $S' = Ev(p, q)$ и $S'' = Ev(q, p)$. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ES'}$ и означивание $v = v_{ES'}$. Тогда $\mathcal{A} \vDash E$ и все термы из $Ev(p, q)$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании v. Поскольку $E \vDash p \approx q$ получаем, что значение $q^{\mathcal{A}}[v]$ также определено. Заметим также, что всякая переменная, входящая в p или в q, входит в некоторый терм из S'. Следовательно, согласно лемме 6 (1) получаем, что $q \in \mathrm{Cl}_E(S')$, откуда $\mathrm{Cl}_E(S) = \mathrm{Cl}_E(S')$. Аналогично, рассматривая $\mathcal{A}_{ES''}$ и $v_{ES''}$ получаем, что $\mathrm{Cl}_E(S) = \mathrm{Cl}_E(S'')$. Далее возможны два случая.

Случай 1: существуют неправильное справа тождество $t \approx y \in E^*$ и отображение $v : X \to T$ такие, что $t[v] \in \mathrm{Cl}_E(S)$. Согласно лемме 4 найдутся конечные подмножества $E', E'' \subseteq E$, для которых $t[v] \in \mathrm{Cl}_{E'}(S')$ и $t[v] \in \mathrm{Cl}_{E''}(S'')$. Пусть z — произвольная переменная, не входящая в $t[v]$, и $F = E' \cup E''$. Тогда $t \approx y$ выводится из E по правилам Rf и Sy, переход $t \approx y / t[v] \approx z$ осуществляется по правилу Sb^{Ev}, терм $t[v]$ принадлежит множеству $\mathrm{Cl}_F(S') \cap \mathrm{Cl}_F(S'')$ и по правилу R получаем $t(\overline{u}) \approx z, F / p \approx q$.

Случай 2: случай 1 не имеет места, т. е. если для некоторых тождества $s \approx t \in E^*$ и отображения $v : X \to T$ выполняется $s[v] \in \mathrm{Cl}_E(S)$, то $s \approx t$ является правильным справа. Пусть E_1 обозначает множество правильных тождеств из E. Тогда согласно лемме 10 и доказанному выше $\mathrm{Cl}_E S = \mathrm{Cl}_{E_1} S = \mathrm{Cl}_E S' = \mathrm{Cl}_{E_1} S' = \mathrm{Cl}_E S'' = \mathrm{Cl}_{E_1} S''$. Докажем, что $\rho_{ES} = \rho_{E_1 S}$. Действительно, включение $\rho_{E_1 S} \subseteq \rho_{ES}$ очевидно. С другой стороны, если $(p[v], q[v]) \in \rho_{ES}$, где $p \approx q \in E^*$, то $p[v], q[v] \in \mathrm{Cl}_E(S)$ и, следовательно, тождество $p \approx q$ является правильным по условию случая 2. Поэтому $(p[v], q[v]) \in \rho_{E_1 S}$.

Согласно замечанию 7 алгебры $\mathcal{A}_{ES}$ и $\mathcal{A}_{E_1S}$ совпадают, в частности, $\mathcal{A}_{E_1S} \vDash E$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{E_1S}$ и $v = v_{E_1S}$. Поскольку $E \vDash p \approx q$, получаем $\mathcal{A} \vDash p \approx q$ и поэтому согласно лемме 6 (1) значения $p^{\mathcal{A}}[v]$ и $q^{\mathcal{A}}[v]$ определены и совпадают. Следовательно, согласно лемме 6 (2) существуют термы p_i, q_i и отображения $v_i : X \to T$, $i \leqslant n$, для которых $p_i[v_i], q_i[v_i] \in \mathrm{Cl}_{E_1}(S)$, $E_1 \Vdash p_i \approx q_i$, $i \leqslant n$, и $p = p_0[v_0]$, $q_i[v_i] = p_{i+1}[v_{i+1}]$, $i < n$, $q_n(\overline{u}_n) = q$. Согласно лемме 9 все тождества $p_i \approx q_i$ являются правильными. Поэтому переход $p_i \approx q_i / p_i[v_i] \approx q_i[v_i]$ является применением правила Sb^{Ev}. Обозначим $s_i = p_i[v_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда тождества $p \approx s_1$, $s_i \approx s_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, $s_n \approx q$ выводятся из E с помощью Rf, Sy, Rp и Sb^{Ev}. Далее, используя лемму 4 можно найти конечное подмножество $F \subseteq E_1$, для которого $p, s_1, \ldots, s_n, q \in \mathrm{Cl}_F(S')$. Тогда переход

$$\frac{p \approx s_1, s_1 \approx s_2, \ldots, s_n \approx q, F}{p \approx q}$$

является применением правила Tr^{Ev}. $\square$

Список литературы

[1] T. Evans, *The word problem for abstract algebras*, J. London Math. Soc., **26**:1 (1951), 64–71.

[2] H. Höft, *Weak and strong equations in partial algebras*, Algebra Univers., **3**:2 (1973), 203–215.

[3] J. Słominski, *Peano-algebras and quasi-algebras*, Diss. Math., **62** (1968).

[4] A. Robinson, *Equational logic for partial functions under Kleene equality: a complete and incomplete set of rules*, J. Symb. Logic, **54**:2 (1989), 354–362.

[5] P. Burmeister, *A model-theoretic oriented approach to partial algebras. Part I*, Academie-Verlag, Berlin, 1986.

[6] L. Rudak, *A completeness theorem for weak equational logic*, Algebra Univers., **16**:3 (1983), 331–337.

[7] T. Evans, *Embeddability and the word problem*, J. London Math. Soc., **28**:1 (1953), 76–80.

[8] А. И. Мальцев, *Квазипримитивные классы абстрактных алгебр*, Докл. АН СССР, **108**:2 (1956), 187–189.

Михаил Сергеевич Шеремет
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: sheremet@math.nsc.ru