Le problème du premier chiffre décimal pour les nombres premiers

AIMÉ FUCHS - GIORGIO LETTA [1]

Das ist die Noth der schweren Zeit!
Das ist die schwere Zeit der Noth!
Das ist die schwere Noth der Zeit!
Das ist die Zeit der schweren Noth!

(A. von Chamisso, Vorläufer der Kombinatorik)

A Dominique, en témoignage d'estime et de profonde amitié.

RÉSUMÉ. - Pour une large classe de parties de $\mathbb{N}^*$ (à laquelle appartient notamment l'ensemble qui intervient dans le problème du premier chiffre décimal) on démontre que les densités arithmétiques inférieure et supérieure, ainsi que la densité logarithmique, coïncident avec les "densités conditionnelles" correspondantes, obtenues en conditionnant par rapport à l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers.

1. Introduction

Il est bien connu (voir [2]) qu'à toute mesure positive μ sur $\mathbb{R}$, concentrée sur $\mathbb{N}^*$ et de masse totale infinie, on peut associer une notion de *densité*, de la manière suivante: pour chaque partie A de $\mathbb{N}^*$, on considère les deux nombres réels

$$(1.1) \qquad \underline{\mathrm{d}}_\mu = \liminf_n \frac{\mu(A \cap [1,n])}{\mu([1,n])}, \qquad \overline{\mathrm{d}}_\mu(A) = \limsup_n \frac{\mu(A \cap [1,n])}{\mu([1,n])},$$

qu'on appelle la *μ-densité inférieure* et la *μ-densité supérieure* de A. Lorsque ces deux nombres coïncident, leur valeur commune est désignée par $d_\mu(A)$, et appelée la *μ-densité* de A. (On dit alors que A admet une μ-densité.)

[1] Adresse du auteurs:
Aimé Fuchs: Département de Mathématique, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg;
Giorgio Letta: Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa.

Nous étudierons notamment le cas de la *densité arithmétique*, c'est- à-dire le cas où l'on a

$$\mu = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} \varepsilon_n, \tag{1.2}$$

et le cas de la *densité logarithmique*, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\mu = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-1}\varepsilon_n. \tag{1.3}$$

Dans le cas (1.2), les nombres (1.1) sont désignés par $\underline{\mathrm{d}}(A)$, $\overline{\mathrm{d}}(A)$, et appelés la *densité arithmétique inférieure* et la *densité arithmétique supérieure* de A. Lorsque ces deux nombres coïncident, leur valeur commune est désignée par $\mathrm{d}(A)$, et appelée la *densité arithmetique* de A.

Dans le cas (1.3), les nombres (1.1) sont désignés par $\underline{\delta}(A), \overline{\delta}(A)$, et appelés la *densité logarithmique inférieure* et la *densité logarithmique supérieure* de A. Lorsque ces deux nombres coïncident, leur valeur commune est désignée par $\delta(A)$, et appelée la *densité logarithmique* de A.

En revenant au cas général, remarquons que si l'ensemble A n'est ni fini ni cofini, on peut le représenter (de manière unique) sous la forme

$$A = \bigcup_{n\geq 0} (\mathbb{N}^* \cap [p_n, q_n[), \tag{1.4}$$

où $(p_n)_{n\geq 0}, (q_n)_{n\geq 0}$ sont deux suites d'entiers strictement positifs, avec

$$p_n < q_n < p_{n+1} \text{ pour tout } n.$$

On voit alors sans peine que l'on a

$$\underline{\mathrm{d}}_\mu(A) = \liminf_n \frac{\mu(A\cap[1,p_n[)}{\mu([1,p_n[)}, \qquad \overline{\mathrm{d}}_\mu = \limsup_n \frac{\mu(A\cap[1,q_n[)}{\mu([1,q_n[)}.$$

On en déduit, grâce au théorème classique de Cesaro, le résultat suivant (cf. [2], 8.4, p. 279):

1.5 Théorème. *Étant donnée une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme (1.4), on suppose l'existence des deux limites suivantes:*

$$\alpha = \lim_n \frac{\mu([p_n,q_n[)}{\mu([q_{n-1},q_n[)}, \qquad \beta = \lim_n \frac{\mu([1,q_{n-1}[)}{\mu([1,p_n[)}. \tag{1.6}$$

On a alors

$$\overline{\mathrm{d}}_\mu(A) = \alpha, \qquad \underline{\mathrm{d}}_\mu(A) = \alpha\beta.$$

1.7. Corollaire. *Étant donnée une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme (1.4), on suppose qu'il existe un couple (ρ,σ) de nombres réels, avec $0<\rho<\sigma<1$, tel que l'on ait*

$$q_{n-1} \sim \rho\, q_n, \qquad p_n \sim \sigma\, q_n.$$

Alors:

(a) Les densités arithmétiques supérieure et inférieure de A sont données par

$$\overline{\mathrm{d}}(A) = (1-\sigma)/(1-\rho), \qquad \underline{\mathrm{d}}(A) = [\rho\,(1-\sigma)]/[\sigma\,(1-\rho)].$$

L'ensemble A n'admet donc pas de densité arithmétique.

(b) Par contre, A admet une densité logarithmique, qui est donnée par

$$\delta(A) = \log\sigma/\log\rho.$$

DÉMONSTRATION. (a) Plaçons nous d'abord dans le cas de la densité arithmétique, c'est-à-dire dans le cas où la mesure μ est définie par (1.2).
On a alors

$$\frac{\mu([p_n, q_n[)}{\mu([q_{n-1}, q_n[)} = \frac{q_n - p_n}{q_n - q_{n-1}} \sim \frac{1-\sigma}{1-\rho},$$

$$\frac{\mu([1, q_{n-1}[)}{\mu([1, p_n[)} \sim \frac{q_{n-1}}{p_n} \sim \frac{\rho}{\sigma}.$$

Par conséquent, les limites (1.6) sont données par

$$\alpha = (1-\sigma)/(1-\rho), \qquad \beta = \rho/\sigma,$$

d'où la conclusion.

(b) Considérons maintenant le cas de la densité logarithmique. Dans ce cas, où la mesure μ est définie par (1.3), on a (lorsque x tend vers $+\infty$)

$$\mu([1, x[) = \log x + \gamma + O(x^{-1}),$$

où γ est la constante d'Euler. Il en résulte

$$\frac{\mu([p_n, q_n[)}{\mu([q_{n-1}, q_n[)} \sim \frac{\log q_n - \log p_n}{\log q_n - \log q_{n-1}} \sim \frac{\log\sigma}{\log\rho},$$

$$\frac{\mu([1, q_{n-1}[)}{\mu([1, p_n[)} \sim \frac{\log q_{n-1}}{\log p_n} \sim \frac{\log q_n + \log\rho}{\log q_n + \log\sigma} \sim 1.$$

Par conséquent, les limites (1.6) sont données par

$$\alpha = \log\sigma/\log\rho, \qquad \beta = 1,$$

d'où la conclusion.

Voilà deux exemples importants où les conditions du corollaire précédent sont remplies.

1.8. Exemple. Soit $p_n = k\,10^n, q_n = (k+1)\,10^n$, où k est un entier fixe, compris entre 1 et 9. On voit alors que l'ensemble A défini par (1.4) est constitué par les entiers strictement positifs qui, dans la représentation décimale, admettent k comme premier chiffre.
On a, dans ce cas, $\rho = 10^{-1}, \sigma = k/(k+1)$. Par conséquent, les densités arithmétiques supérieure et inférieure de A sont données par

$$\overline{\mathrm{d}}(A) = 10/[9(k+1)], \qquad \underline{\mathrm{d}}(A) = 1/(9k),$$

tandis que la densité logarithmique de A est donnée par

$$\delta(A) = \log_{10}(1 + 1/k).$$

Ceci résout la fameux problème dit "du premier chiffre décimal" (voir, par exemple, [3]).

1.9. Exemple. Soit $p_n = m^{2n}, q_n = m^{2n+1}$, où m est un entier fixe, avec $m \geq 2$. L'ensemble A défini par (1.4) est constitué alors par les entiers strictement positifs qui, dans la représentation en base m, s'écrivent avec un nombre *impair* de chiffres. Ici on a $\rho = 1/m^2, \sigma = 1/m$. Par conséquent, les densités arithmétiques supérieure et inférieure de A sont données par

$$\overline{\mathrm{d}}(A) = m/(m+1), \qquad \underline{\mathrm{d}}(A) = 1/(m+1),$$

tandis que la densité logarithmique de A est donnée par $\delta(A) = 1/2$.

2. Densités Conditionnelles

Étant données une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$, concentrée sur $\mathbb{N}^*$, et une partie H de $\mathbb{N}^*$, avec $\mu(H) = \infty$, on peut considérer la nouvelle mesure ν sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\nu = \sum\nolimits_{n \in H} \mu\{n\}\, \varepsilon_n.$$

La densité associée à cette nouvelle mesure peut être appelée une μ-densité *conditionnelle*. De façon plus précise: pour toute partie A de $\mathbb{N}^*$, les nombres $\underline{\mathrm{d}}_\nu(A), \overline{\mathrm{d}}_\nu(A)$ sont appelés les μ-densités inférieure et supérieure de A, *conditionnelles à H* (et, dans le cas où ces deux nombres coïncident, leur valeur commune est appelée la μ-densité de A conditionelle à H).

Nous considérerons notamment le cas où H est l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers et où μ est l'une des deux mesures (1.2), (1.3) (dont chacune attribue à $\mathbb{P}$ une masse infinie). On parlera, en correspondance, de la *densité arithmétique*, conditionelle à $\mathbb{P}$, et de la *densité logarithmique*, conditionnelle à $\mathbb{P}$.

Nous nous proposons de montrer que, dans le corollaire (1.7) (donc aussi dans chacun des exemples 1.8, 1.9), les conclusions sont encore valables si l'on remplace les densités arithmétique et logarithmique par les densités conditionnelles correspondantes, relatives à $\mathbb{P}$:

2.1. THÉORÈME. *Étant donnée une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme (1.4), on suppose qu'il existe une couple (ρ, σ) de nombres réels, avec $0 < \rho < \sigma < 1$, tel que l'on ait*

$$q_{n-1} \sim \rho\, q_n, \qquad p_n \sim \sigma\, q_n.$$

Alors:

(a) L'ensemble A admet comme densité arithmétique inférieure (resp. supérieure), conditionnelle à $\mathbb{P}$, le nombre $[\rho\,(1-\sigma)]/[\sigma\,(1-\rho)])$ (resp. $(1-\sigma)/(1-\rho)$). Il n'admet donc pas de densité arithmétique conditionnelle á $\mathbb{P}$.

(b) Par contre, l'ensemble A admet, comme densité logarithmique conditionnelle à $\mathbb{P}$, le nombre $\log\sigma/\log\rho$.

Afin de démontrer ce résultat, nous commencerons par rappeler que si, pour tout nombre réel $x \geq 1$, on pose

$$\pi(x) = \text{ Card } (\mathbb{P} \cap [1, x]),$$

on a (pour x tendant vers $+\infty$)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{2.2}$$

En utilisant cette relation, réglons le cas de la densité arithmétique.
Plaçons nous donc dans les hypothèses du Théorème 2.1, et considérons la mesure ν sur $\mathbb{R}$ (concentrée sur $\mathbb{P}$) définie par

$$\nu = \sum\nolimits_{n\in\mathbb{P}} \varepsilon_n.$$

On a, par hypothèse, $q_{n-1} \sim \rho\, q_n, p_n \sim \sigma\, q_n$, et par suite

$$\log q_{n-1} \sim \log p_n \sim \log q_n. \tag{2.3}$$

La propriété (2.2) entraîne donc

$$\pi(q_{n-1}) \sim \rho\, \pi(q_n), \qquad \pi(p_n) \sim \sigma\, \pi(q_n),$$

et par conséquent

$$\frac{\nu([1, q_{n-1}[)}{\nu([1, p_n[)} \sim \frac{\nu([1, q_{n-1}])}{\nu([1, p_n])} = \frac{\pi(q_{n-1})}{\pi(p_n)} \sim \frac{\rho}{\sigma},$$

$$\frac{\nu([p_n, q_n[)}{\nu([q_{n-1}, q_n[)} \sim \frac{\nu(]p_n, q_n])}{\nu(]q_{n-1}, q_n]}) = \frac{\pi(q_n) - \pi(p_n)}{\pi(q_n) - \pi(q_{n-1})} \sim \frac{1-\sigma}{1-\rho}.$$

La conclusion résulte donc du Théorème 1.5.

Pour traiter l'autre cas (celui de la densité logarithmique), nous nous servirons du lemme suivant (cf. [1], p. 89):

2.4. LEMME. *Soit ν la mesure sur $\mathbb{R}$ (concentrée sur $\mathbb{P}$) définie par*

$$\nu = \sum_{n \in \mathbb{P}} n^{-1} \varepsilon_n. \tag{2.5}$$

On a alors, pour $x > 1$,

$$\nu([1,x]) = \frac{\pi(x)}{x} + \int_1^x t^{-2} \pi(t)\, dt. \tag{2.6}$$

Par conséquent, on a, pour x tendant vers $+\infty$,

$$\nu([1,x]) \sim \log\log x. \tag{2.7}$$

DÉMONSTRATION. Considérons la mesure λ sur $\mathbb{R}$ (concentrée sur $\mathbb{P}$) définie par

$$\lambda = \sum\nolimits_{n \in \mathbb{P}} \varepsilon_n.$$

La formule d'intégration par parties fournit alors, pour $x > 1$,

$$\int_{[1,x]} t^{-1}\, \lambda(dt) = x^{-1} \lambda([1,x]) + \int_1^x t^{-2}\, \lambda([1,t])\, dt,$$

c'est-à-dire

$$\nu([1,x]) = \frac{\pi(x)}{x} + \int_1^x t^{-2}\, \pi(t)\, dt.$$

Au deuxième membre de cette relation, le terme $\pi(x)/x$ (qui, grâce à (2.2), converge vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$) est négligeable devant l'autre terme, de sorte que l'on a

$$\nu([1,x]) \sim \int_1^x t^{-2}\, \pi(t)\, dt.$$

On a, d'autre part

$$t^{-2}\, \pi(t) \sim (t \log t)^{-1}, \qquad \int_2^\infty (t \log t)^{-1} dt = \infty,$$

et par conséquent

$$\int_1^x t^{-2}\, \pi(t)\, dt \sim \int_2^x t^{-2}\, \pi(t)\, dt \sim \int_2^x (t \log t)^{-1}\, dt \sim \log\log x.$$

La relation (2.7) est donc démontrée.

En utilisant le lemme qu'on vient de démontrer, passons maintenant à traiter le cas de la densité logarithmique. Plaçons nous donc dans les hypothèses du Théorème

2.1, et considérons la mesure ν sur $\mathbb{R}$ (concentrée sur $\mathbb{P}$) définie par (2.5). On a alors, grâce à (2.7) et (2.3),

$$\frac{\nu([1,q_{n-1}[)}{\nu([1,p_n[)} \sim \frac{\nu([1,q_{n-1}])}{\nu([1,p_n])} \sim \frac{\log\log q_{n-1}}{\log\log p_n} \sim 1.$$

On a d'autre part, grâce à (2.6),

$$\nu([p_n,q_n[) \sim \nu(]p_n,q_n]) = \frac{\pi(q_n)}{q_n} - \frac{\pi(p_n)}{p_n} + \int_{p_n}^{q_n} t^{-2}\,\pi(t)\,dt.$$

Au dernier membre de cette relation, les termes $\pi(q_n)/q_n, \pi(p_n)/p_n$ sont équivalents à $1/\log q_n$, de sorte que leur différence est négligeable devant $1/\log q_n$. Par contre, la relation (2.2) entraîne

$$\begin{aligned}\int_{p_n}^{q_n} t^{-2}\,\pi(t)\,dt &\sim \int_{p_n}^{q_n} t^{-2}\,\frac{t}{\log t}\,dt\\ &= \log\frac{\log q_n}{\log p_n} \sim \frac{\log q_n}{\log p_n} - 1 = \frac{\log(q_n/p_n)}{\log p_n} \sim -\frac{\log\sigma}{\log q_n}.\end{aligned}$$

On a donc, finalement: $\nu([p_n,q_n[) \sim -\log\sigma/\log q_n$. De manière analogue, on trouve $\nu([q_{n-1},q_n[) \sim -\log\rho/\log q_n$. On en déduit

$$\frac{\nu([p_n,q_n[)}{\nu([q_{n-1},q_n[)} \sim \frac{\log\sigma}{\log\rho},$$

et la conclusion résulte alors du Théorème 1.5.

Bibliographie

[1] P.D.T.A. Elliot, *Probabilistic Number Theory I*, Springer, Berlin, 1979.

[2] A. Fuchs - R. Giuliano Antonini, *Théorie générale des densités*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 108^0 (1990), XIV,

[3] A. Fuchs - G. Letta, *Sur le problème du premier chiffre décimal*, Boll. U.M.I., (6) 2-B (1984), 451-461.