S©MR ISSN 1813–3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 1, стр. 129–141 (2004)

УДК 519.172.2

MSC 05C15

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ 2-ДИСТАНЦИОННОЙ $\Delta+1$ РАСКРАШИВАЕМОСТИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

О.В.БОРОДИН, А.Н.ГЛЕБОВ, А.О.ИВАНОВА, Т.К.НЕУСТРОЕВА, В.А.ТАШКИНОВ

Abstract. A trivial lower bound for the 2-distance chromatic number $\chi_2(G)$ of any graph G with maximum degree Δ is $\Delta+1$. We prove that if G is planar and its girth is at least 7, then $\chi_2(G)=\Delta+1$ whenever $\Delta \geq 30$. On the other hand, we construct planar graphs with girth 5 and 6 that have arbitrarily large Δ and $\chi_2(G)>\Delta+1$.

1. Введение

Через $V(G)$ и $E(G)$ обозначим множества вершин и ребер графа G, соответственно. Раскраска $f: V(G)\to\{1,2,\ldots,k\}$ графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не более 2 окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G называется 2-*дистанционным хроматическим числом* графа G и обозначается через $\chi_2(G)$. Задача 2-дистанционной раскраски возникает в приложениях; в частности, она является одной из основных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования. В самой теории графов известна старая (1977) гипотеза Г. Вегнера [4] о том, что $\chi_2(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1$ любого плоского графа G с максимальной степенью Δ (см. также монографию Т. Р. Йенсена и Б. Тофта [3, п. 2.18]). Наилучшей из опубликованных верхних оценок для произвольных плоских графов является $\chi_2(G) \leq \lceil \frac{9}{5}\Delta \rceil + 1$ при $\Delta \geq 47$ (О.В. Бородин и др. [1]).

Borodin O.V., Glebov A.N., Ivanova A.O., Neustroeva T.K., Tashkinov V.A., Sufficient conditions for planar graphs to be 2-distance $(\Delta+1)$-colourable.

Работа первого, второго и последнего авторов поддержана РФФИ (гранты 03-01-00796 и 02-01-00039).

Поступила 1 декабря 2004 г., опубликована 14 декабря 2004 г.

Очевидно, что $\chi_2(G) \geq \Delta + 1$ для любого графа G (ввиду того, что в любом графе есть звезда $K_{1,\Delta}$). В [2] в частности доказано, что если G — плоский и его обхват g (т.е. длина минимального цикла) не меньше 9, то $\chi_2(G) = \Delta + 1$ при $\Delta \geq 16$. В настоящей работе полностью решен вопрос о том для сколь малых g можно гарантировать равенство $\chi_2(G) = \Delta + 1$ путем наложения ограничения на Δ, а именно доказана

Теорема 1. *Пусть G — планарный граф, тогда $\chi_2(G) = \Delta + 1$, если $g = 8$, $\Delta \geq 15$, либо $g = 7$, $\Delta \geq 30$, но существуют графы с $g \leq 6$, для которых $\chi_2(G) > \Delta + 1$ при произвольно большом Δ.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть граф G' — контрпример к теореме 1. Пусть далее G — наименьший по числу ребер граф со свойствами: $\Delta(G) \leq \Delta$, $g(G) = g \geq g(G')$, $\chi_2(G) > \Delta + 1$. Множество графов с этими свойствами непусто, так как, например, G' всеми ими обладает. Доказательство теоремы 1 состоит в доказательстве несуществования графа G, что противоречит сделанному нами предположению о существовании графа G'.

Не нарушая общности, можно считать, что граф G связен. Обозначим через δ его минимальную степень. Легко видеть, что $\delta \geq 2$.

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ запишем в виде

$$((g-2)|E| - g|V|) + (2|E| - g|F|) = -2g,$$

где F — множество граней графа G.

Отсюда

$$\sum_{v \in V} \left(\frac{g-2}{2} d(v) - g \right) + \sum_{f \in F} (r(f) - g) < 0, \tag{1}$$

где $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f. Положим *заряд* $\mu(v)$ каждой вершины v графа G равным $\frac{g-2}{2} d(v) - g$, а *заряд* $\mu(f)$ каждой грани f графа G равным $r(f) - g$. Заметим, что заряд 2-вершины при всех g равен -2, а заряды вершин степени не менее 3 и всех граней неотрицательны.

Для каждого значения Δ мы опишем ряд структурных свойств графа G, опираясь на которые перераспределим заряды вершин и граней так, чтобы их новые заряды стали неотрицательными. Поскольку сумма зарядов вершин и граней при перераспределении сохраняется, мы получим противоречие с (1), что и завершит доказательство теоремы 1.

Заметим, что в силу минимальности G граф, полученный из него удалением ребра, имеет требуемую раскраску (напомним, что Δ — максимальная степень графа G', а не графа G). Легко видеть, что если мы сможем перекрасить концы этого ребра в цвета, не встречающиеся на смежных вершинах и вершинах на расстоянии 2 от соответствующего конца, то полученная раскраска будет 2-дистанционной. Удаленное ребро на рисунке будем перечеркивать.

Под k-*цепью* далее будем понимать цепь, состоящую из в точности k вершин степени 2, а под $(k_1, \ldots, k_d)$-*вершиной* понимается d-вершина, инцидентная d различным цепям, где i-я цепь $(1 \leq i \leq d)$ содержит не менее k_i вершин степени 2.

Для всех $\Delta \geq 15$ справедливы структурные свойства:

Лемма 1. *В G не существует ≥ 3-цепи, ограниченной хотя бы с одной стороны вершиной степени меньше Δ.*

Доказательство. На рис. 1 удаленное ребро перечеркивается и первой красится вершина, помеченная N_1 (Δ ограничений на выбор цвета), а второй — N_2 (4 ограничения). □

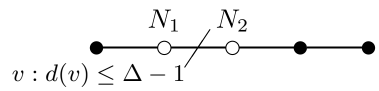

Рис. 1.

Следствие $1'$. В G не существует ≥ 4-цепи.

Лемма 2. *В G нет двух Δ-вершин, соединенных двумя 3-цепями.*

Доказательство. На рис. 2 показана сводимость данной конфигурации, где u и v имеют степень Δ. Удалим перечеркнутое ребро и обесцветим вершины v_1, v_2 и v_3. Пусть z окрашена в цвет 1. Заметим, что v_1 нельзя покрасить лишь в том случае, когда на Δ-вершине u и смежных с ней вершинах встречаются все Δ цветов (т.е. для v_1 остается только цвет 1). В этом случае перекрасим вершину x в 1 (это всегда возможно, так как вершина y находится на расстоянии 2 от z, а следовательно, не окрашена в 1), а v_1 — в освободившийся цвет, затем красим v_2 и v_3 (4 ограничения на выбор цвета). □

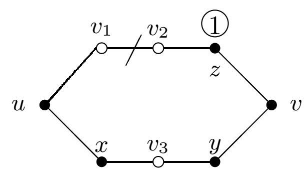

Рис. 2.

2.1. **Случай $g = 8$.**

Вершину v будем называть *средней*, если $d(v) < \Delta$, а $\mu(v) \geq 2d(v)$, и *младшей*, если $0 < \mu(v) < 2d$.

Будем использовать следующие четыре правила перераспределения зарядов:

R1: Любая вершина v с $d(v) \geq 3$ отдает заряд k каждой k-цепи, из нее исходящей.

Правило R1 дополняется следующим:

R1′: Любая Δ-вершина отдает заряд $\frac{1}{2}$ вершине типа (2,2,0), если они соединены 2-цепью.

R2: Любая средняя и Δ-вершина отдает:

(a) заряд 1 другому концу u каждой инцидентной ей 1-цепи, если u — младшая,

(b) заряд 2 — смежной младшей вершине w, за исключением случая когда w смежна с двумя Δ-вершинами и получает от них по $\frac{3}{2}$ вместо 2.

Две цепи с общим концом, лежащие на границе некоторой грани, будем называть *соседними*.

R3: Δ-вершина, инцидентная двум соседним 3-цепям получает заряд 1 от грани f, инцидентной этим цепям.

Пусть (2,2,0)-вершина u лежит в границе грани f вместе со своими 2-цепями, а v — другой конец одной из этих цепей, тогда будем называть v и f *особыми* (см. рис. 3).

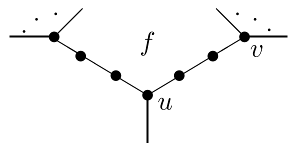

Рис. 3.

R4: Особая Δ-вершина v получает от инцидентной ей особой грани f заряд 1, если $r(f) \geq 10$ и $\frac{1}{2}$, если $r(f) = 9$.

Заряды вершины v и грани f, оставшиеся у них после применения правил, обозначим через $\mu^*(v)$ и $\mu^*(f)$, соответственно.

2.1.1. *Проверка того, что* $\mu^*(f) \geq 0$.

Напомним, что $\mu(f) = r(f) - 8$ и по лемме 2 в G нет двух Δ-вершин, соединенных двумя 3-цепями. Пусть r — ранг грани f.

При $r \geq 12$ грань f по правилам R3, R4 отдает инцидентным ей Δ-вершинам заряд 1 не более чем $\lfloor \frac{r}{3} \rfloor$ раз, откуда $\mu^*(f) \geq r - 8 - \lfloor \frac{r}{3} \rfloor \times 1 \geq r - 8 - \frac{r}{3} = \frac{2}{3} r - 8 \geq 0$.

При $10 \leq r \leq 11$, грань f по правилам R3, R4 отдает 1 не более двух раз, а значит $\mu^*(f) \geq 2 - 2 \times 1 = 0$. При $r = 9$, грань f по правилу R4 отдает $\frac{1}{2}$ не более 2 раз, поэтому $\mu^*(f) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

2.1.2. *Проверка того, что* $\mu^* \geq 0$ *для средних и* Δ*-вершин.*

Рассмотрим среднюю вершину v. Напомним, что $\mu(v) \geq 2d$, а следовательно $d(v) \geq 8$. По правилам R1, R2 и лемме 1 вершина v отдает по каждой цепи не более 2 единиц заряда, т. е. $\mu^*(v) \geq 2d - d \times 2 = 0$.

Пусть далее v — вершина степени Δ. Нам понадобится следующее структурное свойство:

Лемма 3. *В G нет 2-цепи, соединяющей (2,2,0)-вершину с вершиной степени меньше, чем Δ.*

Доказательство. На рис. 4 показана сводимость данной конфигурации. $\square$

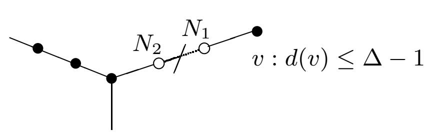

Рис. 4.

Назовем 2-цепь *особой*, если она инцидентна (2,2,0)-вершине.

Для подсчета $\mu^*(v)$ усредним заряды, передаваемые вершиной v инцидентным ей цепям по правилам R1–R2 так, чтобы каждая цепь забирала от v не более $\frac{5}{2}$, и при этом не менее $\frac{1}{2}$ вернулось вершине v от инцидентных цепей и ≥ 9-граней. Поскольку $\mu(v) = 3\Delta - 8 \geq \frac{5}{2}\Delta - \frac{1}{2}$, тем самым будет доказано, что $\mu^*(v) \geq 0$.

Предположим, что v сначала отдает $\frac{5}{2}$ по каждой инцидентной ей цепи, независимо от ее длины. Тогда 3-цепи не хватает $\frac{1}{2}$, а 0-цепь, 1-цепь и неособая 2-цепь (далее будем называть такие цепи *короткими*) имеют избыточный заряд $\frac{1}{2}$ согласно правилам R1–R2.

Этот заряд короткая цепь направляет вокруг v по и против часовой стрелки по $\frac{1}{4}$ следующим образом. Если рядом оказывается 3-цепь, то она и получает эту $\frac{1}{4}$, а если особая цепь, то заряд проходит через нее дальше. Когда встречаются две $\frac{1}{4}$, идущие от коротких цепей, то их общий заряд $\frac{1}{2}$ получает v. Кроме того, если v смежна с некоторой вершиной, которая в свою очередь смежна с другой Δ-вершиной, то 0- или 1-цепь P отдает заряд $\frac{1}{2}$ вершине v. Ясно, что в итоге все 0-, 1- и 2-цепи забирают от v по $\frac{5}{2}$.

Заряд 1, получаемый вершиной v по правилам R3 и R4, распределим следующим образом: $\frac{1}{2}$ грань отдает вершине v и по $\frac{1}{4}$ направляет вокруг v по и против часовой стрелки. Аналогично заряду $\frac{1}{4}$, направленному короткой цепью, заряд $\frac{1}{4}$, идущий от грани, также достается 3-цепи, исходящей из v или самой вершине v.

Покажем теперь, что 3-цепь P и Δ-вершина v всегда получат недостающий им заряд $\frac{1}{2}$.

Допустим, что за P в выбранном направлении следует также 3-цепь, тогда по лемме 2 они образуют грань f ранга не менее 9, а значит P получает $\frac{1}{4}$ от f согласно правилам усреднения. Если же за P следует любая короткая цепь, то P получает от нее $\frac{1}{4}$ в направлении, противоположном выбранному.

Пусть, наконец, за P следует особая цепь Q, т. е. 2-цепь, ведущая из v в (2,2,0)-вершину. На рис. 5 показаны возможные варианты. В случае (a) цепь P получает заряд $\frac{1}{4}$ от особой грани. Случай (b) мы разбиваем на подварианты в зависимости от того, какая цепь следует за цепью Q: 3-цепь, короткая или особая. Если за Q следует особая или 3-цепь, то P получает заряд $\frac{1}{4}$ от особой грани по правилам усреднения, а если за Q следует короткая, то P получает $\frac{1}{4}$ от этой короткой цепи. Этим заканчивается доказательство того, что после усреднения каждая 3-цепь получает недостающую ей $\frac{1}{2}$.

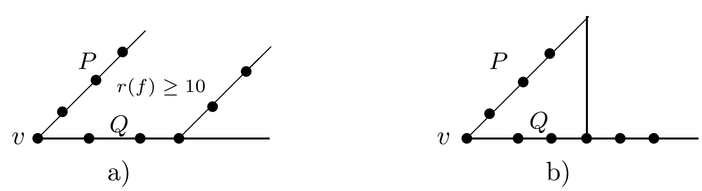

Рис. 5.

Поскольку $\mu(v) = 3d - 8 \geq \frac{5}{2}\Delta$ при любом $\Delta \geq 16$, то остается показать, что при $\Delta = 15$ вершина v получит хотя бы один раз заряд $\frac{1}{2}$ согласно правилам усреднения. Действительно, это верно, если в окружении вершины v

встречается пара соседних коротких цепей, либо пара соседних 3-цепей. Отсюда следует, что если в окружении v нет особой цепи, то такая пара найдется из-за нечетности числа 15.

Пусть теперь в окружении v встречается особая цепь Q, входящая в особую грань f, а P — вторая цепь, инцидентная v и f. Если $r(f) \geq 10$, то v получает 1 по R4, а после усреднения — не менее $\frac{1}{2}$. Если же $r = 9$, то v получает $\frac{1}{2}$ от f по правилу R4, и эта $\frac{1}{2}$ при усреднении не затрагивается.

Наконец предположим, что $r = 8$, тогда возникает два случая: P является 1- или 0-цепью. В каждом из них v получает $\frac{1}{2}$ от P по правилам усреднения.

2.1.3. *Проверка того, что $\mu^* \geq 0$ для младших и 2-вершин.*

Из определения следует, что младшими являются вершины, для которых $3 \leq d(v) \leq 7$. Напомним, что младшая вершина отдает по каждому ребру заряд 1 или 2 вершинам степени 2 согласно правилу R1. В свою очередь, она может получить заряд 1, 2 или $\frac{3}{2}$ от средних или Δ-вершин согласно правилу R2 и $\frac{1}{2}$ по правилу R1$'$.

Лемма 4. *В G нет младшей вершины v типа* $(2, 1, \ldots, 1)$.

Доказательство. На рис. 6 показана сводимость данной конфигурации. □

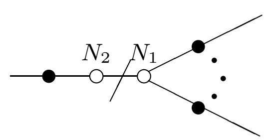

Рис. 6.

Лемма 5. *В G нет младшей вершины v типа* $(2, \ldots, 2, 1, 0)$*, смежной с младшей вершиной.*

Доказательство. См рис. 7. □

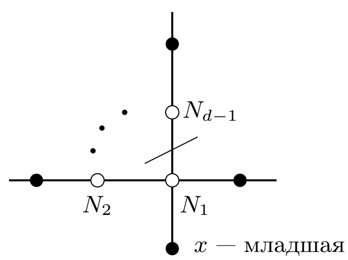

Рис. 7

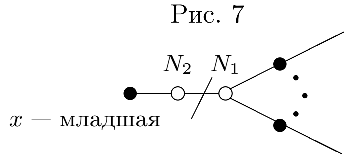

Рис. 8

Лемма 6. *В G нет младшей вершины v типа* $(1, \ldots, 1)$*, соединенной по 1-цепи с другой младшей вершиной.*

Доказательство. См рис. 8. □

Учитывая леммы 4–6 и равенство $\mu(v) = 3d - 8 \geq 2d - 5$, нам остается рассмотреть младшие вершины типов $(2, \ldots, 2, 0)$, $(2, \ldots, 2, 1, 0)$, $(1, \ldots, 1)$, $(2, \ldots, 2, 0, 0)$ и $(1, \ldots, 1, 0)$.

Пусть v — вершина типа $(2, \ldots, 2, 0)$. При $d \geq 6$ имеем $\mu(v) \geq 2d-2$, поэтому возьмем $3 \leq d \leq 5$. Рассмотрим сначала вершину степени 3. Согласно лемме 3 и правилу R1′ вершина типа (2,2,0) получает $2 \times \frac{1}{2}$ и 2 — по лемме 5 и правилу R2, а отдает 2×2 по R1. Отсюда $\mu^*(v) \geq 1 - 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 = 0$. Пусть теперь $4 \leq d \leq 5$. Тогда к имеющейся величине заряда 3-вершины добавляется $3(d-3)$, а, согласно правилу R1, вычитается $2(d-3)$, т. е. прибавляется положительная величина. Значит $\mu^*(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 2 + 2 + (3-2)(d-3) \geq 0$.

Пусть v — вершина типа $(2, \ldots, 2, 1, 0)$. При $d \geq 5$ имеем $\mu(v) \geq 2d - 3$, поэтому рассмотрим $3 \leq d \leq 4$. Тогда по лемме 5, правилам R1, R2, имеем: $\mu^*(v) \geq 1 - 2 - 1 + 2 + (3-2)(d-3) \geq 0$.

Возьмем вершину типа $(1, \ldots, 1)$. При $d \geq 4$ имеем $\mu(v) \geq d$. Отсюда, ввиду леммы 6 и правил R1, R2, для $d = 3$ имеем: $\mu^*(v) \geq 1 - 3 + 3 > 0$.

Возьмем вершину типа $(2, \ldots, 2, 0, 0)$. При $d \geq 4$: $\mu(v) \geq 2d - 4$. Откуда для $d = 3$, ввиду конфигурации на рис. 9 (a) и исключения в правиле R2b, имеем $\mu^*(v) \geq 1 - 2 + \frac{3}{2} > 0$.

Пусть наконец v — типа $(1, \ldots, 1, 0)$. Для $d \geq 4$: $\mu(v) \geq d-1$, тогда при $d = 3$, ввиду конфигурации на рис. 9 (b) и правил R1, R2, имеем $\mu^*(v) \geq 1-2+1 = 0$.

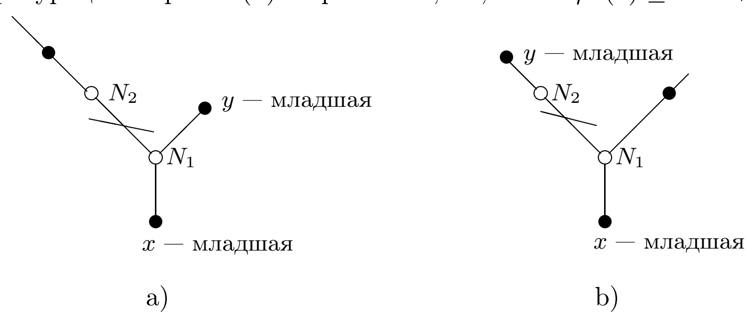

Рис. 9.

Пусть теперь v — вершина степени 2. Согласно правилу R1 каждая k-цепь получает заряд $2k$, который можно равномерно распределить по ее k вершинам степени 2. Отсюда $\mu^* = -2 + 2 = 0$.

2.2. **Случай** $g = 7$.

Вершину v назовем *младшей*, если $2 < d(v)$, а $\mu(v) < 2d(v)$, *средней*, если $2d(v) \leq \mu(v) < \frac{9}{4}d(v)$, и *старшей*, если $\mu(v) \geq \frac{9}{4}d(v)$. Нетрудно видеть, что младшими являются вершины степени от 3 до 13, средними — от 14 до 27, а старшими — от 28 и выше.

Перераспределим заряды вершин и граней по следующим правилам:

R1: (a) Младшая вершина v отдает инцидентной ей k-цепи заряд 1, если $k = 1$ и заряд 2, если $k \geq 2$;

(b) Средняя или старшая вершина v любой инцидентной ей цепи отдает заряд 2 или $\frac{9}{4}$, соответственно.

Обозначим через ρ_1 сумму зарядов, полученных цепью от ее концов по R1.

R2: Любая цепь отдает инцидентной ей 2-вершине v заряд $\frac{1}{2}$, если v смежна с двумя 2-вершинами и заряд 2, если v смежна хотя бы одной вершине степени не менее 3.

Через ρ_2 будем обозначать заряд цепи, оставшийся после применения правила R2.

R3: Если ≤ 1-цепь C и соседняя с ней 3-цепь инцидентны 7-грани f, то C отдает грани f заряд $\frac{3}{8}$.

Пусть ρ_3 — заряд цепи, оставшийся после применения правила R3.

R4: (a) Если ≤ 2-цепь C соединяет младшую вершину v с вершиной степени не менее 14, то v получает заряд ρ_3 от C.

(b) Пусть ≤ 1-цепь C соединяет две немладшие вершины u и w. Если среди соседних с C цепей имеется хотя бы одна ≤ 2-цепь, ведущая в младшую вершину, то C раздает ρ_3 поровну концам таких цепей.

Обозначим через ρ_4 заряд цепи, оставшийся после применения правила R4.

R4′: Если $\rho_4 > 0$, то цепь отдает каждому из своих концов по $\frac{\rho_4}{2}$.

R5: (a) Каждая грань f с $r(f) \geq 8$, инцидентная двум соседним 2-цепям, ведущим из младшей вершины v в ≥ 14-вершины, отдает вершине v заряд 1.

(b) Любая грань отдает заряд $\frac{3}{4}$ центральной вершине инцидентной ей 3-цепи.

2.2.1. *Проверка того, что* $\mu^*(f) \geq 0$.

Пусть f — грань ранга r. Ее граница разбивается на цепи, ограниченные с обеих сторон вершинами степени не менее 14. Чтобы оценить расход зарядов грани f по правилу R5, представим, что по каждому из правил заряд дается не на вершину, а равномерно распределяется по ребрам соответствующей цепи. Тогда по правилу R5a каждое ребро получает $\frac{1}{6}$, а по R5b — $\frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16}$. Тогда любое ребро на границе грани f может получить от f от 0 до $\frac{3}{16}$. Заметим, что $\frac{r-7}{r} \geq \frac{3}{16}$ при $r \geq 9$, откуда $\mu^* \geq r - 7 - r \times \frac{3}{16} \geq 0$. Остается рассмотреть грани ранга 7 и 8.

Если $r = 7$ и f не инцидентна 3-цепи, то $\mu^* = r - 7 = 0$, так как в этом случае f не фигурирует в правиле R5b. Если $r = 7$ и f инцидентна 3-цепи, то $\mu^* = r - 7 + 2 \times \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = 0$ по правилам R3, R5b и ввиду того, что в G нет двух Δ-вершин, соединенных 3- и 2-цепью. Доказательство последнего утверждения аналогично доказательству леммы 2, с той лишь разницей, что в данном случае вершины v_3 не будет (см. рис. 2).

Пусть, наконец, $r = 8$, тогда $\mu(f) = 1$. Если грань f делает передачу по правилу R5, то, ввиду леммы 2, она единственная (по R5a или R5b), поэтому $\mu^* \geq 1 - 1 = 0$.

2.2.2. *Проверка того, что* $\mu^* \geq 0$ *для средних и старших вершин.*

Пусть v — средняя вершина, тогда вершина v отдает каждой инцидентной цепи заряд 2 (по R1b), а значит $\mu^*(v) \geq 2d(v) - 2 \times d(v) = 0$. Аналогично, при $d(v) \geq 28$ вершина v отдает каждой инцидентной цепи заряд $\frac{9}{4}$, откуда $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2}d(v) - 7 - d(v) \times \frac{9}{4} \geq 0$.

2.2.3. *Нижняя оценка* ρ_3 *для* ≤ 2*-цепи* C.

Согласно правилу R4 младшие вершины получают от инцидентной и соседней цепи (определенного типа) некоторый положительный заряд. Определим нижнюю оценку для заряда ρ_3 цепи C не более, чем с двумя 2-вершинами. Для этого оценим не сам заряд ρ_3, а ρ_3' — часть заряда ρ_3, получаемого от одного конца. Будем рассматривать цепи, ограниченные хотя бы одной немладшей вершиной, так как цепи, ограниченные младшими вершинами, зарядов не передают.

Пусть C — 0-цепь с концами v и w. Если вершина v — средняя, то C при данном конце по правилу R3 зарядов не расходует, отсюда $\rho_3' = 2$ согласно R1b. Если вершина v — старшая, но не Δ-вершина, то, аналогично, $\rho_3' = \frac{9}{4}$. Наконец, v — Δ-вершина, тогда ρ_3' может принимать следующие значения: $\frac{9}{4}$, $\frac{15}{8}$ и $\frac{3}{2}$, в зависимости от количества передач заряда $\frac{3}{8}$ на 7-грани по правилу R3. Следовательно, если w — младшая, то от 0-цепи она получает не менее $\frac{3}{2}$.

Рассмотрим теперь 1-цепь C с концами v и w. Положим C отдает 2-вершине заряд 1 от полученного ей заряда по R1. Если вершина v — средняя, то $\rho_3' = 1$ по правилам R1b и R2 (передачи заряда $\frac{3}{8}$ на грани нет). Если вершина v — старшая, но не Δ-вершина, то $\rho_3' = \frac{5}{4}$ (аналогично случаю средней вершины). Если вершина v — Δ-вершина, то ρ_3' может принимать следующие значения: $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{1}{2}$. Таким образом, если w — младшая, то от 1-цепи она получает не менее $\frac{1}{2}$.

Лемма 7. *В G не существует 2-цепи, соединяющей младшую вершину v с вершиной степени не более $\Delta - 1$.*

Доказательство. См. рис. 10. □

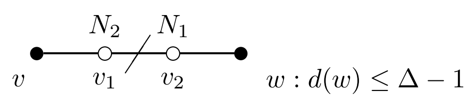

Рис. 10.

Пусть C — 2-цепь с концами v и w, тогда положим, что v — Δ-вершина. Цепь C получает от v заряд $\frac{9}{4}$ по правилу R1b и отдает на 2-вершины заряд 2, а значит $\rho_3' = \frac{1}{4}$. Следовательно, если w — младшая, то она получает $\frac{1}{4}$ от 2-цепи C .

Замечание. Если 0- или 1-цепь ограничена двумя немладшими вершинами, то оставшаяся согласно R4 у цепи сумма зарядов полностью распределяется по правилам R4b и R4′.

2.2.4. *Проверка того, что $\mu^* \geq 0$ для младших и 2-вершин.*

Младшая вершина отдает, согласно правилу R1, заряд 1 или 2 каждой инцидентной цепи, в зависимости от количества 2-вершин на соответствующей цепи. Будем рассматривать лишь те $(k_1, \ldots, k_d)$-вершины v, у которых общее количество 2-вершин на инцидентных цепях больше $\mu(v)$. Не нарушая общности, положим, что $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_d$.

Заметим, что леммы 4-6 справедливы при $g = 7$, поэтому начнем проверку с вершины v типа $(1, \ldots, 1)$, не являющейся $(2, 1, \ldots, 1)$-вершиной. Каждая инцидентная ей 1-цепь C, согласно лемме 6, ограничена с другой стороны средней или старшей вершиной. Если на конце цепи C стоит средняя или старшая вершина, не являющаяся Δ-вершиной, то v получает не менее 1 от C по правилу

R4a, а если — Δ-вершина, то v получает $\frac{5}{4}$ от C согласно R3 и R4a. Следовательно, $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2}d - 7 - d \times 1 + d \times 1 > 0$ при $d(v) \geq 3$.

Пусть v — вершина типа $(2, \ldots, 2, 0)$, не являющаяся $(2, \ldots, 2, 1)$-вершиной, тогда сначала предположим, что $d(v) = 3$. Она получает заряд $\frac{1}{4}$ от каждой инцидентной 2-цепи по правилу R4a и лемме 7. Кроме того 0-цепь, инцидентная v, ограничена с другой стороны немладшей вершиной (по лемме 5), и поэтому отдает v не менее 2 по правилу R4a (0-цепь зарядов по R3 не отдает). По правилу R5a грань f с $r(f) \geq 8$, инцидентная v и двум ее соседним 2-цепям, отдает v заряд 1, а если $r(f) = 7$, то вершина v получает заряд не менее $\frac{3}{2}$ от 0-цепи на границе f, ограниченной двумя Δ-вершинам, по правилу R4b. Таким образом, $\mu^*(v) \geq \frac{1}{2} - 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{4} + 2 + 1 = 0$ для $d(v) = 3$. При $d(v) \geq 4$ рассуждаем аналогично, так как при увеличении степени v на 1 заряд будет увеличиваться на $\frac{5}{2}$, а число 2-цепей — на 1, отсюда $\mu^*(v) \geq \frac{1}{2} - 2 \times 2 + 2 \times \frac{1}{4} + 2 + 1 + (d-3) \times (\frac{5}{2} - 2) > 0$.

Рассмотрим вершину v типа $(2, \ldots, 2, 1, 0)$, не являющуюся $(2, \ldots, 2, 0)$-вершиной. Она получает заряд $\frac{1}{4}$ от каждой инцидентной 2-цепи по правилу R4a и лемме 7. Пусть $d(v) = 3$, тогда 0-цепь C, исходящая из v, ограничена старшей вершиной ввиду конфигурации на рис.11. Если C не делает передач заряда на грани по R3, то v получает заряд $\frac{9}{4}$ от C по R4a, а значит $\mu^*(v) \geq \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 0$. Допустим, что C делает передачу заряда $\frac{3}{8}$ на 7-грань, инцидентную 1-цепи, исходящей из v, тогда эта 1-цепь ограничена с другой стороны Δ-вершиной. В этом случае v получает заряд не менее $\frac{1}{2}$ от 1-цепи по R4a, а значит $\mu^*(v) \geq \frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{4} + \frac{15}{8} + \frac{1}{2} > 0$. Для $4 \leq d(v) \leq 5$ верна лемма 5, тогда ввиду того, что $\mu(v) \geq 2d - 5$, имеем $\mu^*(v) \geq 2d - 5 - (2d-3) + (d-2) \times \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \geq 0$. Пусть теперь $d(v) \geq 6$, тогда $\mu(v) \geq 2d - 4$, отсюда $\mu^*(v) \geq 2d - 4 - (2d-3) + (d-2) \times \frac{1}{4} > 0$.

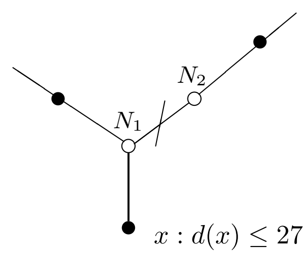

Рис. 11.

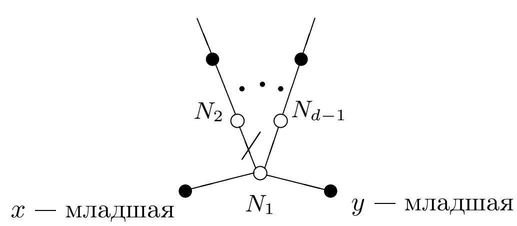

Рис. 12.

Пусть v — вершина типа $(2, \ldots, 2, 0, 0)$, не являющаяся $(2, \ldots, 2, 1, 0)$-вер--шиной. При $3 \leq d(v) \leq 5$ сводима конфигурация на рис. 12, поэтому v получает хотя бы от одной 0-цепи заряд не менее $\frac{3}{2}$ по правилу R4a. Заметим, что $\mu(v) \geq \ 2d - \frac{11}{2}$ при $d(v) \geq 3$, а значит $\mu^*(v) \geq 2d - \frac{11}{2} - (d-2) \times 2 + \frac{3}{2} = 0$. Если $d(v) \geq 6$, то $\mu^*(v) \geq 2d - 4 - (d-2) \times 2 = 0$.

Если v - $(\dots,1,1,0)$-вершина и $3 \le d(v) \le 5$, то сводима конфигурация на рис. 13 (a). Допустим, что 0-цепь C, инцидентная v, ограничена младшей вершиной, тогда каждая соседняя с ней 1-цепь, исходящая из v, отдает v заряд не менее 1 по правилу R4a, а значит $\mu^*(v) \ge 2d - \frac{11}{2} - (d-3)\times 2 - 2 + 2\times 1 > 0$. Пусть C ограничена средней или старшей вершиной, тогда v получает не менее $\frac{3}{2}$ от C по правилу R4a, отсюда $\mu^*(v) \ge 2d - \frac{11}{2} - (d-3)\times 2 - 2 + \frac{3}{2} = 0$. Если $d(v) \ge 6$, то $\mu^*(v) \ge 2d - 4 - (d-3)\times 2 - 2 = 0$.

Пусть теперь v — $(\dots,1,0,0)$-вершина, не являющаяся $(\dots,1,1,0)$-вершиной, тогда при $d(v) \ge 4$ заряд $\mu(v) \ge 2d-5$, а v отдает инцидентным цепям не более $2d-5$. Если $d(v) = 3$, то v получает не менее $\frac{1}{2}$ от 1-цепи или не менее $\frac{3}{2}$ хотя бы от одной 0-цепи по правилу R4a, ввиду конфигурации на рис. 13 (b). Отсюда $\mu^*(v) \ge \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$.

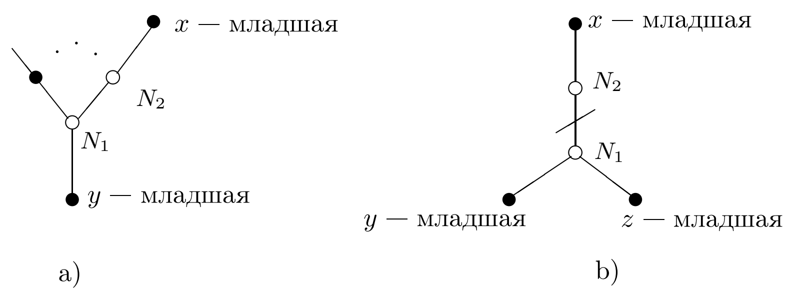

Рис. 13.

Рассмотрим наконец вершину v типа $(\dots,0,0,0)$, не являющуюся $(\dots,1,0,0)$-вершиной, тогда $\mu^*(v) \ge 2d - \frac{11}{2} - (d-3)\times 2 > 0$ при $d(v) \ge 3$.

Остается рассмотреть 2-вершину v. Согласно следствию $1'$, в графе G нет ≥ 4-цепей. Если вершина v смежна с хотя бы одной ≥ 3-вершиной, то она получает заряд 2 от инцидентной цепи по правилу R2. Если v смежна с двумя 2-вершинами, то это означает, что v является центральной вершиной 3-цепи. Поэтому она получает заряд $\frac{1}{2}$ от 3-цепи по R2 и заряд $\frac{3}{4}$ от каждой инцидентной грани по правилу R5b. Таким образом, $\mu^*(v) \ge -2 + \frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{4} = 0$.

2.3. **Случай** $g \le 6$.

На рис.14 и 15 приведены примеры плоских графов с обхватом 6 и 5, соответственно, таких что $\chi_2(G) > \Delta + 1$ при произвольном Δ, а ранее были известны такие графы с обхватом 4 и 3 ([4], [3, п. 2.18]).

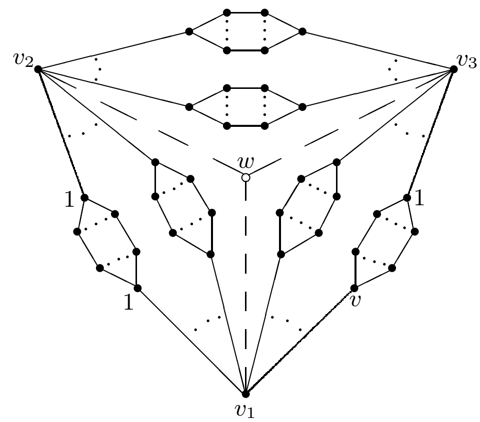

Рис. 14.

Заметим, что при четном Δ в приведенном на рис. 14 графе, имеются только вершины степени 2 и Δ. В нечетном случае добавляем вершину w степени 3, инцидентные ребра которой обозначены на рисунке пунктиром. Пусть ни одна из вершин v_1, v_2, v_3 не окрашена в 1, тогда цвет 1 должен встречаться на одной из смежных с v_i вершинах, где $1 \leq i \leq 3$ (например так, как показано на рисунке). Поскольку v имеет степень Δ, то либо она сама, либо одна из смежных с ней вершин должна быть окрашена в 1, что невозможно.

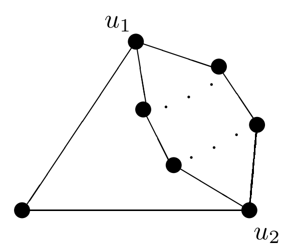

Рис. 15.

Ввиду того, что на Δ-вершине u_1 и ей смежных вершинах встречаются все возможные цвета $(\Delta + 1)$, вершину u_2 нельзя покрасить (см. рис.15).

Теорема 1 доказана.

Список литературы

[1] О.В. Бородин, Х. Брусма, А.Н. Глебов, Я. Ван ден Хойвел, *Минимальные степени и хроматические числа квадратов плоских графов*, Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, №4. С. 9–33.

[2] О.В. Бородин, А.О. Иванова, Т.К. Неустроева, *2-дистанционная раскраска разреженных плоских графов*, Сибирские электронные математические известия. 2004. Т. 1, С. 76–90 (http://semr.math.nsc.ru/).

[3] T.R. Jensen, B. Toft, *Graph coloring problems*, New York, John–Wiley & Sons, 1995.

[4] G. Wegner, *Graphs with given diameter and a coloring problem*, Technical Report. University of Dortmund, 1977.

Олег Вениаминович Бородин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `brdnoleg@math.nsc.ru`

Алексей Николаевич Глебов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `angle@math.nsc.ru`

Анна Олеговна Иванова
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского 48,
677000 Якутск, Россия
E-mail address: `shmgnanna@mail.ru`

Татьяна Кимовна Неустроева
Якутский государственный университет им. М.К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского 48,
677000 Якутск, Россия
E-mail address: `podn2001@mail.ru`

Владимир Александрович Ташкинов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `valet@math.nsc.ru`