RÉSULTANT ANISOTROPE
COMPLÉMENTS ET APPLICATIONS

Jean-Pierre JOUANOLOU
(U. L. P. Strasbourg)

A Dominique Foata, pour son soixantième anniversaire, en témoignage de fidèle amitié

Submitted: December 1, 1994; Accepted: February 4, 1995

Le but du présent article est d'étendre au cas anisotrope introduit dans [J3] un certain nombre d'énoncés et de formules de [J5] et [J6] qui ne sont établis dans (loc.cit) que dans la situation classique usuelle. Cela conduit d'une part à surmonter quelques difficultés techniques, d'autre part à clarifier un certain nombre de résultats antérieurs. Enfin, on montre sur quelques exemples simples l'utilité des énoncés obtenus.

Le plan de l'article est le suivant :

1- Complexe de Koszul anisotrope.

2- Inertie de degré 0 et résultant anisotrope.

3- Structure de la transgression et inertie.

4- Autour des formules de Macaulay.

5- Formules à la Sylvester et exemples d'applications.

Parmi les résultats obtenus, signalons les deux suivants :

a) Une expression explicite dans le cas intersection complète de la dualité de Grothendieck, fournissant en principe dans ce cas *toutes* les formes d'inertie.

b) Des formules à la Sylvester, à coefficients *entiers*, pour certains résultants anisotropes, avec des applications géométriques : équations implicites des surfaces paramétrées (précisant Brill [Br]), calcul de résultants réduits...

1. Complexe de Koszul anisotrope

1.1 On suppose donnés dans cette partie un entier $n \geq 1$ et une suite $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ indexée par $[n]$ d'entiers ≥ 1. On pose

$$m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n).$$

Etant donné un anneau commutatif ℓ, on pondère la ℓ-algèbre de polynômes

$$C := \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$$

en affectant les indéterminées $X_i (1 \leq i \leq n)$ du poids ("degré anisotrope")

$$\deg_a(X_i) = m_i,$$

et en posant, bien sûr, $\deg_a(x) = 0$ pour tout $x \in \ell$. On pose en outre

$$\mathfrak{M} := (X_1, X_2, \cdots, X_n) \subset \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n].$$

Supposons de plus donnée une deuxième suite $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ indexée par $[n]$ d'entiers ≥ 1, et, pour tout $i \in [n]$, un polynôme isobare de poids d_i

$$f_i = \sum_{\deg_a(X^\alpha) = d_i} u_{i\alpha} X^\alpha \in \ell[X_1, \cdots, X_n]_{d_i}$$

On note alors

$$\begin{aligned} d &:= pgcd(d_1, d_2, \cdots, d_n) \\ \delta &:= \sum_{i=1}^{n} (d_i - m_i) \\ B &:= \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_n) = C/(f_1, f_2, \cdots, f_n). \end{aligned}$$

L'exemple *générique* d'une telle situation est celui où, étant donné un anneau commutatif k, et une famille d'indéterminées $U_{i,\alpha} (1 \leq i \leq n, \deg_a(X^\alpha) = d_i)$, on prend pour anneau ℓ la k-algèbre de polynômes

$$A := k[U_{i\alpha} | i \in [n], \deg_a(X^\alpha) = d_i]$$

et, pour tout $i \in [n]$,

$$f_i := \sum_{\deg_a(X^\alpha) = d_i} U_{i\alpha} X^\alpha \in A[X_1, \cdots, X_n].$$

Lorsque ℓ est une k-algèbre, toute situation du type indiqué se déduit de la situation générique correspondante sur k par spécialisation k-linéaire $U_{i\alpha} \mapsto u_{i\alpha}$ $(i \in [n], \deg_a(X^\alpha)| = d_i)$.

Avec la pondération définie sur la ℓ-algèbre C, le complexe de Koszul

$$K^\bullet := \mathrm{Kosz}(f_1, f_2, \cdots, f_n; C)$$

est un complexe de C-modules $\mathbf{Z}$-gradués

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to C(-d_1 - d_2 \cdots\cdots - d_n) \to \cdots & \to \bigoplus_{i=1}^n C(-d_i) & \xrightarrow{[f_1,\cdots,f_n]} & C \to 0 \ . \\ \| & \| & & \| \\ K^{-n} & K^{-1} & & K^0 \end{array}$$

Plus précisément, pour tout $0 \leq i \leq n$, on a

$$K^{-i} = \Lambda^i(K^{-1}) = \bigoplus_{\substack{J \subset [n] \\ |J|=i}} C(-\sum_{j\in J} d_j) \ .$$

Dans la situation générique sur un anneau commutatif k, on peut munir $A = k[U_{i\alpha}|i \in [n], \deg_a(X^\alpha) = d_i]$ d'une structure de $\mathbf{N}^n$-algèbre graduée, en posant

$$A_{(0,\cdots,0)} = k$$

et, pour tout (i, α) avec $i \in [n]$ et $\deg_a(X^\alpha) = d_i$,

$$\deg(U_{i\alpha}) = (0, \cdots, 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, \cdots, 0) := \varepsilon_i \in \mathbf{N}^n.$$

La k-algèbre $A[X_1, \cdots, X_n]$ est ainsi $(\mathbf{N}^n \times \mathbf{N})$-graduée. Dans ces conditions, le complexe de Koszul générique est un complexe de C-modules $(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z})$-gradués. Plus précisément, notant $\{x; y\}$ le décalage par $(x, y) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z}$, on a dans ce cas

$$K^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{n} C\{-\varepsilon_i \ ; \ -d_i\}$$

d'où pour tout $0 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} K^{-i} &= \Lambda^i(K^{-1}) \\ &= \bigoplus_{\substack{JC[n] \\ |J|=i}} C\{-\sum_{j\in J} \varepsilon_j \ ; \ -\sum_{j\in J} d_j\} \ . \end{aligned}$$

1.2. Dans la situation préliminaire de (1.1), rappelons que

$$H^i_{\mathfrak{M}}(C) = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq n$$

et

$$H^n_{\mathfrak{M}}(C) = (X_1 \cdots X_n)^{-1}\ell[X_1^{-1}, \cdots, X_n^{-1}],$$

avec $\deg_a(X_i^{-1}) = -m_i (i \in [n])$, de sorte que, en particulier

$$H^n_{\mathfrak{M}}(C)_\nu = 0 \quad \text{si} \quad \nu > -(\sum_{i=1}^{n} m_n)$$

et

$$H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\sum_{i=1}^n m_i} = \ell(X_1 \cdots X_n)^{-1} \simeq \ell \ .$$

De plus, il est immédiat que, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$, l'accouplement canonique entre ℓ-modules libres de type fini

$$\begin{aligned} C_\nu \otimes_\ell H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-(\sum_{i=1}^n m_i)-\nu} &\longrightarrow H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\sum_{i=1}^n m_i} \simeq \ell \\ c \otimes x &\longmapsto cx \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

est une dualité parfaite.

1.3. Le complexe de Koszul $K^\bullet = \mathrm{Kosz}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ donne lieu à deux suites spectrales de même aboutissement dans la catégorie des C-modules $\mathbf{Z}$-gradués

$$'E_1^{pq} = H^q_{\mathfrak{M}}(K^p) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{M}}(K^\bullet) \tag{I}$$

$$''E_2^{pq} = H^p_{\mathfrak{M}}(H^q(K^\bullet)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{M}}(K^\bullet) \ . \tag{II}$$

Compte tenu de ce que $H^i_{\mathfrak{M}}(C) = 0$ si $i \neq n$ et de ce que les C-modules K^p sont (gradués)-libres, la suite spectrale (I) permet, pour tout $p \in \mathbf{Z}$, d'identifier $H^p_{\mathfrak{M}}(K^\bullet)$ et le $p^{\text{ème}}$-module de cohomologie du complexe $L^\bullet$ défini comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \to 0 \to & H^n_{\mathfrak{M}}(K^{-n}) & \xrightarrow{H^n_{\mathfrak{M}}(d)} & H^n_{\mathfrak{M}}(K^{-n+1}) \to \cdots \to & H^n_{\mathfrak{M}}(C) \to 0 \to \cdots \\ & \| & & \| & \| \\ & L^0 & & L^1 & L^n \end{array}$$

En particulier

$$H^0_{\mathfrak{M}}(K^\bullet) = H^0(f_1, f_2, \cdots, f_n; H^n_{\mathfrak{M}}(C)(-\sum_{i=1}^{n} d_i))$$

$$(= H^0(L^\bullet)) \ ,$$

et la suite spectrale (II) donne lieu à un *morphisme de transgression* (voir [J6])

$$\tau : H^0(f_1, \cdots, f_n; H^n_{\mathfrak{M}}(C)(-\sum_{i=1}^{n} d_i)) \to H^0_{\mathfrak{M}}(B) \ .$$

Pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$, notons τ_ν la composante homogène de degré ν de τ. D'après la dualité parfaite (1.2.1), la source de τ_ν s'identifie à

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_\ell(B_{\delta-\nu}, H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\sum_{i=1}^{n} m_i}) \\
&\simeq B^\vee_{\delta-\nu} \otimes_\ell [\ell(X_1 \cdots X_n)^{-1}] \quad (\vee : \text{dual sur } \ell) \\
&\simeq B^\vee_{\delta-\nu} \quad (X_1 X_2 \cdots X_n \mapsto 1) \ .
\end{aligned}$$

Cela permet d'identifier τ_ν à un morphisme de ℓ-modules

$$\hat{\tau}_\nu : \check{B}_{\delta-\nu} \longrightarrow H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \ .$$

Munissant $\bigoplus_\nu \check{B}_{\delta-\nu}$ de sa structure de B-module évidente, l'application ℓ-linéaire

$$\hat{\tau} := \bigoplus_\nu \hat{\tau}_\nu : \bigoplus_\nu \check{B}_{\delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)$$

est un morphisme de B-modules $\mathbf{Z}$-gradués.

Dans la situation générique sur un anneau k, les suites spectrales I et II peuvent être définies dans la catégorie des C-modules $(\mathbf{Z}^n \times \mathbf{Z})$-gradués. Avec les notations de (1.1) dans ce cas, on a

$$\tau : H^0(f_1, \cdots, f_n; H^n_{\mathfrak{M}}(C)\{-1, \cdots, -1, \cdots, -1; -\sum_{i=1}^{n} d_i\}) \to H^0_{\mathfrak{M}}(B) \ .$$

On en déduit que, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$, l'application A-linéaire $\hat{\tau}_\nu$ est un morphisme de A-modules $\mathbf{Z}^n$-gradués (pour la graduation $\deg(U_{i\alpha}) = \varepsilon_i \in \mathbf{Z}^n$)

$$\hat{\tau}_\nu : \check{B}_{\delta-\nu}\{-1, -1, \cdots, -1\} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \ .$$

1.4. Dans la situation (1.1), soit

$$\mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 \subset \ell$$

l'idéal des formes d'inertie (par rapport à $\mathfrak{M}$) de l'idéal $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de C. Utilisant le "lemme d'inertie" ([J6] 3.12.1.2), on démontre comme en ([J6]3.12.2) que pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$,

$$\mathcal{A}^n \mathrm{Ker}(\tau_\nu) = \mathcal{A}^n \mathrm{Coker}\ (\tau_\nu) = 0\ , \tag{1.4.1}$$

ou, si l'on préfère,

$$\mathcal{A}^n \mathrm{Ker}(\hat{\tau}_\nu) = \mathcal{A}^n \mathrm{Coker}\ (\hat{\tau}_\nu) = 0\ . \tag{1.4.2}$$

Lorsque $\nu < 0$ (resp.$\nu > \delta$), le but (resp. la source) de τ_ν est égal à 0, donc

$$\begin{cases} \mathcal{A}^n H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \nu > \delta\ , \\ \mathcal{A}^n B^\vee_\nu = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \nu > \delta\ , \\ \mathcal{A}^n H^0(f_1, \cdots, f_n; H^n_{\mathfrak{M}}(C))_\nu = 0 \qquad \text{lorsque} \quad \nu < -\sum_{i=1}^n d_i\ . \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Pour $\nu = 0$, on déduit de (1.4.1) que $\mathcal{A}^{n+1} \subset \mathrm{Im}(\tau_0) \subset \mathcal{A}$, ce qui montre en particulier que *les idéaux* $\mathcal{A}$ *et* $\mathrm{Im}(\tau_0) = \mathrm{Im}(\hat{\tau}_0)$ *de* ℓ *ont la même racine.*

1.5. L'énoncé suivant est une variante d'énoncés analogues de ([J6] 3.12.4), où l'on supposait $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$, et se prouve de la même manière.

Proposition 1.5.1.— *Sous les hypothèses de (1.1), les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière dans C.

(ii) La suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est localement régulière dans C en dehors de $V(\mathfrak{M})$.

(iii) La suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est localement complètement sécante.

Dans ce cas, le complexe $K^\bullet = \mathrm{Kosz}(f_1, \cdots, f_n; C)$ est acyclique, et la comparaison des suites spectrales (I) et (II) fournit, pour tout $i \geq 0$, un isomorphisme de C-modules $\mathbf{Z}$*-gradués*

$$H^i(f_1, \cdots, f_n; H^n_{\mathfrak{M}}(C)(-\sum_{i=1}^n d_i)) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathfrak{M}}(B)\ .$$

En particulier, pour tout $\nu \geq 0$, le morphisme de ℓ-modules

$$\hat{\tau}_\nu : \check{B}_{\delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu$$

est un isomorphisme. En particulier,

$$\hat{\tau}_\delta : \ell \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \ .$$

Considérons alors l'accouplement ℓ-bilinéaire composé

$$\langle , \rangle : B_{\delta-\nu} \otimes_\ell H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \xrightarrow{\text{mult}} H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \xrightarrow[\sim]{(\hat{\tau}_\delta)^{-1}} \ell \ .$$

Il lui correspond une application ℓ-linéaire

$$H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \to B^\vee_{\delta-\nu}$$

$$x \mapsto (b \mapsto \langle b, x \rangle)$$

et la B-linéarité de τ montre que cette application ℓ-linéaire coïncide avec $(\hat{\tau}_\nu)^{-1}$, et est donc un isomorphisme de ℓ-modules ("théorème de Macaulay").

Corollaire 1.5.2.— *Supposons la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ régulière dans C.*

(i) Si l'anneau ℓ est noethérien et factoriel, alors l'idéal $\mathcal{A} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$ de ℓ est principal.

(ii) Si l'anneau ℓ est noethérien et localement factoriel (par exemple régulier), alors l'idéal $\mathcal{A} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$ de ℓ est inversible.

Preuve : (i) $\Longrightarrow$ (ii) par localisation sur ℓ. Montrons (i). Par (1.5.1), on a : $\hat{\tau}_0 : \check{B}_\delta \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Comme B_δ est un ℓ-module de présentation finie, le ℓ-module $\check{B}_\delta$ est réflexif. Par suite l'idéal $\mathcal{A}$ de ℓ est divisoriel (Bourbaki, Alg. Comm. ch.7 Exemple 2 p.51), donc principal puisque ℓ est factoriel.

2. Inertie de degré 0 et résultant anisotrope.

2.1. Sous les hypothèses de (1.1), rappelons que nous avons défini (1.4) un morphisme de ℓ-modules

$$\hat{\tau}_0 : \check{B}_\delta \longrightarrow \mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$$

tel que

$$\begin{cases} \mathcal{A}^{n+1} \subset \text{ Im } (\hat{\tau}_0) \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^n \text{Ker } (\hat{\tau}_0) = 0 \ . \end{cases}$$

Les observations suivantes sont alors immédiates (cf. la preuve de (1.5.2) pour une partie d'entre elles).

a) Si $\mathcal{A}$ ne divise pas zéro dans ℓ (par exemple si ℓ est intègre et $\mathcal{A} \neq 0$), le morphisme $\hat{\tau}_0$ est injectif.

b) Si $\mathcal{A} \neq 0$ et l'anneau ℓ est factoriel (resp. localement factoriel et noethérien), l'idéal $\text{Im}(\hat{\tau}_0) \simeq B_\delta^\vee$ de ℓ est principal (resp. inversible), de même racine que $\mathcal{A}$. En particulier, lorsque de plus Proj (B) est réduit, l'idéal $\mathcal{A}$, qui s'identifie alors à la racine de $\text{Im}(\hat{\tau}_0)$, est lui-même principal (resp. inversible).

2.2 Plaçons-nous dans la situation générique sur un anneau commutatif k, le rôle de ℓ étant donc joué par

$${}_kA := k[U_{i\alpha} | i \in [n], \deg_a(X^\alpha) = d_i] \ .$$

Pour préciser l'anneau de base, posons ici

$${}_k\mathcal{A} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 \ .$$

L'exemple $n = 2, m_1 = 2, m_2 = 3, d_1 = d_2 = 5$, avec k arbitraire, montre qu'en général il n'est pas vrai que $\mathcal{A} \neq 0$. Avec des changements de notation évidents, on a en effet alors $A = k[U, V]$ (U, V des indéterminées), $f_1 = UX_1X_2, f_2 = VX_1X_2$ et, pour $a \in_k A, N \in \mathbf{N}$, la relation $aX_1^N \in (f_1, f_2)$ implique : $a = 0$.

Supposons k *factoriel noethérien.* Lorsque ${}_k\mathcal{A} \neq 0$ et Proj (B) est réduit, l'idéal ${}_k\mathcal{A}$ est principal (2.1 b)) et on appelle *résultant anisotrope* sur k (pour les suites $\underline{m}, \underline{d}$) l'un quelconque de ses générateurs (qui n'est donc défini qu'à multiplication par un élément inversible de k près), que l'on note alors

$${}^a\text{Res}_k(f_1, f_2, \cdots, f_n) \in {}_kA \ .$$

Lorsque Proj(B) n'est pas réduit, on peut aussi donner droit de cité, lorsque ${}_k\mathcal{A} \neq 0$, à un générateur de $\text{Im}(\hat{\tau}_0)$.

Cette définition est compatible avec celles de [J3], où nous avons défini une notion de résultant anisotrope dans essentiellement deux cas, que nous allons rappeler.

A. Le cas "standard"

C'est celui où $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ divise tous les entiers $d_i (i \in [n])$. Alors (loc. cit. 6.3.6), la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière dans ${}_kC$, et Proj $({}_kB)$ est intègre lorsque k l'est. Conformément à (1.5.2 (i)), l'idéal ${}_{\mathbf{Z}}\mathcal{A}$ est principal. Nous avons vu (loc. cit. 6.3.5(A)) qu'il admet un générateur unique, noté
${}^a\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ tel que

$$
{}^a\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}}(X_1^{d_1/m_1}, X_2^{d_2/m_2}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}) = 1
$$

par spécialisation. De plus, pour tout anneau commutatif k, l'image, notée
${}^a\mathrm{Res}_k(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, de ${}^a\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}}(f_1, \cdots, f_n)$ par le morphisme d'anneaux canonique $U_{i\alpha} \mapsto U_{i\alpha} : {}_{\mathbf{Z}}A \to {}_kA$ ne divise pas zéro dans ${}_kA$ et engendre ${}_k\mathcal{A}$.

B. Le cas "semi-standard"

Nous avons considéré dans ([J3] 6.3.10.1 et 6.3.10.2) les conditions suivantes.

(H_1) a) Pour tout $i \in [n]$, l'entier m_i divise tous les entiers d_j à l'exception éventuellement de l'un d'eux.

b) Pour tout $i \in [n]$, on a : $d_i \in \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n \subset \mathbf{N}$.

(H_2) Pour tout $i \in [n]$ et tout $j \in [n]$, on a

$$
d_j \in \sum_{\ell \neq i} \mathbf{N}m_\ell \subset \mathbf{N} .
$$

(H_3) Pour tout $i \in [n]$, il existe un entier $j \in [n]$ tel que m_j divise d_i.

En outre, nous avons vérifié les assertions suivantes.

(i) Lorsque (H_1) est vérifiée, la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière dans ${}_kC$.

(ii) Lorsque (H_1a)) et (H_2) sont vérifiées et k est intègre, le schéma Proj $({}_kB)$ *est intègre.*

(iii) Lorsque (H_1a)) et (H_3) sont vérifiées, on a

$$
{}_k\mathcal{A} \neq 0 .
$$

Enfin, nous avons montré directement ([J3] 6.3.10.5) que lorsque k est factoriel (non nécessairement nœthérien) et (H_1a)), (H_2) et (H_3) sont vérifiées et $n \geq 2$ (noter que

H_2 implique $H_1 b)$), l'idéal ${}_k\mathcal{A}$ est principal, et appelé résultant anisotrope sur k (pour $\underline{m}, \underline{d}$) l'un quelconque de ses générateurs.

En fait (1.5.1), il résulte de (i) que la condition (H_1) suffit à assurer que $\hat{\tau}_0 \; : \; {}_kB_\delta^\vee \to {}_k\mathcal{A}$ est un isomorphisme de ${}_kA$-modules. Par suite, d'après (iii), *la conjonction de* (H_1) *et* (H_3) *suffit, lorsque* k *est noethérien et factoriel, pour assurer que* ${}_k\mathcal{A}$ *est principal, et par suite définir un résultant anisotrope.* Lorsque (H_2) est vérifiée, il est irréductible ((ii)) et coïncide avec ceux définis en [J3] d'une part, et en début de paragraphe (Proj $({}_kB)$ est réduit) d'autre part.

2.3 Revenons à la situation de départ (1.1), dans le cas *standard* :

$$m = ppcm(m_1, \cdots, m_n) \quad \text{divise tous les} \quad d_j (j \in [n]).$$

Alors le morphisme de ℓ-algèbres

$$\varphi : \ell[X_1, \cdots, X_n] \to \ell[X_1, \cdots, X_n]$$

$$X_i \mapsto X_i^{m_i}$$

munit le but d'une structure de module libre de dimension $m_1 m_2 \cdots m_n$ sur la source, donc en particulier est *plat.*

Posant pour simplifier, pour tout $g \in \ell[X_1, \cdots, X_n]$,

$$g^\# := \varphi(g) \in \ell[X_1, \cdots, X_n] \ ,$$

nous avons vu ([J3] 6.3.5 (B)) que

$$\text{(2.3.1)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Res}\,(f_1^\#, \cdots, f_n^\#) = {}^a\mathrm{Res}\,(f_1, \cdots, f_n)^\chi \quad \text{dans} \quad \ell \ , \\ \text{avec } \chi := \dfrac{m_1 m_2 \cdots m_n}{pgcd(m_1, \cdots, m_n)} \ . \end{cases}$$

Proposition 2.3.2.— *(Cas standard). Lorsque* $f_1, f_2, \cdots, f_n$ *est une suite régulière de* $C = \ell[X_1, \cdots, X_n]$*, le résultant anisotrope* ${}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *et l'idéal* $\mathcal{A} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$ *ne divisent pas zéro dans* ℓ*.*

Preuve : Comme $\mathcal{A}$ et $({}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n))$ ont même racine, il suffit de vérifier l'assertion pour ${}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Comme φ est plat, la suite $(f_1^\#, f_2^\#, \cdots, f_n^\#)$ de polynômes homogènes au sens usuel ($\deg(X_i) = 1$) est régulière. D'après ([J6] 3.12.4.2), il en résulte que $\mathrm{Res}\,(f_1^\#, f_2^\#, \cdots, f_n^\#)$ ne divise pas zéro dans ℓ, d'où le résultat par comparaison avec (2.3.1).

Exemple 2.3.3 Soit $k \neq 0$ un anneau commutatif, $V_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ des indéterminées et $\ell = k[V_{ij} | 1 \leq i, j \leq n]$. Supposons que, pour tout $i \in [n]$, le polynôme f_i soit de la forme

$$\begin{cases} f_i = V_{i1}X_1^{d_i/m_1} + V_{i2}X_2^{d_i/m_2} + \cdots + V_{in}X_n^{d_i/m_n} + g_i \\ \quad \text{avec} \quad g_i \in k[X_1, \cdots, X_n] \; . \end{cases}$$

Alors $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *est une suite régulière de* $C = \ell[X_1, \cdots, X_n]$. Pour le voir, il suffit (1.5.1) de montrer que c'est localement vrai en dehors de $V(\mathfrak{M})$. Or, posant pour tout $i \geq 1$

$$R_{i-1} := k[V_{sj} | s < i][X_1, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_{i-1}) \; ,$$

le R_{i-1}-contenu de f_i dans $R_{i-1}[V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{in}]$ est l'idéal $(X_1^{d_i/m_1}, X_2^{d_i/m_2}, \cdots, X_n^{d_i/m_n}, g_i)$ de R_{i-1} qui contient une puissance de $(X_1, X_2, \cdots, X_n)R_{i-1}$. Par suite (lemme de Dedekind-Mertens), le noyau de la multiplication par f_i dans $R_{i-1}\,[V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{in}]$ a son support dans $V(\mathfrak{M})$. Par platitude du morphisme d'anneaux canonique $R_{i-1}[V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{in}] \to \ell[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_{i-1})$, il en résulte que la multiplication par f_i

$$\times f_i : \ell[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_{i-1}) \to \ell[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, \cdots, f_{i-1})$$

est injective en dehors de $V(\mathfrak{M})$, d'où l'assertion.

En outre, pour tout $j \in [n]$, la *k-algèbre B_{X_j} est k-isomorphe à* $k[V_{is} | s \neq j]\; [X_1, \cdots, X_n][X_j^{-1}]$, donc

$$H^0_{\mathfrak{M}}(B) = H^0_{X_j}(B) \quad \forall j \in [n] \; .$$

En particulier, lorsque k est intègre, l'idéal $H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ de B est premier, ainsi donc que l'idéal $\mathcal{A} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$ de ℓ. Enfin, on a que $\mathcal{A}$ ne divise pas zéro dans ℓ, et par suite $\mathcal{A} \neq 0$, d'après (2.3.2).

Supposons maintenant k *factoriel. Alors l'idéal* $\mathcal{A}$ est *principal* : étant premier, c'est la racine de l'idéal principal $({}^a Res(f_1, \cdots, f_n))$. Tout générateur P de $\mathcal{A}$ est premier dans ℓ, et il existe un élément inversible u de k et un entier $t \geq 1$ tels que

$$(2.3.4) \qquad {}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n) = uP^t \quad \text{dans} \quad \ell = k[V_{ij}/1 \leq i, j \leq n] \; .$$

Même lorsque $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$, l'entier t n'est pas en général égal à 1. Voici deux exemples (où k peut être d'ailleurs quelconque).

a) $$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = d \geq 1 \quad \text{et} \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} X_j^d \; .$$

Alors (formule de changement de base [J3] 5.12)

$$\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n) = [\text{dét}\ (V_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}]^{d^{n-1}} \; .$$

b) $$n=2, d_1, d_r \geq 1, f_1 = uX_1^{d_1} - vX_2^{d_1}, f_2 = wX_1^{d_2} - hX_2^{d_2},$$

avec u, v, w, h des indéterminées et $\ell = k[u,v,w,h]$. Dans ce cas, on vérifie par récurrence sur (d_1, d_2) que

$$\begin{aligned}&\mathrm{Res}\,(uX_1^{d_1} - vX_2^{d_1}, wX_1^{d_2} - hX_2^{d_2})\\ &= (-1)^{d_1}[u^{d_2/d}h^{d_1/d} - v^{d_2/d}w^{d_1/d}]^d\ ,\end{aligned}$$

avec $d := pgcd(d_1, d_2)$, dans ℓ.

2.4. On suppose de nouveau que $m = ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ divise $d = pgcd(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, et on se place dans la situation générique sur un anneau commutatif k :

$$A = k[U_{i\alpha} | i \in [n], \deg_a(X^\alpha) = d_i]$$

$$f_i = \sum_{\deg_a(X^\alpha)=d_i} U_{i\alpha}X^\alpha \in C = A[X_1, X_2, \cdots, X_n]\ .$$

Supposons en outre donnée une autre suite indexée par $[n]$, soit $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ d'entiers ≥ 1, et posons

$$\begin{aligned}R &:= {}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)\\ B &:= A[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_n)\\ D &:= A[X_1, \cdots, X_n]/(f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \cdots, f_n^{r_n})\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} S := \ \mathrm{spec}\,(A) & P := {}^aP_S^{n-1}\\ X := \ \mathrm{Proj}\,(B) & Y := \ \mathrm{Proj}\,(D)\end{array}$$

La C-suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ étant régulière (2.3.3), il en est de même pour $(f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \cdots, f_n^{r_n})$ [par ex : Bourbaki, Alg ch.10, prop 6 c) §9 n°7, p.158], et le C-module $\mathbf{Z}$-gradué D admet une filtration de longueur $r_1r_2\cdots r_n$ dont les quotients sont de la forme $B(-\Sigma_i s_i d_i)$, donc $B(\nu)$ avec $m|\nu$.

Pour tout schéma T, notons $\Gamma(T)$ l'anneau des sections globales de T. *Lorsque k est intègre*, on sait ([J3] 6.3.5 (A) (iii)) que R est premier dans A ; posons alors

$$\mathcal{P} = (R) = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0\ .$$

On sait ([J3] 6.4.14) que le morphisme canonique $X \to \mathrm{spec}(A/\mathcal{P})$ est birationnel ; par suite, le schéma $A_\mathcal{P} \otimes_A X$, intègre et réduit à un point, est affine et isomorphe à spec $(A_\mathcal{P}/\mathcal{P}A_\mathcal{P})$. Comme $Y_{red} = X$, on en déduit que $A_\mathcal{P} \otimes_A Y$ est local. Comme le C-module $\mathbf{Z}$-gradué D admet une filtration de longueur $r_1r_2\cdots r_n$ dont les quotients consécutifs sont de la forme $B(\nu)$ avec m/ν, $\Gamma(A_\mathcal{P}\otimes_A Y)$ admet une filtration de longueur $r_1r_2\cdots r_n$ par des idéaux dont les quotients consécutifs sont isomorphes à $\Gamma(A_\mathcal{P} \otimes_A X, \mathcal{O}_{A_\mathcal{P}\otimes_A X}(\nu)) \simeq A_\mathcal{P}/\mathcal{P}A_\mathcal{P}$ [comme $m|\nu, \mathcal{O}_X(\nu)$ est inversible], d'où

$$\mathrm{long}\ (\Gamma(A_\mathcal{P} \otimes_A Y)) = r_1r_2\cdots r_n\ .$$

Posons $\mathfrak{d} := H^0_{\mathfrak{M}}(D)_0$. Il est intéressant d'étudier le morphisme canonique $A/\mathfrak{d} \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ de conoyau $\simeq H^1_{\mathfrak{M}}(D)_0$, et de voir à quelle condition, lorsque k est intègre, le localisé

$$(2.4.1) \qquad (A/\mathfrak{d})_{\mathcal{P}} \to \Gamma(A_{\mathcal{P}} \otimes_A Y) \simeq A_{\mathcal{P}} \otimes_A \Gamma(Y)$$

est un isomorphisme. Sans hypothèse sur k, comme $(f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \cdots, f_n^{r_n})$ est régulière dans C, une simple paraphrase de la preuve de ([$J4$]2.7.11 b)) montre que

$$(2.4.2) \qquad H^1_{\mathfrak{M}}(D)_0 \simeq \operatorname{Ext}^1_A(D_\Delta, A)$$

avec $\Delta := (\sum_{i=1}^n r_i d_i) - (\sum_{i=1}^n m_i)$. Lorsque k est noethérien et intègre, on a

$$\operatorname{Ext}^1_A(D_\Delta, A)_{\mathcal{P}} \simeq \operatorname{Ext}^1_{A_{\mathcal{P}}}((D_\Delta)_{\mathcal{P}}, A_{\mathcal{P}}) \ .$$

Or $A_{\mathcal{P}}$ est de valuation discrète, et le $A_{\mathcal{P}}$-module $(D_\Delta)_{\mathcal{P}}$ est de type fini, de dual isomorphe à $A_{\mathcal{P}}$ [$(\hat{\tau}_0)_{\mathcal{P}}$ identifie $\operatorname{Hom}_{A_{\mathcal{P}}}((D_\Delta)_{\mathcal{P}}, A_{\mathcal{P}})$ à un idéal non nul de $A_{\mathcal{P}}$]. Par suite le morphisme d'anneaux (2.4.1) est un isomorphisme autrement dit $\operatorname{Ext}^1_{A_{\mathcal{P}}}((D_\Delta)_{\mathcal{P}}, A_{\mathcal{P}}) = 0$ si et seulement si $D_{\mathcal{P}} \simeq A_{\mathcal{P}}$.

Supposons maintenant k factoriel et noethérien. Alors on sait (1.5.2) que l'idéal $\mathfrak{d} \subset A$ est principal et a même racine que l'idéal engendré par

$$(2.4.3) \qquad {}^a\mathrm{Res}\,(f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \cdots, f_n^{r_n}) = R^{r_1 r_2 \cdots r_n}$$

qu'il contient (multiplicativité : [J3] 6.3.9.1), donc que celui engendré par R. Par suite, il existe un entier $t \geq 1$ tel que $\mathfrak{d} = \mathcal{P}^t = (R^t)$, et on a

$$t \leq r_1 r_2 \cdots r_n$$

en conformité avec l'injectivité de (2.4.1) et le calcul de la longueur de $\Gamma(A_{\mathcal{P}} \otimes_A Y)$. La bijectivité de (2.4.1) équivaut dans ces conditions à l'égalité $t = r_1 r_2 \cdots r_n$.

Mais, en fait, on a toujours :

$$t \leq r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n + 1 := \rho$$

car une inclusion de la forme $\mathfrak{M}^N R \subset (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ implique

$$\mathfrak{M}^{N\rho} R^\rho \subset (f_1, f_2, \ldots, f_n)^\rho \subset (f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \ldots, f_n^{r_n}),$$

puisque tout monôme $T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \cdots T_n^{\alpha_n}$ de degré ρ est divisible par un des monômes $T_i^{r_i}$ ($i \in [n]$). On en déduit que l'égalité $t = r_1 r_2 \cdots r_n$ n'est possible que si tous les entiers r_i, à l'exception éventuellement d'un seul, sont égaux à un.

Ces considérations donnent un certain intérêt à la proposition suivante, où k est de nouveau un anneau arbitraire.

Proposition 2.4.4.— *Pour tout entier $r \geq 1$, l'idéal*

$$\mathfrak{d}_r := H^0_{\mathfrak{M}}(A[X_1, \ldots, X_n]/(f_1^r, f_2, \ldots, f_n))_0 \subset A$$

est principal (= A-libre) de générateur ${}^a\mathrm{Res}(f_1, f_2, \ldots, f_n)^r$.

Preuve : (Lorsqu'il y aura lieu de préciser l'anneau k de base, nous le mettrons en indice à gauche.) On se ramène tout d'abord à prouver l'assertion lorsque $k = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier). Supposons en effet qu'elle soit vraie dans ce cas-là : la suite de A-modules

$$(2.4.5) \qquad 0 \to {}_{\mathbf{Z}}A \xrightarrow{R^r} {}_{\mathbf{Z}}A \xrightarrow{\text{can}} \prod_{i=1}^{n} {}_{\mathbf{Z}}D_{X_i}$$

(où $D := A[X_1, \dots, X_n]/(f_1^r, f_2, \dots, f_n)$) est exacte et le demeure après tensorisation sur $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour tout nombre premier p. Or ${}_{\mathbf{Z}}A$ est un $\mathbf{Z}$-module libre, et il en est de même pour les ${}_{\mathbf{Z}}D_{X_i}$, qui admettent une filtration finie dont les quotients consécutifs sont isomorphes à

$${}_{\mathbf{Z}}B_{X_i} \simeq \mathbf{Z}[\text{coeff. autres que ceux des } X_i^{d_j/m_i} \ (j \in [n])][X_1, \dots, X_n][X_i^{-1}].$$

Par suite, posant $Q := \operatorname{Coker}(\text{can})$ dans (2.4.5), on a : $\operatorname{Tor}_i^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, Q) = 0$ ($i \geq 1$, p premier). Le groupe abélien Q est donc sans $\mathbf{Z}$-torsion, donc plat. Pour k arbitraire, la suite exacte (2.4.5) le demeure donc après tensorisation par k sur $\mathbf{Z}$, ce qu'il fallait prouver.

Se rappelant qu'il s'agit de voir que $R^{r-1} \notin \mathfrak{d}_r$, on ramène le cas où $k = \mathbf{Z}$ à celui où $k = \mathbf{Q}$. On peut donc supposer que k est un corps. Mais alors l'assertion est conséquence d'une variante d'un résultat de NESTERENKO [Math. USSR Izvestija vol. 11 (1977) n°2, Prop. 3' p. 249], en y remplaçant les formes linéaires génériques par le même nombre de polynômes génériques, ce qui est possible du fait qu'on est dans le cas standard. De façon précise, posons

$$K := k(U_{1\alpha} | \deg_a(X^\alpha) = d_1) \qquad (k \text{ corps}).$$

L'idéal (f_1) de $K[X_1, \dots, X_n]$ est premier, et l'idéal (f_1^r) est (f_1)-primaire d'indice r. Posant $\mathfrak{A} := (R)$ il en résulte que, dans

$$k(U_{1\alpha} | \deg_a(X^\alpha) = d_1)[U_{i\alpha} | i \geq 2, \ \deg_a(X^\alpha) = \alpha_i],$$

l'idéal $\mathfrak{d} \otimes_{k[U_{1\alpha}]} K$ est $(\mathfrak{A} \otimes_{k[U_{1\alpha}]} K)$-primaire d'indice r, d'où l'assertion à démontrer.

Corollaire 2.4.6.— *(Cas générique standard sur un anneau commutatif k) Pour tout (i, α) avec $\deg_a(X^\alpha) = d_i$, l'élément $\partial R/\partial U_{i\alpha}$ ne divise pas zéro dans l'anneau $A/(R)$ (et donc aussi dans A puisqu'alors $(R, \partial R/\partial U_{i\alpha})$ est une suite régulière homogène).*

Preuve : Montrons par exemple que $\partial R/\partial U_{i\alpha}$ ne divise pas 0 dans A/R, l'énoncé analogue pour A pouvant se prouver directement de même. Supposons d'abord que ce soit prouvé lorsque $k = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier). Alors la suite exacte canonique

$$(2.4.7) \qquad 0 \to_{\mathbf{Z}} (A/R) \xrightarrow{\partial R/\partial U_{i\alpha}} {}_{\mathbf{Z}}(A/R) \to Q \to 0$$

demeure exacte après tensorisation sur $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour tout p premier ; comme $_{\mathbf{Z}}(A/R)$ est sans $\mathbf{Z}$-torsion, on en déduit que Q est sans $\mathbf{Z}$ torsion, donc plat sur $\mathbf{Z}$, et l'assertion dans le cas général s'en déduit par tensorisation par k sur $\mathbf{Z}$ de la suite exacte (2.4.7). On peut donc supposer k intègre. Alors R est premier et, pour tout multi-indice β,

$$H^0_{X^\beta}(B) = H^0_{\mathfrak{M}}(B) \ , \tag{2.4.8}$$

puisque, pour tout (j,ℓ), l'élément X_j ne divise pas zéro dans B_{X_ℓ} ([J3] (6.3.6.4)). Supposons, par exemple, que $i=1$, et montrons que $\frac{\partial R}{\partial U_{1\alpha}} \not\equiv 0 \bmod R$. Sinon, pour des raisons de degré d'homogéneité, on a : $\frac{\partial R}{\partial U_{1\alpha}} = 0$ dans A. Comme R est une forme d'inertie, il existe un entier N et des polynômes $g_1, g_2, \cdots, g_n$ de C tels que

$$X_n^N R = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n \quad \text{dans} \quad C \ . \tag{2.4.9}$$

Par dérivation de cette égalité par rapport à $U_{1\alpha}$, on obtient

$$0 = X^\alpha g_1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial U_{1\alpha}} . f_j \ .$$

D'où, par comparaison avec (2.4.9),

$$X^\alpha X_n^N R = -f_1 (\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial U_{1\alpha}} f_j) + X^\alpha \sum_{j \geq 2} g_j f_j \in (f_1^2, f_2, \cdots, f_n). \tag{2.4.10}$$

Mais la filtration de $D := A[X_1, X_2, \cdots, X_n]/(f_1^2, f_2, \cdots, f_n)$ ci-après

$$0 \to B(-d_1) \xrightarrow{f_1} D \to B \to 0$$

montre que, pour tout couple (j,ℓ) d'entiers $\in [n]$, l'élément X_j ne divise pas 0 dans D_{X_ℓ}, donc que $H^0_{X^\alpha X_n^N}(D) = H^0_{\mathfrak{M}}(D)$. De (2.4.10), on déduit alors que R appartient à

$$H^0_{\mathfrak{M}}(A[X_1, \cdots, X_n]/(f_1^2, f_2, \cdots, f_n))_0, \quad \text{donc que} \quad R^2 | R \quad \text{par} \quad (2.4.4) \ .$$

D'où une contradiction.

Corollaire 2.4.11.— *(Cas générique standard sur un anneau commutatif k) Soit $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ une suite d'entiers ≥ 1. On pose*

$$B = A[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_n); D = A[X_1, \cdots, X_n]/(f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \cdots, f_n^{r_n})$$

$$\mathcal{A} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 = ({}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)) \subset A$$

$$\Delta = \sum_{i \geq 1} r_i d_i - \sum_{i \geq 1} m_i \ .$$

Avec ces notations :

(i) Pour tout idéal J de A tel que $H^0_J(A) = 0$, on a

$$\mathcal{A}^{r_1+r_2+\cdots+r_n-n+1} H^0_J(D) = 0 \ ,$$

et en particulier $H^0_J(D) \subset H^0_{\mathcal{A}}(D)$.

(ii) On a $\bigoplus_{\nu>\Delta} D_\nu \subset H^0_{\mathcal{A}}(D)$. De plus, lorsque tous les entiers r_i à l'exception éventuelle de l'un d'eux sont égaux à 1, on a l'égalité

$$\bigoplus_{\nu>\Delta} D_\nu = H^0_{\mathcal{A}}(D) \ .$$

Preuve : Montrons (i). Comme la suite $(f_1^{r_1}, f_2^{r_2}, \cdots, f_n^{r_n})$ est régulière dans C, la transgression

$$\hat{\tau} : \bigoplus_{\nu} D^\vee_{\Delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(D)$$

est un isomorphisme de D-modules, d'où $H^0_J(H^0_{\mathfrak{M}}(D)) = 0$. Par suite, on a $H^0_J(D) \cap H^0_{\mathfrak{M}}(D) = 0$, et $H^0_J(D)$ s'identifie par la projection $D \to D/H^0_{\mathfrak{M}}(D)$ à un sous D-module de $D/H_{\mathfrak{M}}(D)$, annulé par $A/(H^0_{\mathfrak{M}}D)_0$. L'assertion résulte alors de ce que $\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)^{r_1+r_2+\cdots+r_n-n+1}$ appartient à $H^0_{\mathfrak{M}}(D)_0$ (2.4.3). Pour $\nu > \Delta$, il résulte de (1.5.1) que $H^0_{\mathfrak{M}}(D)_\nu = H^1_{\mathfrak{M}}(D)_\nu = 0$, donc que $D_\nu \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\nu))$, en posant $Y := \mathrm{Proj}\,(D)$; comme les $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\nu))$ sont des $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$-modules, ils sont annulés par $H^0_{\mathfrak{M}}(D)_0 = \mathrm{Ker}\,(can : A \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y))$, d'où la première partie de (ii). Pour la deuxième, il s'agit de montrer que, lorsque, par exemple, $(r_1, r_2, \cdots, r_n) = (r, 1, 1, \cdots, 1)$, on a

$$H^0_{\mathcal{A}}(D_\nu) = 0 \quad \text{lorsque} \quad 0 \le \nu \le \Delta \ .$$

Montrons d'abord qu'il suffit de prouver que $H^0_{\mathcal{A}}(D_\Delta) = 0$. Supposons qu'il en soit ainsi, et soit $x \in D_\nu (0 \le \nu \le \Delta)$ tel que $\mathcal{A}x = 0$. On en déduit $\mathfrak{M}^{\Delta-\nu}\mathcal{A}x = 0$ dans D_Δ, d'où par hypothèse $\mathfrak{M}^{\Delta-\nu}x = 0$, et par suite

$$x \in H^0_{\mathcal{A}}(D) \cap H^0_{\mathfrak{M}}(D) = 0$$

d'après le début de la preuve de (i) : $\mathcal{A}$ ne divise pas zéro dans A. Posant $R := \mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, il nous reste à montrer que la multiplication par R :

$$\times R : D_\Delta \to D_\Delta$$

est injective. Comme d'habitude, il suffit de le prouver lorsque $k = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$; comme, d'après le lemme (2.4.17) ci-après, ${}_{\mathbf{Z}}D_\Delta$ est sans torsion, cela impliquera en effet que $\mathrm{Coker}\,(\times R :_{\mathbf{Z}} D_\Delta \to_{\mathbf{Z}} D_\Delta)$ est $\mathbf{Z}$-plat, d'où l'assertion dans le cas général en tensorisant par k sur $\mathbf{Z}$. Lorsque $k = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier), nous avons vu (préliminaires à 2.4.4) que

$$(D_\Delta)_{\mathcal{A}} \simeq A_{\mathcal{A}} \ .$$

Si $x \in D_\Delta$ est tel que $Rx = 0$, on a $\frac{x}{1} = 0$ dans $(D_\Delta)_{\mathcal{A}}$ et il existe donc un élément a de $A \setminus \mathcal{A}$ tel que $ax = 0$. Pour tout $i \in [n]$, l'élément a ne divise pas zéro dans l'anneau intègre $B_{X_i} \supset A/\mathcal{A}$; par suite, l'élément a ne divise pas zéro dans D_{X_i}, qui admet une filtration finie par des D_{X_i}-modules dont les quotients consécutifs sont isomorphes à B_{X_i}. Utilisant la suite exacte canonique

$$0 \to H^0_{\mathfrak{M}}(D) \to D \xrightarrow{\theta} \Pi_{i=1}^n D_{X_i},$$

on en conclut que $\theta(x) = 0$, donc que $x \in H^0_{\mathcal{A}}(D) \cap H^0_{\mathfrak{M}}(D) = 0$ (début preuve de (i)).

Lemme 2.4.12.— *(k et $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ arbitraires) Tout idéal $\mathcal{J}$ de k qui ne divise pas zéro dans k ne divise pas zéro dans D.*

Preuve On considère de nouveau la suite exacte canonique

$$0 \to H^0_{\mathfrak{M}}(D) \to D \xrightarrow{\theta} \Pi_{i=1}^n D_{X_i} \ .$$

Par l'isomorphisme de transgression $\hat{\tau}$, on voit que $\mathcal{J}$ ne divise pas zéro dans $H^0_{\mathfrak{M}}(D)$; par ailleurs, la filtration des D_{X_i} par des D-modules isomorphes à B_{X_i}, donc k-libres ([J3] 6.3.6.2), montre que $\mathcal{J}$ ne divise pas non plus 0 dans $\Pi_{i=1}^n D_{X_i}$. Le lemme s'en déduit aussitôt.

Corollaire 2.4.13.— *Plaçons-nous sous les hypothèses de (2.4.4), avec les notations*

$$D = A[X_1, \cdots, X_n]/(f_1^r, f_2, \cdots, f_n), Y = \mathrm{Proj}(D)$$

$$\mathfrak{P} = ({}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)) \ , \mathfrak{d} = H^0_{\mathfrak{M}}(D)_0$$

$$\Delta = rd_1 + d_2 + \cdots + d_n - (m_1 + m_2 + \cdots + m_n),$$

et supposons de plus k intègre. Alors :

(i) Le morphisme d'anneaux canonique $A/\mathfrak{d} \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ induit par localisation un isomorphisme

$$(A/\mathfrak{d})_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\sim} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)_{\mathfrak{P}} \ .$$

(ii) Le $A_{\mathfrak{P}}$-module $(D_\Delta)_{\mathfrak{P}}$ est isomorphe à $A_{\mathfrak{P}}$.

Preuve L'acyclicité du complexe $\mathrm{Kosz}(f_1^r, f_2, \cdots, f_n)$ montre que D_Δ est de ∞-présentation finie, d'où

$$\mathrm{Ext}^1_A(D_\Delta, A)_{\mathfrak{P}} \simeq \ \mathrm{Ext}^1_{A_{\mathfrak{P}}}((D_\Delta)_{\mathfrak{P}}, A_{\mathfrak{P}}),$$

et nous avons déjà mentionné que, sans hypothèse sur k, (2.4.2)

$$\mathrm{Coker}\ (A/\mathfrak{d} \to \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = H^1_{\mathfrak{M}}(D)_0 \simeq \ \mathrm{Ext}^1_A(D_\Delta, A)\ .$$

Par suite (ii) $\Rightarrow$ (i). Par ailleurs, $\mathfrak{P}$ étant principal, l'anneau $A_{\mathfrak{P}}$ est de valuation discrète ; comme D_Δ est sans R-torsion ($R :=^a \mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)$), on déduit que $(D_\Delta)_{\mathfrak{P}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{P}}$, nécessairement de rang 1 puisque $(\hat{\tau}_0)_{\mathfrak{P}} : (\check{D}_\Delta)_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\sim} \partial A_{\mathfrak{P}} \simeq A_{\mathfrak{P}}$ (d'après (2.4.4). [On remarquera que nous n'avions pour l'instant prouvé (2.4.13) que pour k factoriel noethérien.]

2.5. Soient n un entier ≥ 1, et $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ une suite indexée par $[n]$ d'entiers ≥ 1. On pose $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$

Soit ℓ un anneau commutatif, et $\mathfrak{M} = (X_1, \cdots, X_n) \subset \ell[X_1, \cdots, X_n]$. Etant donné un entier d *multiple de* m, introduisons des indeterminées $U_\alpha(\deg_a(X^\alpha) = d)$. Posons $\ell[\underline{U}] := \ell[U_\alpha|\deg_\alpha(X^\alpha) = d]$, et, pour tout $\ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$-module M,

$$M[\underline{U}] := M[U_\alpha|\deg_\alpha(X^\alpha) = d]\ (\simeq \ell[\underline{U}] \otimes_\ell M).$$

Enfin, notons

$$\varphi := \sum_{\deg_a(X^\alpha)=d} U_\alpha X^\alpha \in \ell[\underline{U}][X_1, X_2, \cdots, X_n],$$

$$\varepsilon_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)\ (1 \text{ à la } i^{\text{ème}} \text{ place}).$$

La présence, pour tout $i \in [n]$, de X_i^{d/m_i} comme coefficient de $U_{\frac{d}{m_i}\varepsilon_i}$ dans $\varphi \in \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n][\underline{U}]$, montre, d'après le lemme de Dedekind-Mertens, que le noyau de la multiplication $\varphi_{M[\underline{U}]}$ par φ dans $M[\underline{U}]$ est à support dans $V(X_1^{d/m_1}, \cdots, X_n^{d/m_n}) = V(\mathfrak{M})$, autrement dit $\varphi_{M[\underline{U}]}$ *est injective en dehors de* $V(\mathfrak{M})$.

Supposons maintenant donnés un ensemble fini I non vide et une partition indexée par $[r]$ (r entier ≥ 1) de I par des ensembles finis non vides

$$I = \coprod_{1 \leq j \leq r} I_j\ .$$

Soit $(d_i)_{i \in I}$ une famille d'entiers ≥ 1 et divisibles par m.

Introduisons une famille d'indéterminées

$$U_{i\alpha}(i \in I, \deg_a(X^\alpha) = d_i).$$

Cela étant, étant donné en outre un anneau commutatif k, posons

$$A := k[U_{i\alpha} | i \in I, \deg_a(X^\alpha) = d_i]$$

$$f_i := \sum_{\deg_a(X^\alpha)=d_i} U_{i\alpha} X^\alpha \in A[X_1, X_2, \cdots, X_n],$$

et, pour toute partie J de I,

$$A_J := k[U_{i\alpha} | i \in J, \deg_a(X^\alpha) = d_i].$$

Si J et J' sont deux parties de I, avec $J \subset J'$, alors $A_{J'}$ est un A_J-module libre, donc plat. A partir de là, et utilisant les considérations du début du paragraphe, on voit que, pour toute famille $(t_i)_{i \in I}$ d'entiers ≥ 0, posant

$$g_j = \prod_{i \in I_j} f_i^{t_i} \qquad (j \in [r]),$$

la suite $(g_1, g_2, \cdots, g_r)$ d'éléments de $A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ est régulière (et même commutativement régulière) en dehors de $V(\mathfrak{M})$. *Dans le cas où* $r \leq n$, *et où* $\sum_{i \in I_j} t_i > 0$ *pour tout* $j \in [r]$, on conclut alors de (1.5.1) [quitte à agrandir I si $r < n$]. que *la suite* $(g_1, g_2, \cdots, g_r)$ *d'éléments de* $A[X_1, \cdots, X_n]$ *est régulière.*

Introduisons encore les notations suivantes :

$$V_i := U_{i, \frac{d_i}{m_n}\varepsilon_n} \quad (i \in I)$$

$$B^{\langle j \rangle} = A_{\amalg_{s \leq j} I_j}[X_1, \cdots, X_n]/(g_1, g_2, \cdots, g_j) \qquad (j \in [r])$$

$$B^{\langle 0 \rangle} = k[X_1, X_2, \cdots, X_n]$$

$$R_j := [B^{\langle j-1 \rangle}]_{X_n}[U_{i\alpha} | i \in I_j, \alpha \neq \frac{d_i}{m_n}\varepsilon_n] \qquad (j \in [r]).$$

Pour tout $j \in [r]$, le coefficient de $X_n^{(\sum_{i \in I_j} t_i d_i)/m_n}$ dans g_j est $\prod_{i \in I_j} V_i^{t_i}$, d'où l'existence d'un élément c_j de R_j et d'un isomorphisme de k-algèbres

$$B_{X_n}^{\langle j \rangle} \simeq R_j[V_i | i \in I_j]/((\prod_{i \in I_j} V_i^{t_i}) - c_j).$$

Posant $B = B^{\langle r \rangle} := A[X_1, \cdots, X_n]/(g_1, g_2, \cdots, g_r)$, on en déduit par récurrence, à partir du lemme (2.5.1) ci-après, que le k-module B_{X_n}, et partant tous les k-modules $B_{X_i} (i \in [n])$, sont k-libres.

Lemme 2.5.1.— *Soient R un anneau commutatif, m un entier ≥ 1, $U_1, U_2, \cdots, U_m$ des indéterminées, $t_1, t_2, \cdots, t_m$ des entiers non tous nuls, c un élément de R. Alors la R-algèbre*

$$S := R[U_1, U_2, \cdots, U_m]/(U_1^{t_1} U_2^{t_2} \cdots U_m^{t_m} - c)$$

est un R-module libre de base les monomes $U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \cdots U_m^{\alpha_m}$ avec $\alpha_i < t_i$ pour un $i \in [m]$ au moins.

Preuve : Posons $U^t := U_1^{t_1} U_2^{t_2} \cdots U_m^{t_m}$. Etant donné un monôme U^α, il existe un plus grand entier $s \geq 0$ tel que $(U^t)^s$ divise U^α :

$$U^\alpha = (U^t)^s U^\beta \quad \text{avec} \quad \beta_i < t_i \quad \text{pour au moins un} \quad i\ .$$

Alors $U^\alpha \equiv c^s U^\beta \ mod(U^t - c)$, ce qui montre que les monômes de l'énoncé (que nous appelerons "réduits") engendrent le R-module S. Par ailleurs, une égalité

$$\sum_{U^\alpha \ \text{réduit}} r_\alpha U^\alpha = (U^t - c)Q \quad \text{dans} \quad R[U_1, U_2, \cdots, U_m]$$

($r_\alpha \in R \ \ \forall \alpha$) implique aussitôt $r_\alpha = 0 \ \ \forall \alpha$ par comparaison, par exemple, dans le cas contraire, des plus grands monômes pour l'ordre lexicographique du support des deux membres.

Nous allons expliciter un cas particulier de ces considérations générales.

Proposition 2.5.2.— *Soient k un anneau commutatif, I un ensemble fini, et pour tout $i \in I$ un entier $d_i \geq 1$ divisible par $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$. On suppose donnée une partition indexée par $[n]$ de I par des parties non vides :*

$$I = \coprod_{j \in [n]} I_j\ .$$

Les notations A, f_i ayant la signification explicitée précédemment, on pose

$$g_j := \prod_{i \in I_j} f_i \quad (j \in [n]).$$

Alors :

(i) La suite $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ d'éléments de $C := A[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ est régulière.

(ii) Posons $B := C/(g_1, g_2, \cdots, g_n)$. Pour tout $i \in [n]$, le k-module B_{X_i} est libre. De plus, lorsque l'anneau k est réduit, les k-algèbres $B_{X_i} (i \in [n])$ et $B/H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ sont réduites.

(iii) L'idéal $\mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$ de A est engendré par

$${}^a\mathrm{Res}\,(g_1, g_2, \cdots, g_n) = \prod_h {}^a\mathrm{Res}\,(f_{h(1)}, f_{h(2)}, \cdots, f_{h(n)}),$$

où h parcourt l'ensemble des applications $[n] \to I$ telles que $h(j) \in I_j$ pour tout $j \in [n]$.

Preuve : Nous venons de prouver, dans un contexte plus général, l'assertion (i) et la première partie de (ii). Pour la deuxième partie de (ii), on procède de même par récurrence, à partir du lemme (2.5.3) ci-après pour montrer que les B_{X_i} sont réduits ; comme $B/H^0_{\mathfrak{M}}B \subset \prod_{i=1}^n B_{X_i}$, il en résulte aussi que $B/H^0_{\mathfrak{M}}B$ est réduit.

Lemme 2.5.3.— *Soient R un anneau commutatif réduit, m un entier ≥ 1, $U_1, U_2, \cdots, U_m$ des indéterminées, et c un élément de R.*

Alors la R-algèbre

$$S := R[U_1, U_2, \cdots, U_m]/(U_1U_2\cdots U_m - c)$$

est réduite.

Montrons le. Lorsque R est un corps, on a, ou bien $c = 0$, auquel cas l'assertion est immédiate, ou bien c inversible dans R, auquel cas

$$S \simeq R[U_1, U_2, \cdots, U_m, U_1^{-1}, U_2^{-1}, \cdots, U_m^{-1}]$$

est intègre. Dans le cas général, le fait que R soit réduit se traduit par l'injectivité du morphisme d'anneaux canonique

$$R \to \prod_{\mathcal{P} \in spec(R)} (R_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}R_{\mathcal{P}})\ .$$

Comme S est R-libre (2.5.1) on en déduit (en regardant les composantes d'un élément sur une base) que le morphisme d'anneaux que l'on en déduit

$$S \to \prod_{\mathcal{P} \in Spec(R)} (R_{\mathcal{P}}/\mathcal{P}R_{\mathcal{P}}[U_1, \cdots, U_m])/(U_1U_2\cdots U_m - \bar{c})$$

est aussi injectif, d'où aussitôt l'assertion à partir de l'assertion déjà prouvée pour les corps.

Montrons enfin (iii). La formule de l'énoncé résulte de la propriété de multiplicativité pour les résultants. Il s'agit de montrer que la suite

$$0 \to A \overset{{}^a\mathrm{Res}\,(g_1,\cdots,g_n)}{\longrightarrow} A \overset{can}{\longrightarrow} \prod_{i=1}^n B_{X_i}$$

est exacte. Comme d'habitude, on se ramène à le prouver lorsque $k = \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (p premier) : une fois observé que les ${}_{\mathbf{Z}}B_{X_i}$ sont sans $\mathbf{Z}$-torsion (ii), cela implique que $Q :=$ Coker (can) est $\mathbf{Z}$-plat. Mais lorsque k est factoriel l'idéal $\mathcal{A}$ est une racine ($A/\mathcal{A} \subset B/H^0_{\mathfrak{M}}B$) d'après (ii), et d'autre part on sait qu'il a même racine que l'idéal engendré par le polynôme ${}^a\mathrm{Res}\,(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ qui, au vu de son expression rappelée dans l'énoncé, est "quadratfrei". D'où $\mathcal{A} = ({}^a\mathrm{Res}\,(g_1, g_2, \cdots, g_n))$ dans ce cas, ce qui achève la démonstration.

3. Structure de la transgression et inertie.

Le propos de ce paragraphe est d'expliciter, au moins dans le cas générique, les morphismes de transgression $\hat{\tau}_\nu$ de (1.3). Nous aurons d'abord besoin pour cela de quelques généralités.

3.1. Soient R, S deux anneaux commutatifs, et $\alpha : R \to S$ une structure de R-algèbre sur S. On note

$$\begin{aligned} \mathrm{mult}_{S/R} \ : \ & S \otimes_R S \to S \\ & x \otimes_R y \mapsto xy \end{aligned}$$

la multiplication de S, et

$$I_{S/R} := \ \mathrm{Ker}\ (\mathrm{mult}_{S/R})$$

l'idéal de $S \otimes_R S$ engendré par les éléments de $S \otimes_R S$ qui sont de la forme $x \otimes 1 - 1 \otimes x (x \in S)$.

Pour tout S-module P et tout $s \in S$, on note $s_P : P \to P$ la multiplication par s dans P. Etant donnés deux S-modules M et N, on prolonge la structure de R-module de $Hom_R(M, N)$ en une structure de $(S \otimes_R S)$-module au moyen de la loi de composition

$$(S \otimes_R S) \times \ \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \ \mathrm{Hom}_R(M, N).$$

$$[(s \otimes_R t), u] \mapsto t_N \circ u \circ s_M$$

Pour cette structure de $(S \otimes_R S)$-module, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(M, N) &= \{u \in \ \mathrm{Hom}_R(M, N) | (s \otimes 1 - 1 \otimes s)u = 0 \ \forall s \in S\} \\ &= \{u \in \ \mathrm{Hom}_R(M, N) | I_{S/R}.u = 0\}, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

identifiant ainsi $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ au sous $(S \otimes_R S)$-module de $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ formé des éléments annulés par $I_{S/R}$.

Le cas qui nous intéresse ici est celui où $N = S$ et $M = \check{S} := \ \mathrm{Hom}_R(S, R)$, ce dernier étant muni de la structure de S-module définie par

$$s * u := u \circ s_S \qquad (s \in S, u \in \check{S}).$$

Le R-module $\mathrm{Hom}_R(\check{S}, S)$ contient l'élément

$$\begin{aligned} e_{S/R} \ : \ & \check{S} \to S \quad , \\ & v \mapsto (\alpha \circ v)(1_S) \end{aligned}$$

ce qui permet de définir une application $(S \otimes_R S)$-linéaire

$$\begin{aligned} \theta_{S/R} \ : \ & S \otimes_R S \to \ \mathrm{Hom}_R(\check{S}, S) \ ; \\ & s \otimes_R t \mapsto (s \otimes_R t).e_{S/R} \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

pour tout $(s,t) \in S \times S$, l'application $\theta_{S/R}(s \otimes_R t)$ est ainsi définie par

$$\begin{aligned} \theta_{S/R}(s \otimes_R t) \ : \ \check{S} &\to S \\ v &\mapsto t.(\alpha \circ v)(s) = v(s).t \ , \end{aligned}$$

où la deuxième expression traduit la structure de R-module de S au moyen de α.

Identifions, par $\mathrm{mult}_{S/R}$, les anneaux S et $(S \otimes_R S)/I_{S/R}$. Alors, il résulte aussitôt de (3.1.1) que $\theta_{S/R}$ induit une application S-linéaire, notée de même si aucune confusion n'est possible,

$$\text{(3.1.3)} \qquad \begin{gathered} \theta_{S/R} : ann_{S \otimes_R S}(I_{S/R}) \to \mathrm{Hom}_S(\check{S}, S) \\ \sum_\ell s_\ell \otimes_R t_\ell \mapsto [v \mapsto \sum_\ell v(s_\ell).t_\ell] \ . \end{gathered}$$

3.2. Soit S un anneau commutatif $\mathbf{Z}$-gradué :

$$S = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} S_p \quad ,$$

avec $1 \in S_0$ et $S_p S_q \subset S_{p+q}$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$.

On rappelle que, par définition, un S-module $\mathbf{Z}$-gradué est un S-module M muni d'une décomposition en somme directe indexée par $\mathbf{Z}$ de groupes abéliens

$$M = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} M_p \ ,$$

ces données étant assujetties aux conditions

$$\text{(3.2.1)} \qquad S_p M_q \subset M_{p+q} \qquad (p, q \in \mathbf{Z}) \ .$$

Etant donnés deux S-modules $\mathbf{Z}$-gradués M et N, on dit qu'une application S-linéaire $u : M \to N$ est homogène de degré p lorsque

$$u(M_\ell) \subset N_{\ell+p} \quad \text{pour tout} \quad \ell \in \mathbf{Z} \ .$$

Pour tout $p \in \mathbf{Z}$, il est immédiat que l'ensemble, noté

$$\mathrm{Hom}_S(M,N)_p \subset \mathrm{Hom}_S(M,N) \ ,$$

des applications S-linéaires de degré p de M dans N est un sous-groupe abélien de $\mathrm{Hom}_S(M,N)$. Si $p \neq q$, les égalités $N_{\ell+p} \cap N_{\ell+q} = 0 \quad \forall \ell \in \mathbf{Z}$ montrent que

$$\mathrm{Hom}_S(M,N)_p \cap \mathrm{Hom}_S(M,N)_q = 0$$

dans $\mathrm{Hom}_S(M,N)$. Par suite,

$$\mathrm{Hom}_S^{gr}(M,N) := \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_S(M,N)_p$$

se réalise comme sous-groupe abélien de $\mathrm{Hom}_S(M,N)$.

Si M, N, P sont trois S-modules $\mathbf{Z}$-gradués, et $p, q \in \mathbf{Z}$, la composition des applications S-linéaires

$$\mathrm{Hom}_S(M,N) \times \mathrm{Hom}_S(N,P) \to \mathrm{Hom}_S(M,P)$$

$$(u,v) \mapsto v \circ u$$

envoie $\mathrm{Hom}_S(M,N)_p \times \mathrm{Hom}_S(N,P)_q$ dans $\mathrm{Hom}_S(M,P)_{p+q}$. D'où une loi de composition induite

$$\mathrm{Hom}_S^{gr}(M,N) \times \mathrm{Hom}_S^{gr}(N,P) \to \mathrm{Hom}_S^{gr}(M,P) \ . \tag{3.2.2}$$

Soit M un S-module $\mathbf{Z}$-gradué. Il résulte aussitôt de (3.2.1) que le morphisme d'anneaux $S \ni s \mapsto s_M$ a son image contenue dans $\mathrm{Hom}_S^{gr}(M,M)$.

Soient M et N deux S-modules $\mathbf{Z}$-gradués. La remarque précédente et l'existence de (3.2.2) montrent que $\mathrm{Hom}_S^{gr}(M,N)$ est un sous-S-module du S-module $\mathrm{Hom}_S(M,N)$.

Exemple 3.2.3. Soit R un anneau commutatif, et munissons-le de la $\mathbf{Z}$-graduation triviale : $R_0 = R$, $R_p = 0$ si $p \neq 0$. Alors un R-module $\mathbf{Z}$-gradué n'est autre qu'un R-module M muni d'une décomposition en somme directe indexée par $\mathbf{Z}$ de R-modules : $M = \bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} M_p$. Si M et N sont deux R-modules $\mathbf{Z}$-gradués, ce qui précède permet d'identifier $\mathrm{Hom}_R^{gr}(M,N)$ à un sous R-module de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dans le cas particulier où $N := R$, nous poserons

$$D_R^{gr}(M) := \mathrm{Hom}_R^{gr}(M,R) \ ,$$

de sorte que

$$D_R^{gr}(M)_p = \mathrm{Hom}_R(M_{-p},R) \quad (p \in \mathbf{Z}) \ .$$

3.3. Soit R un anneau commutatif, et S un anneau commutatif $\mathbf{Z}$-gradué muni d'une structure de R-algèbre $\alpha : R \to S$ pour laquelle $\alpha(R) \subset S_0$.

Munissant R de la $\mathbf{Z}$-graduation triviale (3.2.3), on voit que tout S-module $\mathbf{Z}$-gradué M est muni par α d'une structure de R-module $\mathbf{Z}$-gradué.

Soient M et N deux S-modules $\mathbf{Z}$-gradués. La comparaison de (3.2.1) et (3.2.2) montre que, munissant $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ de sa structure de $(S\otimes_R S)$-module canonique

$$(s\otimes t).u := t_N \circ u \circ s_M$$

$(s,t\in S, u\in \mathrm{Hom}_R(M,N))$, le R-module

$$\mathrm{Hom}_R^{gr}(M,N) \subset \mathrm{Hom}_R(M,N)$$

est un sous $(S\otimes_R S)$-module de $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. De plus, munissant $S\otimes_R S$ de la $\mathbf{Z}$-graduation produit tensoriel

$$(S\otimes_R S)_m := \bigoplus_{p+q=m} S_p \otimes_R S_q \quad (m\in \mathbf{Z}),$$

la $\mathbf{Z}$-graduation canonique du R-module $\mathrm{Hom}_R^{gr}(M,N)$ est compatible avec la $\mathbf{Z}$-graduation de $S\otimes_R S$, ce qui permet de considérer $\mathrm{Hom}_R^{gr}(M,N)$ comme $(S\otimes_R S)$-module $\mathbf{Z}$-gradué. L'idéal $I_{S/R}$ de $S\otimes_R S$ est gradué et la multiplication induit un isomorphisme d'anneaux $\mathbf{Z}$-gradués

$$\overline{\mathrm{mult}}_{S/R} : (S\otimes_R S)/I_{S/R} \xrightarrow{\sim} S\ .$$

Cela étant, il résulte de (3.1.1) que

$$\mathrm{Hom}_S^{gr}(M,N) = \{u\in \mathrm{Hom}_R^{gr}(M,N) | I_{S/R}u = 0\}\ , \tag{3.3.1}$$

et l'on peut ainsi identifier le S-module $\mathrm{Hom}_S^{gr}(M,N)$ au $(S\otimes_R S)$-sous-module de $\mathrm{Hom}_R^{gr}(M,N)$ formé des éléments annulés par $I_{S/R}$.

Paraphrasant (3.1), on s'intéresse au cas où $N = S$ et $M = D_R^{gr}(S) := \mathrm{Hom}_R^{gr}(S,R)$ (3.2.3), muni de la structure de S-module $s.u := u\circ s_S$ $(s\in S, u\in D_R^{gr}(S))$. Alors l'application R-linéaire

$$\begin{aligned} e_{S/R}^{gr} : D_R^{gr}(S) = \bigoplus_p \mathrm{Hom}_R(S_{-p},R) &\to S \\ \bigoplus_p v_p &\mapsto \alpha[v_0(1)] \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

est un élément homogène de degré 0 du $(S \otimes_R S)$-module $\mathbf{Z}$-gradué $\mathrm{Hom}_R^{gr}(D_R^{gr}(S), S)$. Ceci permet en particulier de considérer l'application $(S \otimes_R S)$-linéaire ($(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$-homogène de degré $(0,0)$)

$$\begin{aligned} \theta_{S/R}^{gr} \ :\ S \otimes_R S &\to \mathrm{Hom}_R^{gr}(D_R^{gr}(S), S) \\ s \otimes_R t &\mapsto (s \otimes_R t).e_{S/R}^{gr} \\ &:= t_S \circ e_{S/R}^{gr} \circ s_{D_R^{gr}(S)}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Par définition, pour tout $s = \bigoplus_p s_p \in S$ et tout $t \in S$, on a

$$\begin{aligned} \theta_{S/R}^{gr}(s \otimes_R t) : \bigoplus_p \mathrm{Hom}_R(S_{-p}, R) &\to S \\ \bigoplus_p v_p &\mapsto t.\alpha(\sum_p v_{-p}(s_p)) = [\sum_p v_{-p}(s_p)].t \ , \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

où le point de la dernière égalité correspond à la structure de R-module sur S définie par α.

Compte tenu de (3.3.1), l'application $\theta_{S/R}^{gr}$ induit à son tour une application $S = (S \otimes_R S)/I_{S/R}$-linéaire, notée de même si aucune confusion n'est possible,

$$\theta_{S/R}^{gr} : ann_{S \otimes_R S}(I_{S/R}) \to \mathrm{Hom}_S^{gr}(D_R^{gr}(S), S), \tag{3.3.5}$$

qui est homogène de degré 0 pour les structures canoniques de S-modules $\mathbf{Z}$-gradués des deux membres.

3.4 Comme au début de (1.1), soit $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ une suite indexée par $[n] (n \geq 1)$ d'entiers ≥ 1, ℓ un anneau commutatif. Affectant les indéterminées $X_i (1 \leq i \leq n)$ du poids m_i, on note C la ℓ-algèbre de polynômes $\mathbf{N}$-graduée

$$C := \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n] \ .$$

Enfin, on se donne un idéal $\mathbf{N}$-gradué J de C, et on pose

$$\mathfrak{M} := (X_1, X_2, \cdots, X_n) \subset C$$

$$R := \ell[X_1, \cdots, X_n]/J \ .$$

L'anneau R étant canoniquement $\mathbf{Z}$-gradué, on munit la ℓ-algèbre $R \otimes_\ell R$ de la $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$-graduation correspondante, ainsi que de la $\mathbf{Z}$-graduation produit tensoriel associée.

L'idéal

$$ann_{R \otimes_\ell R}(I_{R/\ell}) = \{\xi \in R \otimes_\ell R | (s \otimes 1 - 1 \otimes s)\xi = 0 \ \ \forall p \ \ \forall s \in R_p\}$$

est $\mathbf{Z}$-gradué, qu'on le considère comme $(R\otimes_\ell R)$-module, ou comme R-module au moyen de l'isomorphisme de ℓ-algèbres $\mathbf{Z}$-graduées $\overline{mult}_{R/\ell} : (R \otimes_\ell R)/I_{R/\ell} \xrightarrow{\sim} R$.

Soit $\xi \in ann_{R\otimes_\ell R}(I_{R/\ell})$, et

$$\xi = \sum_{(p,q)\in\mathbf{Z}^2} \xi_{pq} \ , \quad \text{avec} \quad \xi_{pq} \in R_p \otimes_\ell R_q$$

sa décomposition en éléments $\mathbf{Z}^2$-homogènes. Posant $x_j := \bar{X}_j \in R \quad (j \in [n])$, les égalités

$$(x_j \otimes 1 - 1 \otimes x_j)\xi = 0 \quad \text{dans} \quad R \otimes_\ell R$$

montrent que, pour tout $j \in [n]$ et tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$,

$$(x_j \otimes 1)\xi_{pq} = (1 \otimes x_j)\xi_{p+m_j,q-m_j}$$

dans $R_{p+m_j} \otimes_\ell R_q$. Par itération, on en déduit que, pour toute suite $j_1, j_2, \cdots, j_\ell$ d'entiers $\in [n]$,

$$(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_\ell} \otimes 1)\xi_{pq} = (1 \otimes x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_\ell})\xi_{p+\sum_{1\le s\le \ell} m_{j_s}, q - \sum_{1\le s\le\ell} m_{j_s}}$$

dans $R \otimes_\ell R$. Comme $R_p \otimes_\ell R_q = 0$ si $q < 0$, on en déduit que

$$(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_\ell} \otimes 1)\xi_{pq} = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{1\le s\le\ell} m_{j_s} > q \ .$$

Posant

$$\mu := \max\{p+q | \xi_{pq} \neq 0\} \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\} \ ,$$

on en déduit que

$$(R_{>\mu} \otimes_\ell 1)\xi = 0 \tag{3.4.1}$$

et, de même,

$$(1 \otimes_\ell R_{>\mu})\xi = 0 \ .$$

En particulier,

$$ann_{R\otimes_\ell R}(I_{R/\ell}) \subset H^0_{\mathfrak{M}\otimes_\ell R + R\otimes_\ell \mathfrak{M}}(R \otimes_\ell R). \tag{3.4.2}$$

Utilisant la R-linéarité de $\theta_{R/\ell}(\xi)$ (resp. $\theta^{gr}_{R/\ell}(\xi)$) défini en (3.1) et (3.3) respectivement, on déduit de (3.4.1) que

$$R_{>\mu}.\theta_{R/\ell}(\xi) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_\ell(R,\ell), R)$$

$$(\mathit{resp.}\ R_{>\mu}.\theta^{gr}_{R/\ell}(\xi) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}_R(D^{gr}_\ell(R), R)).$$

En particulier,

$$\mathrm{Im}\theta^{gr}_{R/\ell}(\xi) \subset \ \mathrm{Im}\ \theta_{R/\ell}(\xi) \subset H^0_{\mathfrak{M}}(R). \tag{3.4.3}$$

3.5 Soit ℓ un anneau commutatif, J un idéal de l'anneau de polynômes $\ell[X_1, \cdots, X_n]$, et

$$R := \ell[X_1, \cdots, X_n]/J = \ell[\underline{X}]/J(\underline{X}) \ .$$

Introduisons une deuxième suite d'indéterminées $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, de sorte que $R \otimes_\ell R$ s'identifie à

$$\ell[\underline{X}, \underline{Y}]/(J(\underline{X}), J(\underline{Y})).$$

Pour toute suite $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ d'éléments de J, choisissons des décompositions

$$g_i(\underline{X}) - g_i(\underline{Y}) = \sum_{j \in [n]} (X_j - Y_j) g_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})$$

dans $\ell[\underline{X}, \underline{Y}]$. Comme $(X_1 - Y_1, X_2 - Y_2, \cdots, X_n - Y_n)$ est régulière dans $\ell[\underline{X}, \underline{Y}]$, il résulte du "lemme de Wiebe" (par ex. [J4] 3.8.1.7) que la classe de dét (g_{ij}) dans l'anneau $\ell[\underline{X}, \underline{Y}]/(g_i(\underline{X}) - g_i(\underline{Y}))_{1 \le i \le n}$ ne dépend pas de la décomposition choisie. D'autre part, pour tout $s \in [n]$,

$$(X_s - Y_s) \text{ dét } (g_{ij}) \in (g_i(\underline{X}) - g_i(\underline{Y}))_{1 \le i \le n}$$

dans $\ell[\underline{X}, \underline{Y}]$.

Comme les éléments $(\bar{X}_s - \bar{Y}_s)(s \in [n])$ engendrent $I_{R/\ell}$ dans $R \otimes_\ell R$, on en déduit que la classe

$$\nabla_R(\underline{g}; \underline{X}) := \text{dét } (g_{ij})^- \in R \otimes_\ell R$$

est bien définie et appartient à $ann_{R \otimes_\ell R}(I_{R/\ell})$. Comme $\nabla_R(\underline{g}; \underline{X})$ est ℓ-multilinéaire alterné en $\underline{g}$, on en déduit une application ℓ-linéaire

$$\Lambda^n_\ell(J) \to ann_{R \otimes_\ell R}(I_{R/\ell})$$

$$g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \mapsto \nabla_R(\underline{g}; \underline{X}).$$

En fait, on peut montrer (par ex [J6] 3.12.6.38) qu'elle se factorise à travers une application R-linéaire

$$\Lambda^n_R(J/J^2) \to ann_{R \otimes_\ell R}(I_{R/\ell}).$$

$$\bar{g}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{g}_n \mapsto \nabla_R(\underline{g}; \underline{X}).$$

Lorsque, comme dans (3.4), les X_i sont affectés de poids $m_i \ge 1$ et J est gradué, il résulte donc des considérations précédentes que, pour toute suite $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ d'éléments de J, on a

$$\theta_{R/\ell}(\nabla_R(\underline{g}; \underline{X})) : \mathrm{Hom}_\ell(R, \ell) \to H^0_{\mathfrak{M}}(R)$$

$$\theta^{gr}_{R/\ell}(\nabla_R(\underline{g}; \underline{X})) : D^{gr}_\ell(R) \to H^0_{\mathfrak{M}}(R) \ .$$

3.6. Plaçons-nous de nouveau dans la situation de (1.1), dont on rappelle brièvement les notations :

$$\begin{aligned} C &= \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n], \quad \text{avec} \quad \deg_a(X_i) = m_i \geq 1 \ \ \forall i \\ f_i &= \sum_{\deg_a(X^\alpha)=d_i} u_{i\alpha} X^\alpha \quad (i \in [n], u_{i\alpha} \in \ell); d_i \geq 1 \\ B &= \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_n) \ , \\ \delta &= (d_1 + d_2 + \cdots + d_n) - (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \ . \end{aligned}$$

Pour tout $i \in [n]$, choisissons une décomposition

$$f_i(\underline{X}) - f_i(\underline{Y}) = \sum_{j=1}^{n} (X_j - Y_j) f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y}) \tag{3.6.1}$$

dans $C \otimes_\ell C = \ell[\underline{X}, \underline{Y}]$ (muni de la $\mathbf{Z}$-graduation produit tensoriel $\deg_a(X_i) = \deg_a(Y_i) = m_i$), avec les $f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})$ homogènes :

$$\deg_a(f_{ij}) = d_i - m_j \ .$$

Avec ces notations, il est clair que

$$\nabla_B(\underline{f}; \underline{X}) := \text{dét } (f_{ij})^- \in (B \otimes_\ell B)_\delta$$

pour la graduation produit tensoriel de $B \otimes_\ell B$, de sorte que (3.4.3) $\theta^{gr}_{B/\ell}(\nabla_B(\underline{f}; \underline{X}))$ peut être considéré comme un morphisme de B-modules $\mathbf{Z}$-gradués

$$\theta : D^{gr}_\ell(B)(-\delta) \to H^0_{\mathfrak{M}}(B) \ , \tag{3.6.2}$$

de composantes

$$\theta_\nu : \check{B}_{\delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \quad (\nu \in \mathbf{Z}) \ .$$

Etant donné une décomposition

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} X_j g_{ij}$$

des f_i dans C, on rappelle (lemme de Wiebe) que

$$\Delta := \text{dét } (g_{ij})^- \in B \tag{3.6.3}$$

ne dépend pas de la décomposition choisie. Par ailleurs, choisissant les g_{ij} homogènes de degré $d_i - m_j$, on voit que $\Delta \in B_\delta$. Par spécialisation $Y_i \mapsto 0$ ($i \in [n]$) dans (3.6.1), on voit qu'on peut choisir $g_{ij} = f_{ij}(\underline{X}, 0)$. Par suite, notant

$$\begin{aligned} \pi : B &\to \ell \\ X_i &\mapsto 0 \end{aligned}$$

l'augmentation de ℓ-algèbres canonique, et posant

$$\begin{aligned} \mu : B \otimes_\ell B &\to B \\ b_1 \otimes b_2 &\mapsto \pi(b_2) b_1 \ , \end{aligned}$$

on a

$$\Delta = \mu(\nabla_B(\underline{f}; \underline{X})) \in B_\delta \ . \tag{3.6.4}$$

Décomposons dét $(f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y}))$ pour la $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$-graduation canonique de $C \otimes_\ell C$:

$$\text{dét } (f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})) = \sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=\delta}} h_{pq}(\underline{X}, \underline{Y}) \quad (h_{pq} \in C_p \otimes_\ell C_q) \ .$$

Ecrivant arbitrairement

$$h_{\delta-\nu,\nu} = \sum_s x_s \otimes y_s \qquad (x_s \in C_{\delta-\nu}, y_s \in C_\nu) \ ,$$

on a, par définition,

$$\begin{aligned} \theta_\nu : B^\vee_{\delta-\nu} &\to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \ . \\ u &\mapsto \sum_s u(\bar{x}_s) \bar{y}_s \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

En particulier, comme il est clair que

$$\text{dét } (f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})) - \text{ dét } (f_{ij}(\underline{X}, 0)) \in \bigoplus_{\substack{p+q=\delta \\ q \geq 1}} C_p \otimes_\ell C_q \ ,$$

$$\text{dét } (f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})) - \text{ dét } (f_{ij}(0, \underline{Y})) \in \bigoplus_{\substack{p+q=\delta \\ p \geq 1}} C_p \otimes_\ell C_q,$$

on a $h_{\delta,0} = $ dét $(f_{ij}(\underline{X}, 0)) \otimes 1$ et $h_{0,\delta} = 1 \otimes$ dét $(f_{ij}(0, \underline{Y}))$.

Si $\varepsilon : \ell \to B_0$ est le morphisme (bijectif) d'anneaux canonique, dont on note $\varepsilon^\vee$ le ℓ-dual, il résulte alors de la comparaison de (3.6.4) et (3.6.5) que

$$\begin{cases} \theta_0 : \check{B}_\delta \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 \\ \qquad u \mapsto u(\Delta) \\ \theta_\delta : \check{B}_0 \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \ . \\ \qquad a\varepsilon^\vee \mapsto a\Delta (a \in \ell) \end{cases} \tag{3.6.6}$$

Proposition 3.6.7.— *On utilise les notations de (1.3) et (1.4). En particulier,* $\mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 \subset \ell$*. Alors :*

(i) On a les égalités

$$\hat{\tau}_0 = \theta_0 : \check{B}_\delta \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 \ ,$$
$$\hat{\tau}_\delta = \theta_\delta : \check{B}_0 \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \ .$$

De plus, lorsque la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *est régulière dans* C*, on a, pour tout* $\nu \in \mathbf{Z}$*,*

$$\hat{\tau}_\nu = \theta_\nu : \check{B}_{\delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu .$$

(ii) Pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$*, on a*

$$B_{\delta-\nu}.\ \mathrm{Im}\ (\hat{\tau}_\nu - \theta_\nu) = 0 \quad dans \quad B_\delta \ ,$$

et

$$\mathrm{Im}\ (\hat{\tau}_\nu - \theta_\nu) \subset H^0_{\mathcal{A}}(B)_\nu \ .$$

Preuve : Afin de préciser la suite $\underline{f} := (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ étudiée, nous allons utiliser les notations $\tau_\nu(\underline{f}), \hat{\tau}_\nu(\underline{f})$ au lieu de τ_ν, $\hat{\tau}_\nu$. En particulier, posant $\underline{X} := (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, nous aurons à considérer $\tau_\nu(\underline{X}), \hat{\tau}_\nu(\underline{X})$. Donnons-nous une décomposition

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} X_j g_{ij}$$

des f_i dans C, avec les g_{ij} homogènes ($\deg_a(g_{ij}) = d_i - m_j$), de sorte que (3.6.3) $\Delta :=$ dét $(g_{ij})^-$ dans B. Posons

$$M := [g_{ij}] \in \ \mathrm{Mat}_n(C) \ .$$

Le morphisme de C-modules $\mathbf{Z}$-gradués

$${}^tM : \bigoplus_{i=1}^{n} C(-d_i) \to \bigoplus_{i=1}^{n} C(-m_i)$$

se prolonge en un morphisme de complexes

$$\mathrm{Kosz}\ (f_1, \cdots, f_n; C) \to \ \mathrm{Kosz}\ (X_1, \cdots, X_n; C)$$

de la forme

$$(3.6.8) \qquad \begin{array}{ccccc} 0 \to C(-\Sigma_i m_i) & \to \cdots & \to \bigoplus_i C(-m_i) & \overset{[X_1,\cdots,X_n]}{\longrightarrow} & C \to 0 \\ \text{dét } (g_{ij}) \uparrow & & {}^tM \uparrow & & \| \\ 0 \to C(-\Sigma_i d_i) & \to \cdots & \to \bigoplus_i C(-d_i) & \overset{[f_1,\cdots,f_n]}{\longrightarrow} & C \to 0 \\ \deg -n & & & & \deg 0 \ . \end{array}$$

Par fonctorialité de la transgression pour les morphismes de complexes, et restriction aux composantes homogènes de degré 0, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\underline{f}; H^n_{\mathfrak{M}}(C))_{-\sum_i d_i} & \stackrel{\tau_0(\underline{f})}{\longrightarrow} & H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 \\ \text{dét }(g_{ij}) \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i} & \stackrel{\tau_0(\underline{X})}{\longrightarrow} & \ell\,. \end{array} \tag{3.6.9}$$

Identifiant $H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i}$ et $\ell.(X_1X_2\cdots X_n)^{-1}$, rappelons que ([J4]2.6.4.6.)

$$\begin{aligned} \tau_0(\underline{X}) : &\ell.(X_1\cdots X_n)^{-1} \to \ell \\ &a(X_1\cdots X_n)^{-1} \mapsto a \quad (a\in \ell) \end{aligned}$$

et que, par définition de $\hat{\tau}$, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^0(\underline{f}; H^n_{\mathfrak{M}}(C))_{-(\Sigma_i d_i)+\nu} & \stackrel{\tau_\nu(\underline{f})}{\longrightarrow} & H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \\ h_\nu \Big\downarrow \wr & \hat{\tau}_\nu(f) & \\ \check{B}_{\delta-\nu} & & \end{array}, \tag{3.6.10}$$

avec $h_\nu : x \mapsto [y \mapsto \tau_0(\underline{X})(yx)]$, est commutatif. Montrons que $\hat{\tau}_0 = \theta_0$. Soit $u \in \check{B}_\delta$. La bijectivité de h_0 prouve l'existence d'un élément $x \in H^0(\underline{f}; H^n_{\mathfrak{M}}(C))_{-\Sigma_i d_i}$ tel que

$$u(b) = \tau_0(\underline{X})(bx) \quad (\forall b \in B_\delta)\ . \tag{3.6.11}$$

On a alors la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_0(\underline{f})(u) &= \tau_0(\underline{f})(x) \quad (3.6.10) \\ &= \tau_0(\underline{X})(\Delta x) \quad (3.6.9) \\ &= u(\Delta) \quad (3.6.11), \end{aligned}$$

d'où l'assertion annoncée, par comparaison avec (3.6.6). Montrons que $\hat{\tau}_\delta = \theta_\delta$. Utilisant l'autodualité des complexes de Koszul, on déduit par dualité de (3.6.8) sur le modèle de ([J4] (3.8.1.3)) par exemple, un morphisme de complexes de C-modules $\mathbf{Z}$-gradués

$$w:\ \text{Kosz }(\underline{X}; C)(-\delta) \to \text{ Kosz }(\underline{f}; C)$$

pour lequel w_0 est la multiplication par dét (g_{ij}) et w_{-n} l'identité de $C(-\Sigma_i d_i)$. Par fonctorialité des transgressions pour les morphismes de complexes, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \{x \in H^n_{\mathfrak{M}}(C)(-\Sigma_i d_i) | \mathfrak{M}x = 0\} & \stackrel{\tau(\underline{X})(-\delta)}{\longrightarrow} & H^0_{\mathfrak{M}}(C/\mathfrak{M})(-\delta) = \ell(-\delta) & & \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle 1 \mapsto \Delta} \\ \{x \in H^n_{\mathfrak{M}}(C)(-\Sigma_i d_i) | (f_1,\cdots,f_n)x = 0\} & \stackrel{\tau(\underline{f})}{\longrightarrow} & H^0_{\mathfrak{M}}(B) & & \end{array}$$

induisant en degré δ un diagramme commutatif de ℓ-modules

$$\text{(3.6.12)}\qquad \begin{array}{ccccc} H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i} & \xrightarrow{\tau_0(\underline{X})} & C/\mathfrak{M} = \ell & & \\ id\| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1}\atop{\scriptstyle\Delta} \\ H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i} & \xrightarrow{\tau_\delta(\underline{f})} & H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta & & . \end{array}$$

Soit $a \in \ell$, et, comme plus haut $\varepsilon : \ell \to B_0$ l'inclusion canonique. Rappelant que h_δ est, par construction, l'isomorphisme

$$h_\delta : H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i} = \ell(X_1 \cdots X_n)^{-1} \to \check{B}_0 \ ,$$
$$\lambda(X_1 \cdots X_n)^{-1} \mapsto \lambda\check{\varepsilon}$$

on a la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_\delta(\underline{f})(a\check{\varepsilon}) &= \tau_\delta(\underline{f})(a(X_1 \cdots X_n)^{-1}) \quad (3.6.10) \\ &= \tau_0(\underline{X})(a(X_1 \cdots X_n)^{-1}).\Delta \quad (3.6.12) \\ &= a\Delta \qquad ([J4]2.6.4.6). \end{aligned}$$

D'où $\hat{\tau}_\delta(\underline{f}) = \theta_\delta$ par comparaison avec (3.6.6).

Soit maintenant $\nu \in \mathbf{Z}$. Si $\nu < 0$, on a $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu = 0$; si $\nu > \delta$, on a $\check{B}_{\delta-\nu} = 0$. Par suite, $\hat{\tau}_\nu = \theta_\nu = 0$ dans ces deux cas. Supposons donc $0 \leq \nu \leq \delta$. Pour tout $b \in B_{\delta-\nu}$ et tout $u \in \check{B}_{\delta-\nu}$, l'égalité $\hat{\tau}_\delta = \theta_\delta$ déjà prouvée et la B-linéarité de $\hat{\tau}$ et θ montrent que

$$b\hat{\tau}_\nu(u) = \hat{\tau}_\delta(bu) = \theta_\delta(bu) = b\theta_\nu(u) \ ,$$

d'où la première partie de (ii) :

$$\text{(3.6.13)}\qquad B_{\delta-\nu}.\text{Im }(\hat{\tau}_\nu - \theta_\nu) = 0 \quad \text{dans} \quad H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \subset B_\delta \ .$$

Lorsque la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière, nous avons vu (1.5.1) que τ est un isomorphisme de C-modules $\mathbf{Z}$-gradués

$$\tau : H^0(\underline{f}; H^n_{\mathfrak{M}}(C))(-\Sigma_i d_i) \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathfrak{M}}(B) \ .$$

En particulier,

$$\tau_\delta : H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i} \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \ .$$

L'accouplement

$$C_{\delta-\nu} \otimes_\ell H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{\nu-\Sigma_i d_i} \to H^n_{\mathfrak{M}}(C)_{-\Sigma_i m_i}$$
$$c \otimes x \mapsto cx$$

étant parfait, on en déduit par transport de structure à partir de τ que

$$\{y \in B_\nu | B_{\delta-\nu} y = 0\} = \{y \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu | B_{\delta-\nu} y = 0\} = 0.$$

D'où la deuxième partie de (i) par comparaison avec (3.6.13). Supposons maintenant $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ arbitraire. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, les $H_i(f_1, \cdots, f_n; C)$ $(i \neq 0)$ sont annulés par une puissance de a (lemme d'inertie : [J6] (3.12.1.2)), donc la suite $(f_1/1, \cdots, f_n/1)$ de $\ell_a[X_1, \cdots, X_n]$ est régulière. Par suite (i), $(\hat{\tau}_\nu)_a = (\theta_\nu)_a$. La fin de (ii) en résulte aussitôt.

L'intérêt de la proposition (3.6.7) provient surtout du corollaire suivant qui, appliqué à la situation générique, permet dans de nombreux cas d'expliciter alors toutes les formes d'inertie (cf.[J5] 3.11).

Corollaire 3.6.14.— *Soient ℓ un anneau commutatif et $C := \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ gradué par $\deg_a(X_i) = m_i \geq 1 (i \in [n])$. Soit $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une suite régulière d'éléments homogènes de C, avec $\deg_a(f_i) = d_i \geq 1$ $(i \in [n])$. On pose $B = C/(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ et $\delta = (d_1 + \cdots + d_n) - (m_1 + \cdots + m_n)$.*

Alors :

(i) $D_\ell^{gr}(B)(-\delta)_\nu := \check{B}_{\delta-\nu} = 0$ lorsque $\nu < 0$ ou $\nu > \delta$, de sorte que

$$D_\ell^{gr}(B) = \mathrm{Hom}_\ell(B, \ell) ,$$

(ii) L'application B-linéaire

$$\theta_{B/\ell}(\nabla_B(\underline{f}; \underline{X})) = \theta_{B/\ell}^{gr}(\nabla_B(\underline{f}; \underline{X})) : \mathrm{Hom}_\ell(B, \ell) \to H_{\mathfrak{M}}^0 B$$

est un isomorphisme de B-modules.

Preuve : Par (1.5.1), la transgression $\hat{\tau}$ est bijective ; on en déduit (i) en remarquant que $H_{\mathfrak{M}}^0(B)_\nu = 0$ si $\nu < 0$ et $\check{B}_{\delta-\nu} = 0$ si $\nu > \delta$. Par ailleurs (3.6.7 (i)), on a $\theta := \theta_{B/\ell}^{gr}(\nabla_B(\underline{f}; \underline{X})) = \hat{\tau}$, d'où aussitôt (ii).

3.6.15. Soient ℓ un anneau commutatif, J un idéal de $C := \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ et $R := C/J$. Toute application R-linéaire $u : H_{\mathfrak{M}}^0(R) \to R$ a son image contenue dans $H_{\mathfrak{M}}^0(R)$. Par suite, par application du ∂-foncteur $\mathrm{Ext}_R^*(?, R)$ à la suite exacte canonique $0 \to H_{\mathfrak{M}}^0(R) \to R \to R/H_{\mathfrak{M}}^0(R) \to 0$, on obtient une suite exacte de R-modules

$$0 \to (0 : H_{\mathfrak{M}}^0(R))_R \to R \xrightarrow{h} \mathrm{End}_R(H_{\mathfrak{M}}^0(R)) \to \mathrm{Ext}_R^1(R/H_{\mathfrak{M}}^0(R), R) \to 0, \tag{3.6.16}$$
$$r \mapsto r_{H_{\mathfrak{M}}^0(R)}$$

dans laquelle h est le morphisme d'anneaux canonique.

La proposition suivante permet notamment de préciser (3.6.16) dans la situation intersection complète (3.6.14).

Proposition 3.6.17.— *Sous les hypothèses de (3.6.14), les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Notons $\varphi : \ell[X_1, \cdots, X_n] \to \ell[X_1, \cdots, X_n]$ *le morphisme de* ℓ*-algèbre défini par* $\varphi(X_i) = X_i^{m_i}(1 \leq i \leq n)$. *Les polynômes* $\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_n)$ *sont homogènes de degrés respectifs* $d_1, d_2, \cdots, d_n$ *pour la graduation ordinaire* $(\deg(X_i) = 1)$ *et l'élément*

$$R := \text{ Res } (\varphi(f_1), \varphi(f_2), \cdots, \varphi(f_n)) \in \ell$$

appartient à $\mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$ *et ne divise pas zéro dans* ℓ.

(ii) Les idéaux suivants de B *sont égaux*

$$H^0_{(R)}(B), H^0_{\mathcal{A}}(B)\ ,\ H^0_{H^0_{\mathfrak{M}}(B)}(B)\ ,$$

$$\begin{aligned}(0:\mathcal{A})_B\ &:= \{b \in B | \mathcal{A}b = 0\}\ ,\\ (0:R)_B\ &:= \{b \in B | Rb = 0\}\ ,\\ (0:H^0_{\mathfrak{M}}(B))_B\ &:= \{b \in B | H^0_{\mathfrak{M}}(B)b = 0\}\ ,\\ &= \text{ Ker } (h : B \to \text{ End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B))\ ,\end{aligned}$$

où $h : b \mapsto b_{H^0_{\mathfrak{M}}(B)}(b \in B)$.

(iii) Pour tout $i \in \mathbf{N}$ *et tout* $\nu \in \mathbf{Z}$, *on a un isomorphisme canonique de* ℓ*-modules*

$$H^i_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \simeq \text{ Ext}^i_\ell(B_{\delta-\nu}, \ell).$$

(iv) Soit $0 \leq \nu \leq \delta$ *un entier. Supposons que* $H^i_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} = 0$ *pour tout entier* $i \geq 1$. *Alors le* ℓ*-module* B_ν *est réflexif et l'application* ℓ*-linéaire*

$$B_\nu \to \text{Hom}_\ell(H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}, H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta)$$

$$x \mapsto (y \mapsto xy) \text{ (produit dans } B)$$

est bijective.

(v) L'anneau $\text{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B)$ *est commutatif et l'application* ℓ*-linéaire*

$$\text{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B) \to \text{Hom}_\ell(\mathcal{A}, B)$$

$$u \mapsto [a \mapsto u(a)]$$

est injective.

(vi) Les B*-modules* $\text{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B)$, $\text{Ext}^1_B(B/H^0_{\mathfrak{M}}B, B)$ *sont canoniquement* $\mathbf{Z}$*-gradués, de sorte que la suite exacte (3.6.16)*

$$0 \to (0 : H^0_{\mathfrak{M}}B)_B \to B \xrightarrow{h} \text{ End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B) \to \text{ Ext}^1_B(B/H^0_{\mathfrak{M}}B, B) \to 0$$

soit une suite exacte de B-modules $\mathbf{Z}$-gradués.

Soit $0 \leq \nu \leq \delta$ un entier. On suppose que $H^i_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} = 0$ pour tout entier $i \geq 1$. Alors l'application ℓ-linéaire

$$h_\nu : B_\nu \rightarrow \ \mathrm{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B)_\nu$$

est surjective. Autrement dit : $\mathrm{Ext}^1_B(B/H^0_{\mathfrak{M}}(B), B)_\nu = 0$. En particulier, si $(H^i_{\mathfrak{M}}B)_{\geq 0} = 0$ pour tout $i \geq 1$, le morphisme d'anneaux h est surjectif, autrement dit

$$\mathrm{Ext}^1_B(B/H^0_{\mathfrak{M}}(B), B) = 0 \ .$$

Preuve : Montrons (i). Posons ici

$$C^\flat := \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n] \quad \text{avec} \quad \deg(X_i) = 1 \ .$$

Le morphisme de ℓ-algèbres $\varphi : C \rightarrow C^\flat$ est un morphisme de ℓ-algèbres $\mathbf{Z}$-graduées, et fait de $C^\flat$ un C-module libre de base les monômes X^α avec $0 \leq \alpha_i \leq m_i - 1 (i \in [n])$. En particulier, φ identifie C à un C-module facteur direct du C-module (par φ) $C^\flat$, de sorte que, posant $B^\flat := B/(\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_n))$, l'application φ induit par passage au quotient une injection $\bar{\varphi} : B \rightarrow B^\flat$. Posons $\mathcal{A}^\flat := H^0_{\mathfrak{M}}(B^\flat)_0$. Si $a \in \mathcal{A}^\flat$, il existe un entier $N \geq 1$ tel que $X_i^{m_i N} a = 0$ $(i \in [n])$ dans $B^\flat$, soit $\bar{\varphi}(X_i^N a) = 0$ $(i \in [n])$; l'injectivité de $\bar{\varphi}$ montre alors que $X_i^N a = 0$ $(i \in [n])$ dans B. On a ainsi prouvé que $\mathcal{A}^\flat \subset \mathcal{A}$. En particulier $R \in \mathcal{A}^\flat \subset \mathcal{A}$. Par ailleurs la platitude de φ montre que la suite $(\varphi(f_1), \varphi(f_2), \cdots, \varphi(f_n))$ est régulière dans $C^\flat$, donc ([J6] 3.12.4.2 (i)) $R :=$ Res $(\varphi(f_1), \cdots, \varphi(f_n))$ ne divise pas zéro dans ℓ. D'où l'assertion. Elle nous servira surtout dans la suite sous la forme

$$H^0_{\mathcal{A}}(H^0_{\mathfrak{M}}B) = H^0_{(R)}(H^0_{\mathfrak{M}}B) = 0 \ , \tag{3.6.18}$$

qui résulte de ce que (1.5.1) τ^{-1} identifie $H^0_{\mathfrak{M}}B$ au sous-ℓ-module $H^0(\underline{f}; H^n_{\mathfrak{M}}C)$ du ℓ-module libre $H^n_{\mathfrak{M}}(C)$. Pour prouver (ii), il suffit, du fait des inclusions immédiates

$$\begin{array}{ccccc} H^0_{H^0_{\mathfrak{M}}(B)}(B) & \subset & H^0_{\mathcal{A}}(B) & \subset & H^0_{(R)}(B) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ (0 : H^0_{\mathfrak{M}}(B))_B & \subset & (0 : \mathcal{A})_B & \subset & (0 : R)_B \end{array}$$

de montrer que $H^0_{(R)}(B) \subset (0 : H^0_{\mathfrak{M}}(B))_B$. Mais

$$H^0_{\mathfrak{M}}(B).H^0_{(R)}(B) \subset H^0_{\mathfrak{M}}(B) \cap H^0_{(R)}(B) = 0$$

d'après (3.6.18), d'où l'assertion.

Remarque 3.6.19 : Pour $\nu > \delta$, on a $B_\nu \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(\nu))$ et la structure de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-module de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(\nu))$ montre que $\mathcal{A}B_\nu = 0$. Par suite, $B_{>\delta} \subset (0 : \mathcal{A})_B$. Cependant, il n'y a pas égalité en général, ainsi que le montre l'exemple suivant :

$$\ell = \mathbf{Z}[U, V] \qquad (U, V \quad \text{indéterminées})$$

$$B = \mathbf{Z}[U, V, X, Y]/(UX^2, VY^3) \qquad (\deg(X) = \deg(Y) = 1)\ .$$

Dans ce cas on a $\mathcal{A} = (UV), \delta = 3$, et $\mathcal{A}\bar{X}^2 = \mathcal{A}\bar{Y}^3 = 0$, donc $H^0_{\mathcal{A}}(B)_\nu \neq 0$ pour $\nu = 2, 3$.

Utilisant l'autodualité du complexe Kosz $(f_1, f_2, \cdots, f_n; C)$, l'assertion (iii) se prouve sur le modèle de ([J4] 2.7.11), où seule est utilisée l'acyclicité du complexe de Koszul. Montrons (iv). L'acyclicité de Kosz $(\underline{f}; C)$ montre que le ℓ-module B_ν admet une résolution libre finie, donc donne lieu à une suite spectrale de bidualité

$$\mathrm{Ext}^p_\ell\ (\mathrm{Ext}^{-q}_\ell(B_\nu, \ell), \ell) \Longrightarrow E^{p+q}$$

avec $E^0 = B_\nu$ et $E^s = 0$ pour $s \neq 0$, et dont la "transgression" $E^0 \to E^{00}_2$ est le morphisme canonique $B_\nu \to B_\nu^{\vee\vee}$. D'après (iii), l'hypothèse signifie que $\mathrm{Ext}^p_\ell(B_\nu, \ell) = 0$ si $p \neq 0$, d'où $E^{pq}_2 = 0$ si $q \neq 0$; la première partie de l'assertion en résulte aussitôt. Une fois identifiés ℓ et $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$ au moyen de $\hat{\tau}_\delta$, le morphisme de bidualité $B_\nu \to B_\nu^{\vee\vee}$ s'identifie au morphisme de ℓ-modules

$$\begin{aligned} \lambda : &B_\nu \to \mathrm{Hom}_\ell(\mathrm{Hom}_\ell(B_\nu, (H^0_{\mathfrak{M}}B)_\delta), H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta)\ . \\ &b \mapsto [u \mapsto u(b)] \end{aligned}$$

Par ailleurs, notant α, β les morphismes de ℓ-modules canoniques

$$\begin{aligned} \alpha : H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} &\to \mathrm{Hom}_\ell(B_\nu, (H^0_{\mathfrak{M}}B)_\delta) \\ x &\mapsto [y \mapsto xy] \\ \beta : B_\nu &\to \mathrm{Hom}_\ell(H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}, (H^0_{\mathfrak{M}}B)_\delta), \\ x &\mapsto [y \mapsto xy] \end{aligned}$$

nous allons vérifier l'égalité

$$\beta = \mathrm{Hom}_\ell(\alpha, id_{H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta}) \circ \lambda\ . \tag{3.6.20}$$

De toutes manières, l'application α est bijective (1.5.1) et nous venons de voir que, sous les hypothèses de (iv), il en est de même pour λ. D'où la bijectivité de β dans ce cas, comme annoncé. Vérifions (3.6.20). Pour tout $b \in B_\nu$ et tout $x \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}$, la valeur en x de $\mathrm{Hom}_\ell(\alpha, id_{H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta}) \circ \lambda(b)$ est, par définition, $\lambda(b)[\alpha(x)]$, autrement dit l'évaluation en b de $\alpha(x) : y \mapsto xy$, soit $bx := \beta(b)(x)$, d'où l'assertion. Montrons (v). Plus précisément, nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B) &\to B \\ u &\mapsto u(R) \end{aligned}$$

est injective. En effet, soit $u \in \operatorname{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B)$ telle que $u(R) = 0$. La B-linéarité de u et le fait que $R \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ impliquent pour tout $x \in H^0_{\mathfrak{M}}B$ les égalités

$$Ru(x) = u(Rx) = xu(R) = 0 ,$$

donc $u(x) \in H^0_{\mathfrak{M}}(B) \cap H^0_{(R)}(B) = 0$ (3.6.18). Par suite, $u = 0$, comme annoncé. Soient maintenant $u, v \in \operatorname{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B)$ et montrons que $u \circ v = v \circ u$. On a déjà constaté que

$$\begin{aligned} Ru(x) &= u(R)x \quad (x \in H^0_{\mathfrak{M}}B) \\ Rv(x) &= v(R)x \quad (x \in H^0_{\mathfrak{M}}B). \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $x \in H^0_{\mathfrak{M}}B$ la suite d'égalités

$$\begin{aligned} R^2(u \circ v)(x) &= R \times [Ru(v(x))] \\ &= Ru(R).v(x) \\ &= u(R)[Rv(x)] \\ &= u(R)v(R)x \end{aligned}$$

d'où aussitôt, par commutativité de B,

$$R^2(u \circ v)(x) = u(R)v(R)x = v(R)u(R)x = R^2(v \circ u)(x) .$$

Comme R ne divise pas zéro dans $H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ (3.6.18), on en conclut bien que $(u \circ v)(x) = (v \circ u)(x)$, d'où l'assertion. Montrons (vi). L'assertion sur les graduations résulte aussitôt de ce que $H^0_{\mathfrak{M}}(B) = \bigoplus_{0 \le \nu \le \delta} H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu$. L'entier ν étant comme dans les hypothèses de (vi), soit $u \in \operatorname{Hom}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B, H^0_{\mathfrak{M}}B)_\nu$. Les égalités

$$Ru(x) = u(R)x \quad (x \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)) , \tag{3.6.21}$$

où $u(R) \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu$, montrent que la multiplication par $u(R)$:

$$H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$$

est divisible par R dans $\operatorname{Hom}_\ell(H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}, H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta)$. D'après (iv), l'hypothèse faite implique que l'application ℓ-linéaire

$$\begin{aligned} \beta : B_\nu &\to \operatorname{Hom}_\ell(H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}, H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta) \\ x &\mapsto [y \mapsto xy] \end{aligned}$$

est bijective. On en déduit l'existence d'un élément b de B_ν tel que $u(R) = Rb$. Comparant avec (3.6.21), cela fournit l'égalité

$$R(u(x) - bx) = 0 \quad (x \in H^0_{\mathfrak{M}}B) ,$$

d'où $u(x) = bx$ $(x \in H^0_{\mathfrak{M}}B)$, puisque R ne divise pas zéro dans $H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ (3.6.18). Compte tenu de (3.6.16), le reste de l'assertion est immédiat.

3.6.22. Afin de tirer quelques corollaires de (3.6.17), nous allons d'abord rappeler, en les généralisant, quelques résultats de [J3].

Supposons donnés, comme au début de (1.1), un anneau commutatif ℓ, deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ d'entiers ≥ 1, et considérons la situation générique correspondante

$$A := \ell[U_{i\alpha} | i \in [n], \deg_a(X^\alpha) = d_i] ,$$
$$F_i := \sum_{\deg_a(X^\alpha) = d_i} U_{i\alpha} X^\alpha \in A[X_1, \cdots, X_n]_{d_i} .$$

Posant $\underline{U} := (U_{i\alpha} | i \in [n], \deg_a(X^\alpha) = d_i)$, toute forme d'inertie (par rapport à $\mathfrak{M}$), soit $a(\underline{U}) \in A[\underline{X}]$, pour la suite de polynômes génériques $(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ sera dite *générique.* Si maintenant $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une suite de polynômes de $\ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ de la forme

$$f_i = \sum_{\deg_a(X^\alpha) = d_i} u_{i\alpha} X^\alpha \in \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]_{d_i} ,$$

toute forme d'inertie générique $a(\underline{U})$ fournit par spécialisation $U_{i\alpha} \mapsto u_{i\alpha}$ une forme d'inertie (par rapport à $\mathfrak{M}$), soit $a(\underline{u}) \in \ell[\underline{X}]$, pour $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \subset \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$. En outre, pour tout (j, β) avec $j \in [n]$ et $\deg_a(X^\beta) = d_j$, on peut donner un sens aux dérivées partielles $\frac{\partial a}{\partial U_{j\beta}}(\underline{u}) \in \ell[\underline{X}]$.

Rappelons aussi qu'un entier $d \geq 1$ est dit *très ample* pour la suite $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ ([J3] 6.4.4) si, pour tout entier $h \geq 0$, il existe un entier $s \geq 0$ tel que

$$\Gamma_{hd} + s\Gamma_d \subset (s + h)\Gamma_d ,$$

où, pour tout entier $t \geq 0$, on a posé

$$\Gamma_t := \{\alpha \in \mathbf{N}^n | \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i = t\}$$

et, ici,

$$q\Gamma := \Gamma + \Gamma + \cdots + \Gamma \qquad (q \text{ fois }) \text{ pour } q \in \mathbf{N} .$$

Proposition 3.6.23.— *Dans la situation préliminaire de (1.1) :* $f_i = \sum_{\deg_a(X^\alpha) = d_i} u_{i\alpha} X^\alpha \in \ell[X_1, \cdots, X_n]_{d_i}$, *soit* $a \in A$ *une forme d'inertie générique de degré* 0 *(par rapport à* $X_1, X_2, \cdots, X_n$*). On suppose en outre donné un couple* (j, β) $(j \in [n], \deg_a(X^\beta) = d_j)$ *tel que*

a) $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ *divise* d_j,

b) $(\partial a / \partial U_{j\beta})(\underline{u})$ *soit inversible dans* ℓ.

Sous ces hypothèses, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) *Posant* $X :=$ Proj (B), *la projection canonique* $X \to$ spec (ℓ) *est un isomorphisme lorsque*

- ou bien $\beta_i > 0$ *pour tout* $i \in [n]$,

- ou bien l'entier d_j *est très ample pour* $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$. *En particulier* $H^i_{\mathfrak{M}}(B) = 0$ *pour tout* $i \geq 2$ *dans chacun de ces cas.*

(ii) *On a* $H^1_{\mathfrak{M}}(B)_\nu = 0$ *lorsque*

- ou bien $\beta_i > 0 \quad \forall i \in [n]$, *et* $\nu \geq 0$.

- ou bien l'entier d_j *est très ample pour* $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ *et* $\nu \in \sum_{\{i|\beta_i>0\}} \mathbf{N}m_i$.

(iii) *Supposons la suite* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *régulière. Alors l'une quelconque des conditions de (ii) implique que le* ℓ*-module* $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu$ *est stablement libre de type fini.*

Preuve : Se démontre comme les assertions génériques correspondantes ([J3] 6.4.5 à 6.4.8).

Corollaire 3.6.24.— *Sous les hypothèses préliminaires de (1.1), supposons que* $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *soit une suite régulière de* $\ell[X_1, \cdots, X_n]$. *Supposons en outre donnés une forme d'inertie générique de degré 0, soit* $a(\underline{U}) \in A$, *et un couple* $(j, \beta)(j \in [n], \deg_a(X^\beta) = d_j)$, *ces données étant assujetties aux conditions suivantes.*

1) $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ *divise* d_j,

2) on a :

- ou bien $\beta_i > 0$ *pour tout* $i \in [n]$

- ou bien l'entier d_j *est très ample pour* $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ *et* $\inf_{\{i|\beta_i>0\}}(m_i) = 1$

3) $(\partial a/\partial U_{j\beta})(\underline{u})$ *est inversible dans* ℓ.

Dans ces conditions, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) *Les* ℓ*-modules* $H^0_{\mathfrak{M}}B$ *et* $B_{\leq\delta}$ *sont stablement libres de type fini, et, pour tout* $0 \leq \nu \leq \delta$, *l'accouplement*

$$B_\nu \otimes_\ell H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \underset{\sim}{\xrightarrow{\hat{\tau}_\delta^{-1}}} \ell$$
$$x \otimes y \mapsto xy$$

est une dualité parfaite.

(ii) *Le morphisme de* ℓ*-algèbres canonique* $h : B \to$ $\mathrm{End}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B)$ *(cf. 3.6.17) est surjectif, ainsi que* $\theta^{gr}_{B/\ell} : ann_{B\otimes_\ell B}(I_{B/\ell}) \to \mathrm{Hom}^{gr}_B(D^{gr}_\ell(B), B)$.

(iii) Les applications B-linéaires

$$\begin{aligned} \lambda : B &\to ann_{B\otimes_\ell B}(I_{B/\ell}) \\ 1 &\mapsto \nabla(\underline{f};\underline{X}) \\ \text{et } \mu : B &\to \mathrm{Hom}_B^{gr}(D_\ell^{gr}(B),B) \\ 1 &\mapsto \theta_{B/\ell}^{gr}(\nabla(\underline{f};\underline{X})) \end{aligned}$$

sont telles que Ker $(\lambda) =$ Ker $(\mu) =$ Ker $(h) = H^0_{\mathcal{A}}(B) = B_{>\delta}$ *[voir 3.6.17 (ii) pour d'autres expressions].*

Preuve: D'après (3.6.23), les hypothèses faites impliquent que $H^i_{\mathfrak{M}}(B) = 0$ lorsque $i \geq 1$, et que le ℓ-module $H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ est stablement libre de type fini. Par comparaison avec (3.6.17 (iv)), on en déduit que, pour tout $0 \leq \nu \leq \delta$, le ℓ-module B_ν est réflexif, de dual le ℓ-module localement libre $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}$, d'où aussitôt (i). De même, la première partie de (ii) résulte de (3.6.17 (vi)). La conjonction de (3.4.3) et (3.6.14 (i)) permet d'identifier $\mathrm{Hom}_B^{gr}(D_\ell^{gr}(B),B)$ à $\mathrm{Hom}_B(D_\ell^{gr}(B),H^0_{\mathfrak{M}}B)$; modulo cette identification, l'isomorphisme de B-modules $\hat{\tau} = \theta : D_\ell^{gr}(B) \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathfrak{M}}B$ (3.6.14 (ii)) fournit un isomorphisme

$$\omega = \text{“}\mathrm{Hom}_B(\hat{\tau}, id)'' : \mathrm{Hom}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B, H^0_{\mathfrak{M}}B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B^{gr}(D_\ell^{gr}(B),B)$$

rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\lambda} & ann_{B\otimes_\ell B}(I_{B/\ell}) & \xrightarrow{\theta^{gr}_{B/\ell}} & \mathrm{Hom}_B^{gr}(D_\ell^{gr}(B),B) \\ \| & & & & \omega\uparrow\wr \\ B & & \xrightarrow{h} & & \mathrm{Hom}_B(H^0_{\mathfrak{M}}B, H^0_{\mathfrak{M}}B) \end{array}$$

commutatif : on a les égalités

$$(3.6.25) \qquad \omega \circ h = \mu = \theta^{gr}_{B/\ell} \circ \lambda\ .$$

La comparaison des membres extrêmes de (3.6.25) et la surjectivité de h impliquent celle de $\theta^{gr}_{B/\ell}$, d'où (ii). Montrons (iii). Comme $B_{\leq\delta}$ est un ℓ-module stablement libre par (i) et $H^0_{\mathcal{A}}(\ell) = 0$ (3.6.17 (i)), on voit tout d'abord que $H^0_{\mathcal{A}}(B) = B_{>\delta}$. De (3.4.1) résulte que $B_{>\delta}\nabla(\underline{f};\underline{X}) = 0$ dans le B-module $ann_{B\otimes_\ell B}(I_{B/\ell})$, donc que $H^0_{\mathcal{A}}(B) = B_{>\delta} \subset$ Ker (λ). Par ailleurs, il résulte immédiatement de (3.6.25) que Ker $(\lambda) \subset$ Ker $(\mu) =$ Ker $(h) = H^0_{\mathcal{A}}(B)$, la dernière égalité provenant de (3.6.17 (ii)). La comparaison des inclusions ainsi obtenues entraîne aussitôt (iii).

Remarque 3.6.26 : Sans supposer la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ régulière, on peut considérer les flèches $\lambda : B \to ann_{B\otimes_\ell B}(I_{B/\ell})$ $(1 \mapsto \nabla(\underline{f};\underline{X}))$ et $\mu := \theta^{gr}_{B/\ell} \circ \lambda$. Au moins lorsque l'anneau ℓ est noethérien, elles sont compatibles avec la localisation de Zariski, et ce sont des isomorphismes en dehors de $V(\mathcal{A})$. En effet on sait (lemme d'inertie) que, en dehors de $V(\mathcal{A})$, la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière, que $B = H^0_{\mathfrak{M}}B$ et que B est un ℓ-module localement libre. En dehors de $V(\mathcal{A})$, la bijectivité de h, donc de μ, est immédiate $(B = H^0_{\mathfrak{M}}B)$, et celle de λ résulte, par exemple, de ([J6] 3.12.6.42).

4. Autour des formules de Macaulay

4.1 Commençons par quelques rappels et généralités sur les équations linéaires diophantiennes, qui nous serviront dans la suite (4.2.9).

Soient n un entier ≥ 1 et $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ une suite indexée par $[n]$ d'entiers ≥ 1. Avec ces notations, on a la proposition suivante.

Proposition 4.1.1.— *(Brauer)*

Tout $\nu \in \mathbf{Z}m_1 + \mathbf{Z}m_2 + \cdots + \mathbf{Z}m_n$ (i.e. divisible par pgcd $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$) peut s'écrire sous la forme

$$\nu = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n \qquad (\alpha_i \in \mathbf{Z})$$

avec, pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$(*) \qquad 0 \leq \alpha_i m_i \leq ppcm(m_i, pgcd(m_{i+1}, m_{i+2}, \cdots, m_n)) - m_i.$$

En particulier, tout $\nu \in \mathbf{Z}$ qui est divisible par pgcd $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et tel que

$$(**) \qquad \nu \geq \sum_{i=1}^{n-1} [ppcm(m_i, pgcd(m_{i+1}, m_{i+2}, \cdots, m_n)) - m_i]$$

appartient au monoïde $\mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n \subset \mathbf{N}$.

Preuve : Posons, pour tout $i \in [n]$,

$$\xi_i = pgcd(m_i, m_{i+1}, \cdots, m_n) = pgcd(m_j | j \geq i)$$

et, par convention,

$$\xi_{n+1} = pgcd(\emptyset) = 1.$$

Alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'égalité

$$(4.1.2) \qquad ppcm(m_i, pgcd(m_{i+1}, \cdots, m_n)) pgcd(m_i, pgcd(m_{i+1}, \cdots, m_n))$$

$$= m_i pgcd(m_{i+1}, \cdots m_n)$$

permet de reformuler $(*)$ et $(**)$ respectivement sous la forme

$$(*)' \qquad 0 \leq \alpha_i \leq \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i} - 1 \qquad (i \in [n-1])$$

$$(**)' \qquad \nu \geq \sum_{i=1}^{n} [ppcm(m_i, \xi_{i+1}) - m_i].$$

Nous allons montrer qu'on peut réaliser $(*)$ par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, le cas $n = 1$ étant immédiat. Comme ν est divisible par $pgcd(m_1, m_2, \cdots, m_n) = pgcd(m_1, \xi_2)$, on peut écrire ν sous la forme

$$\nu = \alpha m_1 + \beta \xi_2 \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{Z}).$$

L'égalité (4.1.2) dans $\mathbf{N}$:

$$ppcm(m_1, \xi_2) = \frac{m_1 \xi_2}{\xi_1}$$

permet, pour tout $x \in \mathbf{Z}$, d'écrire

$$(4.1.3) \qquad \nu = (\alpha + x\frac{\xi_2}{\xi_1})m_1 + (\beta - x\frac{ppcm(m_1, \xi_2)}{\xi_2})\xi_2$$

Par division euclidienne de α par ξ_2/ξ_1, on peut choisir x tel que

$$0 \leq \alpha + x\frac{\xi_2}{\xi_1} \leq \frac{\xi_2}{\xi_1} - 1.$$

Posant alors $\alpha_1 := \alpha + x(\xi_2/\xi_1)$, l'égalité (4.1.3) prend la forme

$$\nu = \alpha_1 m_1 + \nu_1,$$

avec $0 \leq \alpha_1 m_1 \leq ppcm(m_1, \xi_2) - m_1$ et $\nu_1 \in \mathbf{Z}m_2 + \cdots + \mathbf{Z}m_n$. L'hypothèse de récurrence appliquée à ν_1 et aux $n-1$ entiers $(m_2, m_3, \cdots, m_n)$ permet aussitôt de conclure. On observera d'ailleurs que cette démonstration fournit sans peine un algorithme de décomposition de ν sous la forme $(*)$. Une fois prouvé $(*)$, la deuxième partie de l'assertion est immédiate, puisqu'alors

$$\alpha_n m_n = \nu - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i m_i) \geq 0$$

par hypothèse.

4.1.4 Le cas $n = 2$, d'abord considéré par Frobenius, est particulièrement intéressant. En effet, dans ce cas, $ppcm(m_1, m_2)$ est le plus petit entier N divisible par $pgcd(m_1, m_2)$ tel que, pour $\nu \in \mathbf{Z}m_1 + \mathbf{Z}m_2$, l'inégalité $\nu > N$ permette d'écrire

$$(4.1.5) \qquad \nu = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2, \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 1.$$

Montrons-le. On peut supposer : $pgcd(m_1, m_2) = 1$. Si $\nu \in \mathbf{Z}m_1 + \mathbf{Z}m_2$ est tel que $\nu > m_1m_2$, il résulte de (4.1.1) appliqué à l'inégalité $\nu - m_1 > m_1m_2 - m_1$ que l'on peut écrire

$$\nu - m_1 = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2,$$

avec $0 \leq \beta_1 m_1 \leq m_1m_2 - m_1$ et $\beta_2 \in \mathbf{Z}$. D'où

$$\beta_2 m_2 \geq \nu - m_1 - (m_1m_2 - m_1) = \nu - m_1m_2 > 0,$$

qui montre que $\beta_2 \geq 1$. D'où, posant $\alpha_1 := \beta_1 + 1, \alpha_2 := \beta_2$ une décomposition (4.1.5). On aura terminé si on prouve qu'on ne peut avoir d'égalité

$$m_1m_2 = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \quad \text{avec} \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 1.$$

En effet, comme m_2 est premier à m_1, on en déduirait que m_2 divise $m_2 - \alpha_1 < m_2 \ldots$.

4.2 Dans cette partie, on se donne un entier $n \geq 1$, deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ d'entiers ≥ 1, et on suppose que

(4.2.1) $$m_i \quad \text{divise} \quad d_i \qquad (i \in [n]).$$

Etant donné un anneau commutatif $\ell \neq 0$ et des indéterminées $X_1, X_2, \cdots, X_n$, on gradue la ℓ-algèbre $C := \ell[X_1, X_2, \cdots, X_n]$ en posant $\deg_a(X_i) = m_i \quad (i \in [n])$.

Un monôme $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_i \geq 0)$ est dit $\underline{d} - repu$ (ou simplement *repu* si aucune confusion n'est possible) si l'un des entiers α_i est supérieur ou égal à d_i/m_i. Dans ce cas, on appelle $\underline{d}-$ index de X^α (ou simplement index de X^α) l'entier noté

$$\underline{d} - \text{index}(X^\alpha) \text{ ou } i(\alpha) = \inf \{i \in [n] | \alpha_i \geq \frac{d_i}{m_i}\}.$$

Un monôme X^α est dit $\underline{d} - dodu$ (ou simplement *dodu*) s'il existe deux entiers $i \in [n]$ au moins tel que $\alpha_i \geq d_i/m_i$.

Dans C, la suite $(X_1^{d_1/m_1}, X_2^{d_2/m_2}, \cdots, X_n^{d_n/m_n})$ est une suite régulière de polynômes homogènes, avec $\deg_a(X_i^{d_i/m_i}) = d_i$ $(i \in [n])$.

Proposition 4.2.2.— *Soit $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ une suite régulière de C, avec $f_i \in C_{d_i} (i \in [n])$. On pose*

$$B := C/(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

et, comme d'habitude, $\mathfrak{M} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et $\delta = d_1 + \cdots + d_n - (m_1 + \cdots + m_n)$.

1) Soit $\nu \in \mathbf{Z}$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu = 0$.

(ii) $B^\vee_\nu = 0$ *(dual comme ℓ-module).*

(iii) L'entier ν ne peut-être décomposé sous la forme

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i \qquad (\alpha_i \in \mathbf{Z})$$

avec $0 \leq \alpha_i \leq \frac{d_i}{m_i} - 1$ pour tout $i \in [n]$ (autrement dit, avec la terminologie précédente, tout monôme $X^\alpha (\alpha \in \mathbf{N}^n)$ avec $\deg_a(X^\alpha) = \nu$ est $\underline{d}$ - repu).

Un tel entier ν sera appelé exempt d'inertie (pour la situation envisagée).

2) Soit $\nu \in \mathbf{Z}$. Si $\nu < 0$ ou $\nu > \delta$, alors ν est exempt d'inertie. Pour que $\nu \in \mathbf{Z}$ soit exempt d'inertie, il faut et il suffit que $\delta - \nu$ soit exempt d'inertie.

3) Si l'élément unité appartient à $\mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$, un entier $\nu \in \mathbf{Z}$ est exempt d'inertie si et seulement si $B_\nu = 0$.

Preuve : Posons

$$D := \ell[X_1, \cdots, X_n]/(X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n})$$

de sorte que, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$, le ℓ - module D_ν est libre de base les X^α non $\underline{d}$ - repus et tel que $\deg_a(X^\alpha) = \nu$. Un calcul direct de séries de Poincaré ou, si l'on préfère, l'isomorphisme (1.5.1)

$$\hat{\tau}_\nu : \check{D}_{\delta-\nu} \tilde{\to} H^0_{\mathfrak{M}}(D)_\nu = D_\nu$$

montre que, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$,

$$\dim_\ell(D_\nu) = \dim_\ell(D_{\delta-\nu}). \tag{4.2.3}$$

Par ailleurs, l'acyclicité des complexes de Koszul

$$K^\bullet := \text{Kosz}\ (f_1, \cdots, f_n; C) \text{ et } L^\bullet := \text{Kosz}\ (X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}; C)$$

montre que, pour tout $\nu \in \mathbf{Z}$, on a l'égalité entre caractéristiques d'Euler - Poincaré

$$\chi(K^\bullet_\nu) = \chi(L^\bullet_\nu) = \dim_\ell(D_\nu) \tag{4.2.4}$$

Nous allons montrer simultanément 1) et la deuxième partie de 2). Soit $\nu \in \mathbf{Z}$. Comme le $\ell-$ module B_ν est de type fini, on a $B^\vee_\nu = 0$ si et seulement si $\text{ann}_\ell(B_\nu)$ ne divise pas zéro dans ℓ [Stokes : Some dual homological results for modules over a commutative ring, J. of pure and applied algebra 65 (1990), th. 2.1]. Comme B_ν admet une résolution finie par des $\ell-$ modules libres de type fini, un théorème de Vasconcelos (par exemple [J6] 3.12.3.21) montre que $\text{ann}_\ell(B_\nu)$ ne divise pas zéro dans ℓ si et seulement si $\chi(K^\bullet_\nu) = 0$.

Utilisant (4.2.4), on en déduit l'équivalence de (ii) et (iii) dans 1). La condition (iii) pour ν étant la même que pour $\delta - \nu$ (4.2.3), on voit aussi que (ii) et (iii) équivalent à : $B^{\vee}_{\delta-\nu} = 0$, qui n'est autre que (i), compte tenu de l'isomorphisme (1.5.1) $\hat{\tau}_\nu$: $B^{\vee}_{\delta-\nu} \tilde{\to} H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu$. D'où 1) et, compte tenu de (4.2.3), la deuxième partie de 2). Par ailleurs, il est clair que $\dim_\ell D_\nu = \dim_\ell D_{\delta-\nu} = 0$ ($\nu < 0$), d'où le reste de 2). Enfin, lorsque $\mathcal{A} = \ell$, l'égalité $B = H^0_{\mathfrak{M}}(B)$ implique aussitôt 3).

4.2.5 Dans la situation préliminaire de (4.2), notons, pour tout $\nu \in \mathbf{N}$ par

$$^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu)\ (\text{resp. } \mathrm{Rep}(\underline{d}\ ;\ \nu),\ \text{resp. } \mathrm{Dod}(\underline{d}\ ;\ \nu))$$

l'ensemble des monômes $X^\alpha (\alpha \in \mathbf{N}^n)$ tel que $\deg_a(X^\alpha) = \nu$ et par ailleurs arbitraires (resp. $\underline{d}-$repus, resp. $\underline{d}-$dodus).

Soient maintenant $f_i \in \ell[X_1, \cdots, X_n]_{d_i}$ ($i \in [n]$) des polynômes. On définit des matrices carrées notées

$$\begin{array}{lll} \mathbf{D}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu) & : & \mathrm{Rep}\ (\underline{d}\ ;\ \nu) \times \mathrm{Rep}(\underline{d}\ ;\ \nu) \ \to \ell \\ \mathbf{\Delta}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu) & : & \mathrm{Dod}\ (\underline{d}\ ;\ \nu) \times \mathrm{Dod}(\underline{d}\ ;\ \nu) \ \to \ell \end{array}$$

(ou, plus simplement, $\mathbf{D}(\underline{f}\ ;\ \nu)$ et $\mathbf{\Delta}(\underline{f}\ ;\ \nu)$) comme suit.

Pour X^α et $X^\beta \in$ Rep $(\underline{d}\ ;\ \nu)$ (resp Dod$(\underline{d}\ ;\ \nu)$), la valeur de $\mathbf{D}(\underline{f}\ ;\ \nu)$ (resp $\mathbf{\Delta}(\underline{d}\ ;\ \nu)$) en (X^α, X^β) est le coefficient de X^β dans le polynôme

$$X^\alpha / X_{i(\alpha)}^{d_{i(\alpha)}/m_{i(\alpha)}} \cdot f_{i(\alpha)},$$

où l'on pose $i(\alpha) := \underline{d} - \mathrm{index}(X^\alpha)$ pour simplifier.

On pose également

$$\begin{array}{lll} D\ (f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu) & = D(\underline{f}\ ;\ \nu) & := \ \text{dét}\ \mathbf{D}\ (f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu) \\ \Delta\ (f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu) & = \Delta(\underline{f}\ ;\ \nu) & := \ \text{dét}\ \mathbf{\Delta}\ (f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu) \end{array}$$

où, par convention, le déterminant de $\varphi \in \mathrm{Mat}_\phi(\ell)$ vaut 1.

Ces constructions sont surtout intéressantes lorsque *l'entier ν est exempt d'inertie*. Dans ce cas

$$\mathbf{D}\ (f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu)\ :\ {}^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu) \times {}^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu) \to \ell,$$

et on a, posant $B := \ell[X_1, \cdots, X_n]/(f_1, f_2, \cdots, f_n)$,

$$D(\underline{f}\ ;\ \nu) \cdot B_\nu = 0 \text{ dans } B_\nu\ . \qquad (4.2.6)$$

C'est clair lorsque $\nu \notin \mathbf{N}m_1+\cdots+\mathbf{N}m_n$, puisqu'alors $B_\nu = 0$. Si $\nu \in \mathbf{N}m_1+\cdots+\mathbf{N}m_n$, cela se voit comme suit. Notons $\mathbf{X}$ et M les matrices

$$\begin{array}{ccccc} & & {}^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu)\times\{*\} & \to & \ell[X_1,\cdots,X_n] \\ \mathbf{X} & : & (X^\alpha,\{*\}) & \mapsto & X^\alpha \\ M & : & (X^\alpha\ ;\ \{*\}) & \mapsto & (X^\alpha/X_{i(\alpha)}^{d_{i(\alpha)}/m_{i(\alpha)}})\cdot f_{i(\alpha)}, \end{array}$$

on a, par construction,

$$\mathbf{D}(\underline{f}\ ;\ \nu)\circ\mathbf{X} = M$$

d'où, par multiplication par la matrice adjointe $\mathbf{D}(\underline{f}\ ;\ \nu)^\sim$,

$$D(\underline{f}\ ;\ \nu)\cdot\mathbf{X} = \mathbf{D}(\underline{f}\ ;\ \nu)^\sim\circ M,$$

égalité qui montre que $D(\underline{f}\ ;\ \nu)X^\alpha \in (f_1,\cdots,f_n)$ pour tout $X^\alpha \in {}^a\mathrm{Mon}(n;\nu)$.

4.2.7 Sous les hypothèses préliminaires de (4.2), nous dirons qu'un entier ν est $\underline{d}$ - *efficace* (ou simplement *efficace* si aucune confusion n'est possible) lorsque ν *appartient à* $\mathbf{N}m_1+\mathbf{N}m_2+\cdots+\mathbf{N}m_n$ *et est exempt d'inertie.*

La condition : $\nu \in \mathbf{N}m_1+\cdots+\mathbf{N}m_n$ se traduit en disant que $C_\nu \neq 0$. Dans la situation générique sur un anneau commutatif k :

$$\ell = A\ :=\ k[U_{i\alpha}|i\in[n],\ \deg_a(X^\alpha)=d_i], f_i = \sum_\alpha U_{i\alpha}X^\alpha,\cdots,$$

cela équivaut, par le lemme de Nakayama gradué, à la condition $B_\nu \neq 0$. En situation *générique*, un entier ν est donc $\underline{d}$ - efficace si et seulement si

$$0 = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu \subset B_\nu \neq 0.$$

Si $\nu \in \mathbf{N}m_1+\cdots+\mathbf{N}m_n$, et $\delta-\nu \notin \mathbf{N}m_1+\cdots+\mathbf{N}m_n$, l'entier ν est $\underline{d}$ - efficace. L'exemple simple suivant montre que la réciproque n'est pas en général vraie.

4.2.8 L'exemple suivant, bien qu'élémentaire, est instructif, car il donne lieu à plusieurs phénomènes qui ne peuvent se produire dans le cas standard, auquel la suite du paragraphe 4 sera consacrée.

Prenons $n=2, m_1=2, m_2=3, d_1=4, d_2=9$, de sorte que $d_1/m_1=2, d_2/m_2=3$ et $\delta = 13-5 = 8$. Plaçons-nous dans la situation suivante (non standard) sur un anneau commutatif k :

$$\begin{aligned} &A = k[U,V] \\ &f_1 = UX_1^2, f_2 = VX_2^3 \\ &B = k[U,V,X_1,X_2]/(UX_1^2,VX_2^3)\ . \end{aligned}$$

Nous allons d'abord montrer que dans ce cas on a

$$H^0_{\mathfrak{M}}B = (UV)B.$$

En effet, il est tout d'abord clair que $UV \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 =: \mathcal{A}$, et nous allons vérifier que la k-algèbre

$$D := B/UVB = k[U,V,X_1,X_2]/(UV, UX_1^2, VX_1^3)$$

est telle que $H^0_{\mathfrak{M}}(D) = 0$. Pour cela, observons tout d'abord que, comme $\overline{UV} = 0$ dans D, tout élément y de D est la classe dans D d'un $P \in A[X_1, X_2]$ de la forme

$$P = Q(X_1, X_2) + UL(U, X_1, X_2) + VM(V, X_1, X_2),$$

avec $Q \in k[X_1, X_2], L \in k[U, X], M \in k[V, X]$. Lorsque $y \in H^0_{\mathfrak{M}}(D)$, il existe un entier $N \geq 0$ tel que

$$(a) \qquad X_1^N P \in (UV, UX_1^2, VX_2^3)$$

$$(b) \qquad X_2^N P \in (UV, UX_1^2, VX_2^3).$$

Par spécialisation $U \mapsto 0, V \mapsto 0$ dans (a) ou (b), on en conclut tout d'abord que $Q = 0$. Ensuite, la spécialisation $V \mapsto 0$ dans (b) (resp. $U \mapsto 0$ dans (a)) montre que X_1^2 divise L (resp. X_2^3 divise M) dans $k[U,V,X_1,X_2]$, donc $P \in (UV, UX_1^2, VX_2^3)$ comme annoncé.

Pour $0 \leq \nu \leq 8 = \delta$, cela permet de dresser le tableau de valeurs ci-dessous

	C_ν	B_ν	$H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\nu$
0	A	A	AUV
1	0	0	0
2	AX_1	$A\bar{X}_1$	$AUV\bar{X}_1$
3	AX_2	$A\bar{X}_2$	$AUV\bar{X}_2$
4	AX_1^2	$A/(U).\bar{X}_1^2$	0
5	AX_1X_2	$A\bar{X}_1\bar{X}_2$	$AUV\bar{X}_1\bar{X}_2$
6	$AX_1^3 \oplus AX_2^2$	$A/(U)\bar{X}_1^3 \oplus A\bar{X}_2^2$	$AUV\bar{X}_2^2$
7	$AX_1^2X_2$	$A/(U)(X_1^2X_2)^-$	0
8	$AX_1^4 \oplus AX_1X_2^2$	$A/(U)\bar{X}_1^4 \oplus A(X_1X_2^2)^-$	$AUV(X_1X_2^2)^-$

Il ressort en particulier de ce tableau que les entiers 1, 4, 7 sont exempts d'inertie et que seuls 4 et 7 sont efficaces. Le fait curieux est que à la fois 4 et $\delta - 4$ sont efficaces.

Les valeurs correspondantes pour $D(UX_1^2, VX_2^3\ ;\ \nu)$ sont 1 (pour $\nu = 1$) et U (pour $\nu = 4$ et 7). On observera qu'elles appartiennent bien à $ann_A(B_\nu)$ en conformité avec (4.2.6) *mais n'appartiennent pas à* $\mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$.

4.2.9 Supposons que, pour tout $i \in [n]$, l'entier $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ divise d_i (cas standard). Alors *tout entier* ν *divisible* par $pgcd(m_1, \cdots, m_n)$ *et vérifiant l'inégalité* $\nu > \delta$ appartient à $\mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$ d'après Brauer (4.1.1), donc *est efficace.*

Posons, pour tout $i \in [n], r_i := d_i/m_i$. Le fait que m_n divise tous les entiers $d_i = m_i r_i$ permet de définir par passage au quotient le morphisme de groupes

$$w \ : \ \mathbf{Z}/r_1\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/r_2\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}/r_{n-1}\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}.$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n-1}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i\right)^{-}$$

Soit $\nu \in \mathbf{Z}m_1 + \mathbf{Z}m_2 + \cdots + \mathbf{Z}m_n$, de sorte que $\bar{\nu} \in$ Im (w) dans $\mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}$. Identifiant la source de w aux suites $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{N}^{n-1}$ avec $0 \le \alpha_i \le \frac{d_i}{m_i} - 1$, on voit que $w^{-1}(\bar{\nu})$ est en correspondance biunivoque avec les suites $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ vérifiant

$$\text{(4.2.10)} \qquad \begin{cases} \nu = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n & (\alpha \in \mathbf{Z}^n) \\ 0 \le \alpha_i \le \dfrac{d_i}{m_i} - 1 & (i \in [n-1]). \end{cases}$$

Le nombre de telles suites est donc égal à

$$|w^{-1}(0)| = (r_1 r_2 \cdots r_{n-1})/|\text{Im } (w)| \ .$$

Or

$$\begin{aligned} |(m_1, \cdots, m_n)\mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}| &= |\mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z}|/|\mathbf{Z}/(m_1, \cdots, m_n)\mathbf{Z}| \\ &= m_n/pgcd(m_1, \cdots, m_n), \end{aligned}$$

d'où

$$|w^{-1}(0)| = (d_1 d_2 \cdots d_{n-1})/\chi$$

avec

$$\chi := (m_1 m_2 \cdots m_n)/pgcd(m_1, \cdots, m_n) \tag{2.3.1}$$

Par suite (2.3.1 et [J3] 6.3.5 (A)), pour $\nu \in \mathbf{Z}m_1 + \cdots + \mathbf{Z}m_n$, *le nombre de* $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ *satisfaisant aux relations* (4.2.10) *coïncide avec le degré de* ${}^a\text{Res}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ $(f_i$ génériques) *par rapport à l'ensemble des coefficients de* f_n.

Proposition 4.2.11.— *On suppose que, pour tout* $i \in [n]$, *l'entier* $m := ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ *divise* d_i *(cas standard), et on considère la situation générique sur un anneau commutatif* k *:*

$$\begin{aligned} &A = k[U_{i\alpha} | i \in [n], \ \deg_a(X^\alpha) = d_i], \\ &f_i = \sum_{\deg_a(X^\alpha) = d_i} U_{i\alpha} X^\alpha \in C = A[X_1, \cdots, X_n], \\ &B = C/(f_1, f_2, \cdots, f_n). \end{aligned}$$

Etant donné un entier $\nu \in \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$ *qui est efficace, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) On a $ann_A(B_\nu) = ({}^a\mathrm{Res}(f_1, f_2, \cdots, f_n)) \subset A$.

(ii) L'élément $D(f_1, f_2, \cdots, f_n; \nu)$ *de* A *(4.2.5) est non nul et divisible par* ${}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)$ *dans* A. *Par rapport à l'ensemble des coefficients de* f_n, *le polynôme* $D(f_1, f_2, \cdots, f_n; \nu)$ *est homogène de degré* $d_1 d_2 \cdots d_{n-1}/\chi = \deg/_{f_n} {}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)$.

(iii) Pour toute décomposition de ν *dans* $\mathbf{Z}$ *de la forme (4.2.10)*

$$\begin{cases} \nu = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n \\ 0 \leq \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1 \qquad (1 \leq i \leq n-1), \end{cases}$$

l'élément α_n *appartient à* $\mathbf{N}$: $\alpha_n \geq 0$.

(iv) On a : $\delta - \nu \notin \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$, *autrement dit* $\delta - \nu$ *n'est pas efficace.*

Preuve : Pour montrer (i), nous allons d'abord supposer k intègre. Dans ce cas, on sait ([J3] 6.3.6) que l'anneau $B/H^0_{\mathfrak{M}}B$ est intègre, donc que, pour tout $x \neq 0$ dans $B/H^0_{\mathfrak{M}}B$, on a $ann_A(x) = \mathcal{A} := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0$. Comme ν est efficace, on a (4.2.7)

$$0 \neq B_\nu = (B/H^0_{\mathfrak{M}}B)_\nu \subset B/H^0_{\mathfrak{M}}B,$$

d'où aussitôt (i) dans ce cas. En particulier, avec des notations standard, on a une suite exacte de ${}_{\mathbf{Z}}A$-modules

$$(4.2.12) \qquad \begin{array}{l} 0 \to {}_{\mathbf{Z}}A \overset{{}^a\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_n)}{\longrightarrow} {}_{\mathbf{Z}}A \overset{u}{\longrightarrow} {}_{\mathbf{Z}}B_\nu^{{}^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu)} \\ \qquad\qquad\qquad 1 \longmapsto (\bar{X}^\alpha |\ \deg_a(X^\alpha) = \nu) \end{array}$$

qui le demeure après tensorisation sur $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour tout nombre premier p. Comme ${}_{\mathbf{Z}}A$ et ${}_{\mathbf{Z}}B_\nu$ sont des groupes abéliens sans $\mathbf{Z}$-torsion, (si $0 \neq x \in_{\mathbf{Z}} B_\nu$, on a $\mathrm{ann}_{{}_{\mathbf{Z}}A}(x) = ({}^aRes(\underline{f}))$ par ce qui précède), on en déduit que, posant $Q :=$ Coker(u), le groupe abélien Q est sans $\mathbf{Z}$-torsion, donc plat. L'assertion (i) dans le cas général s'obtient alors par tensorisation de (4.2.12) par k sur $\mathbf{Z}$, compte tenu notamment de ce que, dans le cas standard, le résultant est invariant par changement d'anneau de base ([J3] 6.3.5 (A) (iii)). Montrons (ii). Tout d'abord, il résulte aussitôt des définitions que

$$D(X_1^{d_1/m_1}, X_2^{d_2/m_2}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu) = 1 \quad \text{dans} \quad k,$$

ce qui montre par spécialisation que $D(f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu)$ n'est pas nul. Comme $D(\underline{f}\ ;\ \nu) \in ann_A(B_\nu)$ par (4.2.6), il résulte de (i) que $D(\underline{f}\ ;\ \nu)$ est divisible par

${}^a\mathrm{Res}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Par construction, le degré d'homogénéité de $D(\underline{f}\ ;\ \nu)$ par rapport aux coefficients de f_n est le nombre de $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ tels que

$$\text{(4.2.13)} \qquad \begin{cases} \nu = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n \qquad (\alpha \in \mathbf{N}^n) \\ 0 \leq \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1 \qquad (1 \leq i \leq n-1)\ . \end{cases}$$

Notant L le nombre de solutions de (4.2.13) et M celui de (4.2.10), on a

$$L \leq M = (d_1 d_2 \cdots d_{n-1})/\chi,$$

l'égalité provenant de la fin du paragraphe (4.2.9). Par ailleurs, comme ${}^a\mathrm{Res}\ (f_1, \cdots, f_n)$ divise $D(\underline{f}\ ;\ \nu)$, on a

$$L \geq \ \deg/_{f_n}({}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)) = (d_1 d_2 \cdots d_{n-1})/\chi$$

d'où $L = M = (d_1 d_2 \cdots d_{n-1})/\chi = \ \deg/_{f_n}({}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n))$.

Ceci achève la preuve de (ii) et montre en même temps l'assertion (iii) : toute solution du système (4.2.10) est solution de (4.2.13). Montrons (iv). Comme $L \geq 1$, il y a au moins une solution de (4.2.13), soit $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$. Alors

$$\text{(4.2.14)} \qquad \delta - \nu = \sum_{i=1}^{n} (d_i/m_i - 1 - \alpha_i) m_i$$

et $0 \leq (d_i/m_i) - 1 - \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$. Si $\delta - \nu$ appartenait à $\mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$, il serait $\underline{d}$-efficace ; l'assertion (iii) appliquée à $\delta - \nu$ et à l'égalité (4.2.14) impliquerait alors que $\alpha_n \leq \frac{d_n}{m_n} - 1$, en contradiction avec le fait que le monôme $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}$ est $\underline{d}$-repu (4.2.2, 1 (iii)).

Corollaire 4.2.15.— *(Cas standard : ppcm$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ divise pgcd$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$).*

1) Soit $\nu \in \mathbf{Z}$ un entier divisible par pgcd$(m_1, m_2, \cdots, m_n)$. Pour que ν soit efficace pour la situation décrite par les deux suites d'entiers $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, il faut et il suffit que $\delta - \nu \notin \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$.

2) Soit $\nu \in \mathbf{Z}$ un entier efficace pour la situation décrite par les deux suites d'entiers $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Supposons en outre donnés une partie $J \neq [n]$ de $[n]$ et, pour tout $j \in J$, un entier α_j avec $0 \leq \alpha_j \leq (d_j/m_j) - 1$. Dans ces conditions, l'entier $\nu - \sum_{j \in J} \alpha_j m_j$ est exempt d'inertie pour la situation décrite par les suites d'entiers $(m_1, m_2, \cdots, m_n)_{\hat{J}}$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)_{\hat{J}}$, où la notation $\hat{J}$ signifie que l'on a oté les entrées dont la position j appartient à J.

De plus, pour que $\nu - \sum_{j\in J} \alpha_j m_j$ *soit efficace par rapport à cette même situation, il faut et il suffit que* $\nu - \sum_{j\in J} \alpha_j m_j$ *soit divisible par* $pgcd_{i\notin J}(m_i)$*. Autrement dit, les assertions suivantes sont équivalentes :*

$$(a) \qquad \nu - \sum_{j\in J} \alpha_j m_j \in \sum_{i\notin J} \mathbf{Z} m_i,$$

$$(b) \qquad \nu - \sum_{j\in J} \alpha_j m_j \in \sum_{i\notin J} \mathbf{N} m_i.$$

Preuve : Montrons 1). Si ν est efficace, il résulte de (4.2.11 (iv)) que $\delta - \nu \notin \sum_{i\geq 1} \mathbf{N} m_i$. Inversement, si $\delta - \nu \notin \sum_{i\geq 1} \mathbf{N} m_i$, l'entier $\delta - \nu$ est exempt d'inertie, et il en est de même pour ν d'après (4.2.2 ; 2). Il suffit pour conclure de montrer que $\nu \in \sum_{i\geq 1} \mathbf{N} m_i$, ce qui résulte aussitôt du lemme suivant.

Lemme 4.2.16.— *(Cas standard). Soit* $\nu \in \mathbf{Z}$ *un entier divisible par* $pgcd(m_1, m_2, \cdots, m_n)$*. Alors l'un des entiers* ν *ou* $\delta - \nu$ *appartient à* $\mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$*.*

Montrons le lemme. L'assertion est claire si $\nu \leq 0$ (4.2.9). Si le lemme n'était pas vrai, il existerait donc un entier ν divisible par $pgcd(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ tel que $\nu \notin \sum_{i\geq 1} \mathbf{N} m_i$ et $\delta - \nu \notin \sum_{i\geq 1} \mathbf{N} m_i$, et minimum pour ces propriétés. On ne saurait avoir $\nu - m_1 \in \sum_{i\geq 1} \mathbf{N} m_i$, et par suite le caractère minimal de ν implique l'existence d'entiers $\alpha_i \geq 0$ ($i \in [n]$) tels que

$$(4.2.17) \qquad \begin{aligned} \delta - (\nu - m_1) &= \delta - \nu + m_1 \\ &= \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n. \end{aligned}$$

Par division euclidienne, on peut supposer que $0 \leq \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1$ lorsque $i \geq 2$: si

$$\alpha_i = \frac{d_i}{m_i} q_i + r_i \qquad \text{(division euclidienne)},$$

on a

$$\left(\frac{d_i}{m_i} q_i\right) m_i = d_i q_i = \left(\frac{d_i}{m_1} q_i\right) m_1 \in \mathbf{N} m_1.$$

Comme $\delta - \nu \notin \sum_{i \geq 1} \mathbf{N} m_i$, on a nécessairement $\alpha_1 = 0$ dans (4.2.17), d'où finalement

$$\begin{cases} \delta - \nu + m_1 = \sum_{i \geq 2} \alpha_i m_i \\ \qquad 0 \leq \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1 \qquad (2 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \nu &= \delta - \sum_{i \geq 2} \alpha_i m_i + m_1 \\ &= \frac{d_1}{m_1} m_1 + \sum_{i \geq 2} \left(\frac{d_i}{m_i} - 1 - \alpha_i \right) m_i \in \sum_i \mathbf{N} m_i, \end{aligned}$$

en contradiction avec l'hypothèse $\nu \notin \sum_i \mathbf{N} m_i$.

Montrons 2). Par récurrence et changement éventuel d'indexation pour les suites $\underline{m}, \underline{d}$, on se ramène au cas où $J = [n-1]$. Soit donc $0 \leq \alpha_n \leq (d_n/m_n) - 1$. Il s'agit de montrer d'abord que, pour toute décomposition

$$\nu - \alpha_n m_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i m_i \qquad (\beta_i \in \mathbf{Z}),$$

l'un des β_i au moins n'appartient pas à l'intervalle $[0, d_i/m_i - 1]$. Cela résulte aussitôt de (4.2.2 ; 1 (iii)) appliqué à la décomposition

$$\nu = \beta_1 m_1 + \cdots + \beta_{n-1} m_{n-1} + \alpha_n m_n$$

de ν. Sous la seule hypothèse que ν est exempt d'inertie, on a ainsi montré que $\nu - \alpha_n m_n$ est exempt d'inertie pour la situation décrite par les deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$.

Il reste à montrer que si $\nu - \alpha_n m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Z} m_i$, alors $\nu - \alpha_n m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{N} m_i$.

Par division euclidienne comme dans la preuve de 1), on peut écrire $\nu - \alpha_n m_n$ sous la forme

$$\nu - \alpha_n m_n = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + \cdots + \beta_{n-1} m_{n-1}$$

avec $0 \leq \beta_i \leq d_i/m_i - 1$ lorsque $1 \leq i \leq n-2$. Par application de (4.2.11 (iii)) à la décomposition

$$\nu = \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + \cdots + \beta_{n-1} m_{n-1} + \alpha_n m_n$$

et aux suites $(m_1, \cdots, m_{n-2}, m_n, m_{n-1})$ et $(d_1, \cdots, d_{n-2}, d_n, d_{n-1})$, on voit que $\beta_{n-1} \geq 0$, d'où $\nu - \alpha_n m_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i m_i \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{N} m_i$ comme annoncé. Cela achève la démonstration.

4.3 La proposition suivante généralise au cas standard un certain nombre de théorèmes dus à Macaulay lorsque $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ (voir [J5] 3.9.4 et 3.9.5 pour des énoncés plus précis).

Proposition 4.3.1.— *(Cas générique standard)*

Soit ν un entier efficace pour la situation définie par les deux suites d'entiers $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$.

(i) Les éléments $D(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu)$ et $\Delta(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu)$ de $A = k[U_{i\alpha} | i \in [n],\ \deg_a(X^\alpha) = d_i]$ ne divisent pas zéro dans A et on a l'égalité

$$D(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu) = {}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)\Delta(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu)$$

dans A.

(ii) Soit Σ une partie de $\mathfrak{S}_n$ telle que l'application

$$\begin{aligned} \Sigma &\to [n] \\ \sigma &\mapsto \sigma(n) \end{aligned}$$

soit surjective. Lorsque spec (k) *est connexe, tout élément a de A qui divise tous les éléments $D(f_{\sigma(1)}, \cdots, f_{\sigma(n)}\ ;\ \nu)$ $(\sigma \in \Sigma)$ dans A est soit inversible dans A, soit multiple de ${}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)$ par un élément inversible de A. En particulier, dans un sens évident, lorsque* spec (k) *est connexe, l'élément ${}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n)$ de A est un plus grand commun diviseur des $D(\underline{f}_\sigma\ ;\ \nu)$ $(\sigma \in \Sigma)$.*

Preuve : Montrons (i). Que $D(\underline{f}_\sigma\ ;\ \nu)$ et $\Delta(\underline{f}_\sigma\ ;\ \nu)$ ne divisent pas zéro dans A est un phénomène général : par spécialisation $f_i \mapsto X_i^{d_i}$, on a

$$D(X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu) = \Delta(X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu) = 1,$$

et on peut appliquer le lemme de Dedekind - Mertens (cf. [J5] 3.9.3.5). D'après ce qui précède et (4.2.11 (ii)), on peut écrire de manière unique

$$D(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu) = H\ {}^a\mathrm{Res}(f_1, \cdots, f_n) \tag{4.3.2}$$

dans A, avec pour H un polynôme homogène par rapport à l'ensemble des coefficients de chacun des f_i, et *indépendant des coefficients de f_n*. Utilisons les notations

$$\begin{aligned} &\overline{f}_i = f_i(X_1, \cdots, X_{n-1}, 0) \qquad (i \in [n]) \\ &{}^a\rho = {}^a\mathrm{Res}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_{n-1}) \\ &m = ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n). \end{aligned}$$

Par spécialisation $f_n \mapsto X_n^{d_n/m_n}$, on déduit de (4.3.2) les égalités

$$\begin{aligned} D(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu) &= H\ {}^a\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{d_n/m_n}) \\ &= H\ {}^a\mathrm{Res}(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{m/m_n})^{d_n/m} \\ &= H({}^a\rho)^{\frac{d_n\, pgcd(m_1,\cdots,m_n)}{m_n\, pgcd(m_1,\cdots,m_{n-1})}}, \end{aligned}$$

où la deuxième ligne provient de la propriété de multiplicativité du résultant, et la troisième de ([J3] 6.3.9.2 et 6.3.9.3). Autrement dit, on a

$$D(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu) = H({}^a\rho)^{\frac{d_n}{ppcm(m_n,pgcd(m_1,\cdots,m_{n-1}))}} \tag{4.3.3}$$

Pour expliciter la matrice $\mathbf{D}(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu)$, nous utiliserons les notations suivantes

$$\begin{aligned} {}^a\mathrm{Mon}_\ell(n\ ;\ \nu) &= \{X^\alpha | \alpha\in\mathbf{N}^n,\ \deg_a(X^\alpha)=\nu \text{ et } \alpha_n=\ell\} \\ {}^a\mathrm{Mon}_{\geq\ell}(n\ ;\ \nu) &= \{X^\alpha | \alpha\in\mathbf{N}^n,\ \deg_a(X^\alpha)=\nu \text{ et } \alpha_n\geq\ell\} \end{aligned}$$

pour tout $\ell\in\mathbf{N}$, ainsi que

$$\begin{aligned} W_1 &= \{X^\alpha|\ \deg_a(X^\alpha)=\nu, i(\alpha)<n, \alpha_n\geq d_n/m_n\} \\ W_2 &= \{X^\alpha|\ \deg_a(X^\alpha)=\nu, i(\alpha)=n\} \end{aligned}$$

(ou, pour simplifier, on a posé $i(\alpha) := \underline{d}-\mathrm{index}(X^\alpha)$).

Avec ces notations, on a

$${}^a\mathrm{Mon}\ (n\ ;\ \nu) = {}^a\mathrm{Mon}_0(n\ ;\ \nu) \amalg\cdots\amalg {}^a\mathrm{Mon}_{(d_n/m_n)-1}(n\ ;\ \nu) \amalg W_1 \amalg W_2,$$

$${}^a\mathrm{Mon}_{\geq d_n/m_n}(n\ ;\ \nu) = W_1 \amalg W_2.$$

Pour $i(\alpha)<n$, la ligne de X^α dans la matrice $\mathbf{D}(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu)$ est formée des coefficients du polynôme

$$\left[X^\alpha/X_{i(\alpha)}^{d_{i(\alpha)}/m_{i(\alpha)}}\right] f_{i(\alpha)}$$

$$= \left(X^\alpha/X_{i(\alpha)}^{d_{i(\alpha)}/m_{i(\alpha)}}\right)\ \left[\overline{f}_{i(\alpha)}(X_1,\cdots,X_{n-1}) + \text{ termes en } X^\beta \text{ avec } \beta_n>0\right]$$

tandis que, pour $i(\alpha)=n$, elle est définie par

$$\left(X^\alpha/X_n^{d_n/m_n}\right)\cdot X_n^{d_n/m_n} = X^\alpha.$$

Par suite, la matrice $\mathbf{D}(f_1,\cdots,f_{n-1},X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu)$ est triangulaire supérieure par blocs de blocs carrés diagonaux

$$K_0, K_1, \cdots, K_\ell, \cdots, K_{(d_n/m_n)-1}, L_1, L_2$$

indexés respectivement par

$$^a\mathrm{Mon}_0\ (n\ ;\ \nu), {}^a\mathrm{Mon}_1\ (n\ ;\ \nu), \cdots, {}^a\mathrm{Mon}_{(d_n/m_n)-1}\ (n\ ;\ \nu), W_1, W_2.$$

Dans cette décomposition, on a $L_2 = \mathbf{1}_{W_2}$. Pour $0 \leq \ell \leq \frac{d_n}{m_n} - 1$, l'entier $\nu - \ell m_n$ est exempt d'inertie par rapport aux deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$ d'après (4.2.15 (2)) et supérieur ou égal à zéro (écrivant $\nu = \alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n$ avec $0 \leq \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1$ pour tout $i \in [n-1]$ et $\alpha_n \in \mathbf{N}$, on a nécessairement $\alpha_n \geq d_n/m_n$ par (4.2.2) (1, (iii)), d'où $\nu - \ell m_n \geq \nu - \alpha_n m_n \geq 0$). Par suite,

$$^a\mathrm{Mon}\ (n-1\ ;\ \nu - \ell m_n) = \ \mathrm{Rep}\ (d_1, \cdots, d_{n-1}\ ;\ \nu - \ell m_n)$$

pour l'ensemble des variables $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ affectées des poids $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})$. Cela étant, la bijection canonique

$$\begin{aligned} {}^a\mathrm{Mon}\ (n-1\ ;\ \nu - \ell m_n) &\xrightarrow{\sim} {}^a\mathrm{Mon}_\ell\ (n-1\ ;\ \nu) \\ X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} &\mapsto X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} X_n^\ell \end{aligned}$$

permet d'identifier les matrices K_ℓ et ${}^a\mathbf{D}(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1}\ ;\ \nu - \ell m_n)$ par transport de structure.

De ces considérations résulte l'égalité

$$(4.3.4)\quad D(f_1, \cdots, f_{n-1}, X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu) = \ \mathrm{dét}(L_1) \prod_{0 \leq \ell \leq \frac{d_n}{m_n} - 1} D(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1}\ ;\ \nu - \ell m_n),$$

avec, rappelons-le, la convention dét $(\varphi\ :\ \phi \times \phi \to A) = 1$.

Par construction, la matrice $\mathbf{\Delta}(f_1, \cdots, f_n\ ;\ \nu)$ ne dépend pas des coefficients de f_n, d'où

$$\mathbf{\Delta}(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu) = \mathbf{\Delta}(f_1, \cdots, f_{n-1},\ X_n^{d_n/m_n}\ ;\ \nu).$$

Posant $\mathrm{Dod}_\ell\ (\underline{d}\ ;\ \nu) := \{X^\alpha\ \in\ \mathrm{Dod}\ (\underline{d}\ ;\ \nu) \mid \alpha_n = \ell\}$ $(\ell \in \mathbf{N})$, la matrice $\mathbf{\Delta}(f_1, f_2, \cdots, f_n\ ;\ \nu)$ est donc la sous-matrice carrée de $\mathbf{D}(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}, X_n^{d_n/m_n};\ \nu)$ construite sur la partie

$$\mathrm{Dod}\ (\underline{d}\ ;\ \nu) = \mathrm{Dod}_0\ (\underline{d}\ ;\ \nu) \amalg \cdots \amalg \mathrm{Dod}_{d_n/m_n - 1}\ (\underline{d}\ ;\ \nu) \amalg W_1$$

de ${}^a\mathrm{Mon}\ (n\ ;\ \nu)$. Par rapport à cette partition ordonnée de son ensemble d'indices, elle est triangulaire supérieure par blocs de blocs carrés diagonaux

$$M_0, M_1, \cdots, M_{d_n/m_n - 1}, L_1$$

et, pour tout $0 \leq \ell \leq (d_n/m_n) - 1$, la bijection canonique

$$\begin{aligned} \mathrm{Dod}\ (d_1, \cdots, d_{n-1}\ ;\ \nu - \ell m_n) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Dod}_\ell\ (d_1, \cdots, d_n\ ;\ \nu) \\ X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} &\mapsto X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} X_n^\ell \end{aligned}$$

permet par transport de structure d'identifier M_ℓ et $\mathbf{\Delta}(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1} \; ; \; \nu - \ell m_n)$.

On en déduit, par passage aux déterminants, l'égalité

$$\Delta(f_1, \cdots, f_n \; ; \; \nu) = \text{dét}(L_1) \prod_{0 \leq \ell \leq \frac{d_n}{m_n} - 1} \Delta(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1} \; ; \; \nu - \ell m_n), \tag{4.3.5}$$

dans A.

Cela étant, nous allons prouver l'égalité de (i) par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, on a $f_1 = UX_1^{d_1/m_1}$, et le fait que ν soit efficace se traduit en disant que $\nu = \alpha m_1$ avec $\alpha \geq \frac{d_1}{m_1}$; alors ${}^a\text{Mon}\ (1 \; ; \; \nu) = \{X_1^\alpha\}, \mathbf{\Delta}(UX_1^{d_1/m_1} \; ; \; \nu) \in \ \text{Mat}_\phi(A)$ et $\mathbf{D}(UX_1^{d_1/m_1} \; ; \; \nu) = U\mathbf{1}_{\{X_1^\alpha\}}$, d'où aussitôt l'assertion :

$$D(UX_1^{d_1/m_1} \; ; \; \nu) = U = {}^a\text{Res}\ (UX_1^{d_1/m_1})\Delta(UX_1^{d_1/m_1} \; ; \; \nu).$$

Supposons donc l'égalité de (i) vraie pour $n - 1 \geq 1$ et montrons-la pour n. Soit $0 \leq \ell \leq (d_n/m_n) - 1$. Si $\nu - \ell m_n \notin \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{N} m_i$, alors

$$D(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1} \; ; \; \nu - \ell m_n) = \Delta(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1} \; ; \; \nu - \ell m_n) = 1 \ .$$

Si, par contre, $\nu - \ell m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{N} m_i$, alors l'entier $\nu - \ell m_n$ est efficace par rapport aux deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_{n-1})$, et l'hypothèse de récurrence implique que

$$D(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1} \; ; \; \nu - \ell m_n) = {}^a\rho\Delta(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_{n-1} \; ; \; \nu - \ell m_n) \text{ dans } A$$

La comparaison de (4.3.4) et (4.3.5) fournit donc l'égalité

$$D(f_1, \cdots, f_{n-1}, X_n^{d_n/m_n} \; ; \; \nu) = ({}^a\rho)^x \Delta(f_1, \cdots, f_n \; ; \; \nu) \tag{4.3.6}$$

avec

$$x = \sharp\{\ell | 0 \leq \ell \leq (d_n/m_n) - 1 \text{ et } \nu - \ell m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{N} m_i\}.$$

L'équivalence des assertions a) et b) de (4.2.15 ; 2) dans le cas où ν est efficace montre que l'on a aussi

$$x = \sharp\{\ell | 0 \leq \ell \leq (d_n/m_n) - 1 \text{ et } \nu - \ell m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Z} m_i\}. \tag{4.3.7}$$

Posons $r_n := (d_n/m_n)$. Comme $d_n \in \mathbf{Z}m_1 + \cdots + \mathbf{Z}m_{n-1}$, l'application

$$\begin{aligned} \pi \ : \ \mathbf{Z}/r_n\mathbf{Z} &\to \mathbf{Z}/(\mathbf{Z}m_1 + \cdots + \mathbf{Z}m_{n-1}) \\ \overline{z} &\mapsto (m_n z)^- \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes bien défini, et l'identification des éléments de $\{0, 1, \cdots, (d_n/m_n) - 1\}$ à leurs images dans $\mathbf{Z}/r_n\mathbf{Z}$ identifie $\{0 \leq \ell \leq (d_n/m_n) - 1 | \nu - \ell m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{Z}m_i\}$ à $\pi^{-1}(\overline{\nu})$. Or $\nu \in \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}m_i$, donc $\overline{\nu} \in \mathrm{Im}(\pi)$. Par suite, l'entier x est aussi le cardinal de $\pi^{-1}(0)$, soit

$$\begin{aligned} r_n/|\mathrm{Im}\ \pi| &= r_n/[pgcd(m_1, \cdots, m_{n-1})/pgcd(m_1, \cdots, m_n)] \\ &= \frac{d_n pgcd(m_1, \cdots, m_n)}{m_n pgcd(m_1, \cdots, m_{n-1})} = \frac{d_n}{ppcm(m_n, pgcd(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1}))} \ . \end{aligned}$$

Cela étant, la comparaison de (4.3.3) et (4.3.6) montre que

$$({}^a\rho)^x(H - \Delta(f_1, \cdots, f_n \ ; \ \nu)) = 0,$$

d'où l'assertion à montrer, puisque ${}^a\rho$ ne divise pas zéro dans A ([J3] 6.3.5 (A) (ii)). La partie (ii) est contenue dans l'énoncé suivant, analogue de ([J5] 3.9.5.1) et qui se démontre de même que (loc cit).

Proposition 4.3.8.— *(Cas générique standard).*

Supposons donnée une partie Σ de $\mathfrak{S}_n$ telle que l'application

$$\begin{aligned} \Sigma &\to [n] \\ \sigma &\mapsto \sigma(n) \end{aligned}$$

soit surjective. Etant donné un entier $\nu \in \mathbf{N}$, les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Les éléments $\Delta(\underline{f}_\sigma \ ; \ \nu)$ $(\nu \in \Sigma)$ de A sont premiers dans leur ensemble dans les sens équivalents suivants.

α) Tout élément a de A qui divise les $\Delta(\underline{f}_\sigma \ ; \ \nu)$ $(\sigma \in \Sigma)$ dans A est inversible dans A.

β) Le seul idéal monogène de A contenant l'idéal

$$I_\Sigma := \sum_{\sigma \in \Sigma} A\Delta(\underline{f}_\sigma \ ; \ \nu)$$

de A est A tout entier.

(ii) On a l'inégalité

$$\mathrm{prof}_{I_\Sigma}(A) \geq 2.$$

Autrement dit, notant u et v les applications A-linéaires

$$u : a \mapsto (a\Delta(\underline{f}_\sigma \ ; \ \nu))_{\sigma\in\Sigma}$$

$$v : (a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \mapsto (a_{\sigma_1}\Delta(\underline{f}_{\sigma_2} \ ; \ \nu) - a_{\sigma_2}\Delta(\underline{f}_{\sigma_1} \ ; \ \nu))_{(\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma\times\Sigma},$$

la suite

$$0 \to A \xrightarrow{u} A^\Sigma \xrightarrow{v} A^{\Sigma\times\Sigma}$$

est exacte.

On suppose désormais l'entier ν efficace pour les deux suites d'entiers $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. Soit a un élément de A, dont on note $(a_\ell)_{\ell\in\mathbf{N}}$ les composantes homogènes pour la $\mathbf{N}$-graduation *de la k-algèbre A définie par* $\deg(U_{i,\alpha}) = 1$ *pour tout (i, α). On suppose que a divise tous les déterminants $D(\underline{f}_\sigma \ ; \ \nu))_{\sigma\in\Sigma}$ dans A. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

(iii) Pour tout $\ell \notin \{0, \left(\sum_{i=1}^{n} d_1 \cdots \hat{d}_i \cdots d_n\right)/\chi\}$ (où, rappelons-le, $\chi := m_1 m_2 \cdots m_n / pgcd(m_1, m_2, \cdots, m_n)$), la composante a_ℓ est nilpotente dans A.

(iv) La partie $U := D(a_0)$ de spec (k) *est à la fois ouverte et fermée.*

(v) On note V l'ouvert complémentaire de U dans spec (k), *muni de sa structure de schéma (affine) induite par celle de* spec (k). *En outre, notant π :* spec $(A) \to$ spec (k) *la projection canonique, on pose*

$$A_U := \Gamma(\pi^{-1}(U), \tilde{A}), A_V := \Gamma(\pi^{-1}(V), \tilde{A}),$$

de sorte que $\pi^{-1}(U) =$ spec $(A_U), \pi^{-1}(V) =$ spec (A_V), *et, pour tout $y \in A[X_1, \cdots, X_n]$, on note y_U* (resp. y_V) *l'image de y dans $A_U[X_1, \cdots, X_n]$* (resp. $A_V[X_1, \cdots, X_n]$) *par le morphisme de $k[X_1, \cdots, X_n]$-algèbre canonique $A[X_1, \cdots, X_n] \to A_U[X_1, \cdots, X_n]$* (resp. $A_V[X_1, \cdots, X_n]$). *Avec ces notations, l'élément a_U de A_U est inversible, et il existe un élément inversible unique ξ de A_V tel que*

$$a_V = \xi^a\mathrm{Res}\ (f_{1V}, \cdots, f_{nV})$$

dans A_V. En particulier, lorsque spec (k) *est connexe, l'élément a de A est, soit inversible dans A, soit multiple de* ${}^a\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *par un élément inversible de A.*

Corollaire 4.3.9.— *(Cas standard). Soient ℓ un anneau commutatif, et $f_i \in \ell[X_1, \cdots, X_n]_{d_i}$ $(i \in [n])$. Etant donné un entier ν efficace pour les deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, on a l'égalité*

$$D(f_1, f_2, \cdots, f_n \ ; \ \nu) = {}^a\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n)\Delta(f_1, \cdots, f_n \ ; \ \nu)$$

dans ℓ.

Preuve Par spécialisation à partir du cas générique correspondant (4.3.1 (i)).

4.3.10 Nous allons terminer le paragraphe 4 par un exemple générique standard sur un anneau commutatif k. C'est celui où

$$m_1 = m_2 = 2, m_3 = 3 \text{ et } d_1 = d_2 = d_3 = 6.$$

Avec les notations de 1, on a dans ce cas

$$\begin{aligned} \delta &= 3 \times 6 - (2+2+3) = 11 \\ \chi &:= \frac{m_1 m_2 m_3}{pgcd(m_1, m_2, m_3)} = 12, \end{aligned}$$

et on vérifie facilement que

$$\{\nu | o \leq \nu \leq 11, \nu \notin \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \mathbf{N}m_3\} = \{1\}.$$

D'après (4.2.15 ; 1), l'entier $10 := \delta - 1$ est donc l'unique entier $\in \{0, 1, \cdots, 11\}$ qui soit efficace pour les suites $\underline{m} := (2, 2, 3)$ et $\underline{d} := (6, 6, 6)$.

Les seuls monômes X^α avec $\deg_a(X^\alpha) = 6$ sont

$$X_1^3, X_2^3, X_3^2, X_1^2 X_2, X_1 X_2^2.$$

On peut donc, avec des changements de notations évidents, poser, pour $1 \leq i \leq 3$,

$$f_i = U_i X_1^3 + V_i X_2^3 + W_i X_3^2 + L_i X_1^2 X_2 + M_i X_1 X_2^2,$$

avec $U_i, V_i, W_i, L_i, M_i (1 \leq i \leq 3)$ des indéterminées, et

$$A = k[U_i, V_i, W_i, L_i, M_i | 1 \leq i \leq 3].$$

Les monômes X^α avec $\deg_a(X^\alpha) = 10$, rangés dans l'ordre lexicographique, sont

$$X_1^5, X_1^4 X_2, X_1^3 X_2^2, X_1^2 X_2^3, X_1^2 X_3^2, X_1 X_2^4, X_1 X_2 X_3^2, X_2^5, X_2^2 X_3^2.$$

Pour la situation $(\underline{m}, \underline{d})$, les monômes sont tous repus, mais aucun d'entre eux n'est dodu. Par suite, on a

$$\Delta(f_1, f_2, f_3 \ ; \ 10) = 1$$

et (4.3.1 (i)) le résultant anisotrope ${}^a\text{Res}\ (f_1, f_2, f_3)$ est le déterminant de la matrice 9×9

$${}^a\text{Mon}\ (3; 10) \times {}^a\text{Mon}\ (3; 10) \to A$$

ci-dessous

	X_1^5	$X_1^4X_2$	$X_1^3X_2^2$	$X_1^2X_2^3$	$X_1^2X_3^2$	$X_1X_2^4$	$X_1X_2X_3^2$	X_2^5	$X_2^2X_3^2$
X_1^5	U_1	L_1	M_1	V_1	W_1	0	0	0	0
$X_1^4X_2$	0	U_1	L_1	M_1	0	V_1	W_1	0	0
$X_1^3X_2^2$	0	0	U_1	L_1	0	M_1	0	V_1	W_1
$X_1^2X_2^3$	U_2	L_2	M_2	V_2	W_2	0	0	0	0
$X_1^2X_3^2$	U_3	L_3	M_3	V_3	W_3	0	0	0	0
$X_1X_2^4$	0	U_2	L_2	M_2	0	V_2	W_2	0	0
$X_1X_2X_3^2$	0	U_3	L_3	M_3	0	V_3	W_3	0	0
X_2^5	0	0	U_2	L_2	0	M_2	0	V_2	W_2
$X_2^2X_3^2$	0	0	U_3	L_3	0	M_3	0	V_3	W_3

On peut retrouver ce résultat comme suit. Posant, pour tout $i \in [3]$,

$$f_i^\# = U_iX_1^6 + V_iX_2^6 + W_iX_3^6 + L_iX_1^4X_2^2 + M_iX_1^2X_2^4,$$

on a (2.3.1)

$$\text{Res}\,(f_1^\#, f_2^\#, f_3^\#) = {}^a\text{Res}\,(f_1, f_2, f_3)^\chi = {}^a\text{Res}\,(f_1, f_2, f_3)^{12}\ . \tag{4.3.11}$$

Par ailleurs, posant, pour tout $i \in [3]$,

$$g_i = U_iX_1^3 + V_iX_2^3 + W_iX_3^3 + L_iX_1^2X_2 + M_iX_1X_2^2,$$

la formule de changement de base pour le résultant ([J3] 5.12) montre que

$$\text{Res}\,(f_1^\#, f_2^\#, f_3^\#) = \ \text{Res}\,(g_1, g_2, g_3)^4\ . \tag{4.3.12}$$

Enfin, posant, pour tout $i \in [3]$,

$$h_i = U_iX_1^3 + V_iX_2^3 + W_iX_3 + L_iX_1^2X_2 + M_iX_1X_2^2,$$

les polynômes h_i sont isobares de poids 3 pour la suite de poids $(1,1,3)$ pour (X_1, X_2, X_3). Pour ces poids, une nouvelle application de (2.3.1) montre que

$$\text{Res}\,(g_1, g_2, g_3) = {}^a\text{Res}\,(h_1, h_2, h_3)^3. \tag{4.3.13}$$

Se ramenant au cas où $k = \mathbf{Z}$, la comparaison de (4.3.11), (4.3.12) et (4.3.13) montre que

$${}^a\text{Res}\,(f_1, f_2, f_3) = \pm{}^a\text{Res}\,(h_1, h_2, h_3).$$

Par spécialisation $f_i \mapsto X_i^3 (i = 1, 2), f_3 \mapsto X_3^2,$, on en déduit

$${}^a\text{Res}\,(f_1, f_2, f_3) = {}^a\text{Res}\,(h_1, h_2, h_3). \tag{4.3.14}$$

On retrouve l'expression déterminantale du premier membre en appliquant (4.3.1 (i)) aux suites $\underline{m}' := (1,1,3)$ et $\underline{d}' := (3,3,3)$ et à l'entier $\nu = 5 > \delta' = 3\times 3-(1+1+3) = 4$.

5. Formules de Sylvester et applications

5.1 On se place dans la situation générale décrite en (1.1). Soient $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \in \mathbf{N}^n$ tels que

$$\deg_a(X^\beta) > \deg_a(X^\gamma) - \sum_{i=1}^n m_i.$$

Alors il existe un entier $i \in [n]$ tel que $\beta_i \geq \gamma_i$: sinon on aurait $\beta_i \leq \gamma_i - 1$ pour tout $i \in [n]$, d'où

$$\deg_a(X^\beta) = \sum_i m_i \beta_i \leq \sum_i m_i(\gamma_i - 1) = \deg_a(X^\gamma) - \sum_{i=1}^n m_i.$$

Soient $\mu \in \mathbf{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \in \mathbf{N}^n$. Si $\mu > \deg_a(X^\gamma) - \sum_{i=1}^n m_i$, on déduit de ce qui précède, par linéarité à partir du cas des monômes, que tout $g \in C_\mu$ peut s'écrire d'au moins une manière sous la forme

$$g = \sum_{i=1}^n X_i^{\gamma_i} g_i,$$

avec $g_i \in C_{\mu - m_i \gamma_i}$ pour tout $i \in [n]$.

Soit $\gamma \in \mathbf{N}^n$. Lorsque $\min_i(d_i) > \deg_a(X^\gamma) - \sum_{i=1}^n m_i$, on peut donc décomposer les f_i ($i \in [n]$) sous la forme

$$f_i = \sum_{j=1}^n X_j^{\gamma_j} f_{ij} \tag{5.1.1}$$

avec $f_{ij} \in C_{d_i - m_j \gamma_j}$. Les formules de Cramer montrent que

$$X_j^{\gamma_j} \text{ dét } (f_{st})_{1 \leq s,t \leq n} \in (f_1, f_2, \cdots, f_n) \tag{5.1.2}$$

dans C, donc la classe σ_γ de dét $(f_{st})_{1 \leq s,t \leq n}$ dans B appartient à

$$H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{(\sum_i d_i) - \deg_a(X^\gamma)} = H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta - (\deg_a(X^\gamma) - \sum_i m_i)}.$$

De plus (lemme de Wiebe), comme la suite $(X_1^{\gamma_1}, \cdots, X_n^{\gamma_n})$ de $\ell[X_1, \cdots, X_n]$ est régulière, cette classe σ_γ ne dépend pas des décompositions (5.1.1) choisies.

Soit $\beta \in \mathbf{N}^n$ tel que $\nu := \deg_a(X^\beta) < \min_i(d_i)$. Il résulte de ce qu'on vient de voir que

$$\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) := \sigma_{\beta + (1,1,\cdots,1)} \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta - \nu} \tag{5.1.3}$$

On notera que

$$\mathrm{sylv}_0(\underline{f}) := \mathrm{sylv}_{0,0,\cdots,0}(\underline{f}) \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \tag{5.1.4}$$

n'est autre que l'élément noté Δ dans (3.6.3).

Proposition 5.1.5.— *Soit $\beta, \beta' \in \mathbf{N}^n$ et $\nu \in \mathbf{N}$ tels que*

$$\deg_a(X^\beta) = \deg_a(X^{\beta'}) = \nu < \min_i(d_i).$$

Alors, notant $\delta_{\beta\beta'}$ le symbole de Kronecker, on a l'égalité

$$X^{\beta'} \ \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) = \delta_{\beta\beta'} \ \mathrm{sylv}_0(\underline{f})$$

dans $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$.

Preuve : a) Si $\beta' \neq \beta$, l'égalité $\deg_a(X^{\beta'}) = \deg_a(X^\beta)$ montre l'existence d'un $j \in [n]$ tel que $\beta'_j \geq \beta_j + 1$. Comme $X_j^{\beta_j+1}$ divise $X^{\beta'}$, la relation (5.1.2) appliquée à $\gamma := \beta + (1, 1, \cdots, 1)$:

$$X_j^{\beta_j+1} \ \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) = 0$$

montre que $X^{\beta'} \ \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) = 0$ dans B.

b) Pour définir $\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f})$, on doit choisir des décompositions

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} X_j^{\beta_j+1} f_{ij} \tag{5.1.6}$$

avec $f_{ij} \in C_{d_i - m_j(\beta_j+1)}$, et alors

$$\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) := [\text{dét } (f_{st})_{1\leq s,t\leq n}]^- \text{ dans } B.$$

De (5.1.6) résulte que

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} X_j g_{ij}$$

avec $g_{ij} := X_j^{\beta_j} f_{ij}$. Par définition, on a

$$\mathrm{sylv}_0(\underline{f}) = [\text{dét } (g_{st})_{1\leq s,t\leq n}]^- \text{ dans } B.$$

La multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes montre alors que

$$\begin{aligned} \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) &= [\text{dét } (f_{st})_{1\leq s,t\leq n}]^- \\ &= X^\beta [\text{dét } (g_{st})_{1\leq s,t\leq n}]^- \\ &= X^\beta \ \mathrm{sylv}_0(\underline{f}) \end{aligned}$$

dans B, d'où l'assertion.

5.2 Choisissons, comme en (3.6.1), des décompositions

$$f_i(\underline{X}) - f_i(\underline{Y}) = \sum_{j=1}^{n}(X_j - Y_j) f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y}) \tag{5.2.1}$$

($i \in [n]$) dans $C \otimes_\ell C = \ell[\underline{X}, \underline{Y}]$, et décomposons dét $(f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y}))_{1 \leq i,j, \leq n}$ suivant la $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$-graduation canonique de $C \otimes_\ell C$:

$$\text{dét } (f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y}))_{1 \leq i,j, \leq n} = \sum_{\substack{p,q \geq 0 \\ p+q=\delta}} h_{pq}(\underline{X}, \underline{Y})$$

avec $h_{pq} \in C_p \otimes C_q$. On rappelle que

$$\nabla_B(\underline{f}\ ;\ \underline{X}) := \text{ dét } (f_{ij})^- \in (B \otimes_\ell B)_\delta$$

ne dépend pas des décompositions (5.2.1) choisies ; pour tout $0 \leq \nu \leq \delta$, il en est de même donc pour

$$\nabla_B(\underline{f},\ ;\ \underline{X})_{\nu,\delta-\nu} := h_{\nu,\delta-\nu}(\underline{X}, \underline{Y})^-$$

dans $B_\nu \otimes_\ell B_{\delta-\nu}$. Lorsque $\nu <\ \min_i(d_i)$, on a $B_\nu = C_\nu$; écrivant

$$\begin{aligned} h_{\nu,\delta-\nu}(\underline{X}, \underline{Y}) &= \sum_{\deg_a(X^\beta)=\nu} X^\beta q_\beta(\underline{Y}) \\ &= \sum_{\deg_a(X^\beta)=\nu} X^\beta \otimes_\ell q_\beta \end{aligned}$$

dans $C_\nu \otimes_\ell C_{\delta-\nu}$, on en déduit que, pour tout $\beta \in \mathbf{N}^n$ tel que $\deg_a(X^\beta) = \nu$, la classe $\overline{q}_\beta$ de q_β dans $B_{\delta-\nu}$ ne dépend pas non plus des décompositions (5.2.1) choisies.

En fait, on a l'énoncé suivant.

Proposition 5.2.2.— *Soit $\nu \in \mathbf{N}$ tel que $\nu <\ \min_i(d_i)$.*

(i) Pour tout $\beta \in \mathbf{N}$ tel que $\deg_a(X^\beta) = \nu$, on a

$$\overline{q}_\beta =\ \text{sylv}_\beta(\underline{f}) \text{ dans } B_{\delta-\nu}\ .$$

(ii) La composante homogène de bidegré $(\nu, \delta-\nu)$ de $\nabla_B(\underline{f}\ ;\ \underline{X})$ vérifie l'égalité

$$\nabla_B(\underline{f}\ ;\ \underline{X})_{\nu,\delta-\nu} = \sum_{\deg_a(X^\beta)=\nu} X^\beta \otimes_\ell\ \text{sylv}_\beta(\underline{f})$$

dans $B_\nu \otimes_\ell B_{\delta-\nu} = C_\nu \otimes_\ell B_{\delta-\nu}$.

(iii) L'application (3.6.5) $\theta_{\delta-\nu} \ : \ B_\nu^\vee = C_\nu^\vee \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}$ *est telle que*

$$\theta_{\delta-\nu}(u) = \sum_{\deg_a(X^\beta)=\nu} u(X^\beta) \ \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f})$$

pour tout $u \in C_\nu^\vee$. *Autrement dit, notant* $(X^\beta)^\vee$ $(\deg_a(X^\beta) = \nu)$ *la base duale de la* ℓ*-base canonique* (X^β) $(\deg_a(X^\beta) = \nu)$ *de* C_ν, *on a*

$$\theta_{\delta-\nu}((X^\beta)^\vee) = \ \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f})$$

pour tout $\beta \in \mathbf{N}^n$ *tel que* $\deg_a(X^\beta) = \nu$.

Preuve : Il est clair qu'il suffit de prouver (i), les autres assertions s'en déduisant formellement à partir des définitions. Si $\deg_a(X^\beta) = \nu < \ \min_i(d_i)$, on peut (5.1.1) écrire les f_i sous la forme

$$f_i = \sum_{j=1}^n X_j^{\beta_j+1} g_{ij}$$

avec $g_{ij} \in C_{d-m_j(\beta_j+1)}$. On en déduit, pour tout $i \in [n]$, l'égalité

$$f_i(\underline{X}) - f_i(\underline{Y}) = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^n X_j^{\beta_j+1}(g_{ij}(\underline{X}) - g_{ij}(\underline{Y})) \\ \displaystyle + \sum_{j=1}^n (X_j^{\beta_j+1} - Y_j^{\beta_j+1}) g_{ij}(\underline{Y}) \end{array} \right.$$

qui permet d'écrire une décomposition du type (5.2.1), avec $f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})$ de la forme

$$f_{ij}(\underline{X}, \underline{Y}) = \left(\sum_{0 \leq t \leq \beta_j} X_j^t Y_j^{\beta_j - t} \right) g_{ij}(\underline{Y}) + X_j^{\beta_j+1} \lambda_{ij}(\underline{X}, \underline{Y})$$

où $\lambda_{ij} \in C \otimes_\ell C$. Pour des raisons évidentes de degrés, le coefficient de X^β dans le développement de dét $(f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ en polynôme en $\underline{X}$ à coefficients dans $\ell[\underline{Y}]$ est le même que dans le développement analogue de

$$\text{dét} \ \left(\left(\sum_{0 \leq t \leq \beta_j} X_j^t Y_j^{\beta_j - t} \right) g_{ij}(\underline{Y}) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$= \left[\prod_{j=1}^n \left(\sum_{0 \leq t \leq \beta_j} X_j^t Y_j^{\beta_j - t} \right) \right] \ \text{dét} \ (g_{ij}(\underline{Y}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

Autrement dit,

$$q_\beta(\underline{Y}) = \text{ dét } (g_{ij}(\underline{Y}))_{1\leq i,j\leq n},$$

d'où l'on déduit aussitôt que

$$\overline{q}_\beta = \text{ sylv}_\beta\ (\underline{f}) \text{ dans } B,$$

par définition de sylv_β.

Corollaire 5.2.3.— *Supposons que l'application*

$$1 \mapsto \text{ sylv}_0\ (\underline{f})\ :\ \ell \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$$

soit injective (c'est le cas lorsque la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière d'après (3.6.7) (i) et (1.5.1)). Alors, pour tout entier $\nu <\ \min_i(d_i)$, l'application ℓ-linéaire (3.6.5)

$$\theta_{\delta-\nu}\ :\ C_\nu^\vee = B_\nu^\vee \to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu}$$

est injective.

Preuve : D'après (5.2.2 (iii)), il s'agit de montrer que les $\text{sylv}_\beta\ (\underline{f})$ $(\deg_a(X^\beta) = \nu)$ forment une famille ℓ-libre. Soit pour cela une égalité

$$\sum_{\deg_a(X^\beta)=\nu} a_\beta \text{ sylv}_\beta\ (\underline{f}) = 0 \qquad (a_\beta \in \ell). \tag{5.2.4}$$

Multipliant les deux membres de (5.2.4) par un $X^{\beta'}$ avec $\deg_a(X^{\beta'}) = \nu$, on déduit aussitôt de (5.1.5) que

$$a_{\beta'} \text{ sylv}_0\ (\underline{f}) = 0 \qquad \text{dans} \qquad H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta,$$

d'où $a_{\beta'} = 0$ d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé.

5.2.5 Soit $0 \leq \nu \leq \delta$ un entier. Supposons que le ℓ-module B_ν soit libre, nécessairement de type fini, et choisissons-en une ℓ-base $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s)$, dont on note $(\xi_1^\vee, \xi_2^\vee, \cdots, \xi_s^\vee)$ la ℓ-base duale de $B_\nu^\vee$. On peut alors écrire de manière unique

$$\nabla_B(\underline{f}\ ;\ \underline{X})_{\nu,\delta-\nu} = \sum_{t=1}^{s} \xi_t \otimes_\ell \eta_t$$

dans $B_\nu \otimes_\ell B_{\delta-\nu}$.

L'application θ définie en (3.6.2) étant B-linéaire, on a en particulier que, pour tout $t \in [s]$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B_\nu^\vee & \xrightarrow{\theta_\nu} & H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} \\ {\scriptstyle (\times\xi_t)^\vee}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times\xi_t} \\ \ell = \quad B_0^\vee & \xrightarrow{\theta_\delta} & H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \end{array}$$

est commutatif. Autrement dit, pour tout $u \in \check{B}_\nu$, on a

$$\xi_t \left(\sum_{t'=1}^{s} u(\xi_{t'})\eta_{t'} \right) = u(\xi_t) \ \mathrm{sylv}_0(\underline{f})$$

dans $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$. Le cas où $u = (\xi_{t'})^\vee$ fournit l'égalité

(5.2.6) $$\xi_t\eta_{t'} = \delta_{tt'} \ \mathrm{sylv}_0(\underline{f}) \qquad \text{dans} \qquad H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta,$$

où $\delta_{tt'}$ désigne le symbole de Kronecker.

Notant $\mathrm{mult}_B \ : \ B \otimes_\ell B \to B$ la multiplication de l'anneau B, on en déduit

(5.2.7) $$\begin{aligned} \mathrm{mult}_B \ (\nabla_B(\underline{f} \ ; \ \underline{X})_{\nu,\delta-\nu}) &= \sum_{t=1}^{s} \xi_t\eta_t \\ &= \ \dim_\ell(B_\nu) \ \mathrm{sylv}_0(\underline{f}) \end{aligned}$$

dans $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$.

5.2.8 Soit $0 \leq \nu \leq \delta$ un entier. Faisons les hypothèses suivantes.

(a) Le ℓ-module B_ν admet une résolution libre finie

$$0 \to L_m \to L_{m-1} \to \cdots \to L_0 \to B_\nu \to 0,$$

ce qui permet de définir sans ambiguïté (lemme de Schanuel) son *rang*

$$rg_\ell(B_\nu) := \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \ \dim_\ell(L_i).$$

(b) Le ℓ-module $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$ est un sous-module d'un ℓ-module libre.

Ces conditions sont notamment réalisées lorsque la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière : pour (a), on prend pour résolution la composante homogène de degré ν du complexe de Koszul $\mathrm{Kosz}(f_1, \cdots, f_n \ ; \ C)$, pour (b), on utilise l'isomorphisme (1.5.1) $\hat{\tau}_\delta \ : \ \ell = B_0^\vee \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$.

Proposition 5.2.9.— $(0 \leq \nu \leq \delta)$. *Sous les hypothèses (a) et (b) de (5.2.8), on a l'égalité*

$$\mathrm{mult}_B \ (\nabla_B(\underline{f} \ ; \ \underline{X})_{\nu,\delta-\nu}) = rg_\ell(B_\nu) \ \mathrm{sylv}_0(\underline{f})$$

dans $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$.

Preuve : Posons $x := \ \mathrm{mult}_B\ (\nabla_B) - rg_\ell(B_\nu)\ \mathrm{sylv}_0(\underline{f})$. Pour tout idéal premier $\wp$ de ℓ attaché à ℓ, le $\ell_\wp$-module $(B_\nu)_\wp$ est libre de rang $rg_\ell(B_\nu)$ ([No] th 2 p. 176 : th. d'Auslander - Buchsbaum). Par localisation, on déduit donc de (5.2.7) que

$$\frac{x}{1} = 0 \text{ dans } [H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta]_\wp \text{ pour tout } \wp \in \ \mathrm{Att}_\ell(\ell). \tag{5.2.10}$$

On en conclut que $x = 0$ par l'argument classique suivant. Plongeons $H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta$ dans un ℓ-module $\ell^{(I)}$, et notons $(x_i)_{i\in I}$ les coordonnées de x dans la base canonique de $\ell^{(I)}$. Si l'un des x_i, soit x_{i_0}, n'était pas nul, il existerait un idéal premier $\wp$ de ℓ minimal parmi ceux contenant $ann_\ell(x_{i_0})$. D'après ([Du] prop. 2) ou ([No] Ex 4 p. 179), on aurait $\wp \in \ \mathrm{Att}_\ell(\ell)$, d'où, par (5.2.10),

$$\frac{x_{i_0}}{1} = 0 \qquad \text{dans} \qquad \ell_\wp.$$

Autrement dit, il existerait un $y \in \ell$ tel que

$$\begin{cases} y \in \ \mathrm{ann}_\ell(x_{i_0}) \\ y \notin \wp, \end{cases}$$

en contradiction avec l'inclusion de définition $\wp \supset \ \mathrm{ann}_\ell(x_{i_0})$.

5.2.11 Soit k un anneau commutatif. Avec les notations de (1.1), supposons que la suite $(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ des polynômes homogènes génériques de degrés respectifs $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ sur k soit régulière. D'après (2.2), il en est ainsi dans la situation standard ou, plus généralement, lorsque les conditions (H_1) a) et b) rappelées ci-après sont vérifiées.

a) Pour tout $i \in [n]$, l'entier m_i divise tous les d_j à l'exception éventuellement de l'un d'eux.

b) Pour tout $i \in [n]$, on a : $d_i \in \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$.

Dans ce cas, posant

$$B^{\text{gén}} \ := \ {}_kA[X_1, \cdots, X_n]/(F_1, F_2, \cdots, F_n),$$

on a

$$rg_{{}_kA}\ (B^{\text{gén}}_\nu) \ = \left[\frac{(1 - T^{d_1}) \cdots (1 - T^{d_n})}{(1 - T^{m_1}) \cdots (1 - T^{m_n})}\right]_{T^\nu}$$

pour tout $\nu \in \mathbf{N}$.

Par spécialisation $F_i \mapsto f_i$, on déduit alors de (5.2.9) la proposition suivante :

Proposition 5.2.12.— $(0 \leq \nu \leq \delta)$. *Soit k un anneau commutatif. On suppose que les suites $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ vérifient la condition explicitée en (5.2.11). Alors, sous les hypothèses préliminaires de (1.1) et lorsque ℓ est une k-algèbre, on a l'égalité suivante dans B_δ :*

$$\mathrm{mult}_B(\nabla_B(\underline{f}\ ;\ \underline{X})_{\nu,\delta-\nu}) = r_\nu\ \mathrm{sylv}_0(\underline{f}),$$

avec

$$r_\nu\ := \left[\frac{(1-T^{d_1})\cdots(1-T^{d_n})}{(1-T^{m_1})\cdots(1-T^{m_n})}\right]_{T^\nu}\ .$$

5.3 Toujours sous les hypothèses préliminaires de (1.1), supposons de plus que

$$m_i \text{ divise } d_i \text{ pour tout } i \in [n] \tag{5.3.1}$$

Dans cette situation, nous utiliserons librement la terminologie et les notations introduites en (4.2). En particulier, pour tout $\beta \in \mathbf{N}^n$ qui est $\underline{d}$-repu, on note $i(\beta)$ le $\underline{d}$-index de β

$$i(\beta) :=\ \inf\ \{i \in [n] | \beta_i \geq d_i/m_i\}.$$

En outre, pour tout $t \in \mathbf{N}$, on note

$$\mathrm{Nonrep}\ (\underline{d}\ ;\ t) :=\ {}^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ t) \setminus \mathrm{Rep}\ (\underline{d}\ ;\ t).$$

[Bien que les notations de monômes $\underline{d}$-repus, $\underline{d}$-dodus dépendent de la suite $\underline{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, nous ne la faisons pas figurer dans les notations, car cela ne saurait créer de confusion. Par contre, ayant parfois, dans les démonstrations, à considérer la graduation usuelle sur les monômes, nous faisons bien la distinction entre Mon $(n\ ;\ t)$ et ^{a}Mon $(n\ ;\ t)$, le premier correspondant à la graduation usuelle $\deg\ (X_i) = 1 (i \in [n])$ et le deuxième à la graduation $\deg_a\ (X_i) = m_i (i \in [n])$].

Soit $0 \leq \nu \leq \delta$. On suppose que

$$\begin{cases} a)\ \nu <\ \min_i(d_i), \\ b)\ \delta - \nu \in \mathbf{N}m_1 + \cdots + \mathbf{N}m_n,\ \text{i.e. } {}^a\mathrm{Mon}\ (n\ ;\ \delta-\nu) \neq \phi\ . \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Pour tout $\beta \in {}^a$Mon $(n\ ;\ \nu)$, choisissons un relèvement noté $\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f})$ de $\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f})$ (5.1.3) dans C (par exemple $\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f})\ :=\ q_\beta(\underline{X})$ avec les notations de 5.2.2).

On définit comme suit une matrice

$${}^a\mathbf{\Theta}_\nu(\underline{f})\ :\ {}^a\mathrm{Mon}\ (n\ ;\ \delta-\nu) \times {}^a\mathrm{Mon}\ (n\ ;\ \delta-\nu) \to \ell. \tag{5.3.3}$$

Pour tout $\beta \in {}^a\mathrm{Mon}\,(n\ ;\ \delta-\nu)$, on a dans C

$$\sum_{\deg_a(X^\alpha)=\delta-\nu} {}^a\mathbf{\Theta}_\nu(\underline{f})\ (X^\beta, X^\alpha)X^\alpha :=$$

$$\begin{cases} [X^\beta/X_{i(\beta)}^{d_{i(\beta)}/m_{i(\beta)}}]f_{i(\beta)} & \text{lorsque } \beta \in \ \mathrm{Rep}\ (\underline{d}\ ;\ \delta-\nu) \\ \mathrm{Sylv}_{(d_1/m_1-\beta_1-1,d_2/m_2-\beta_2-1,\cdots,d_n/m_n-\beta_n-1)}(\underline{f}) & \text{lorsque } \beta \in \ \mathrm{Nonrep}\ (\underline{d}\ ;\ \delta-\nu)\ . \end{cases}$$

Cela étant, on pose

$$(5.3.4) \qquad {}^a\Theta_\nu(\underline{f}) \ :=\ \text{dét}\ ({}^a\mathbf{\Theta}_\nu(\underline{f})) \in \ell.$$

5.3.5 Nous utiliserons surtout ces constructions dans la situation générique sur un anneau commutatif k. Supposant dans ce cas faits des choix

$$\begin{aligned} {}^a\mathbf{\Theta}_\nu^{\text{gén}} \ &:=\ {}^a\mathbf{\Theta}_\nu \left(\left(\sum_{\deg_a(X^\alpha)=d_i} U_{i\alpha}X^\alpha \right)_{1\leq i\leq n} \right) \\ {}^a\Theta_\nu^{\text{gén}} \ &:=\ \text{dét}\ ({}^a\mathbf{\Theta}_\nu^{\text{gén}}), \end{aligned}$$

on en déduit, chaque fois que ℓ est une k-algèbre, des choix pour ${}^a\mathbf{\Theta}_\nu(\underline{f}), {}^a\Theta_\nu(\underline{f})$ par spécialisation (k-linéaire)

$$A = k[U_{i\alpha}|i \in [n],\ \deg_a(X^\alpha) = d_i] \to \ell$$

$$U_{i\alpha} \mapsto u_{i\alpha}.$$

5.3.6. Si ${}^a\mathrm{Mon}(n;\nu) = \emptyset$, l'élément ${}^a\theta_\nu(\underline{f})$ est uniquement déterminé. Lorsque ${}^a\mathrm{Mon}(n;\nu) \neq \emptyset$, indiquons comment il dépend du choix des relèvements $\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f})$ des $\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f})$. Soient $(\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f}))_\beta$ et $(\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f})')_\beta$ deux choix auxquels sont associés ${}^a\theta_\nu(\underline{f})$ et ${}^a\theta_\nu(\underline{f})'$. Alors

$$(5.3.7) \qquad X^\gamma({}^a\theta_\nu(\underline{f}) -{}^a\ \theta_\nu(\underline{f})') = 0\ \forall\gamma \in^a \mathrm{Mon}(n;\delta-\nu) \quad \text{dans} \quad B\ .$$

Autrement dit, posant $a :=^a \theta_\nu(\underline{f}) -^a \theta_\nu(\underline{f})' \in \ell$, on a

$$(5.3.7)' \qquad aB_{\delta-\nu} = 0\ .$$

Il suffit pour le voir de supposer que $\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) = \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f})'$ pour tous les $X^\beta \in^a \mathrm{Mon}(n;\nu)$ à l'exception d'un seul, soit X^{β_0}. Alors

$${}^a\theta_\nu(\underline{f}) -^a \theta_\nu(\underline{f})' = \det(\cdots, \mathrm{sylv}_{\beta_0}(\underline{f}) - \mathrm{sylv}_{\beta_0}(\underline{f})', \cdots),$$

où les lignes de la matrice du deuxième membre sont figurées par des polynômes, appartenant tous à $(f_1, f_2, \cdots, f_n) \subset C$, dont elles représentent les coefficients. L'égalité (5.3.7) résulte alors aussitôt des formules de Cramer. Soit $X^\beta \in^a \mathrm{Mon}(n;\nu) \neq \emptyset$. Comme $\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) \in B_{\delta-\nu}$, on déduit de (5.3.7)' que

$$a\ \mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) = 0\ .$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par X^β, il résulte alors de (5.1.5) que

$$a\ \mathrm{sylv}_0(\underline{f}) = 0 \quad \text{dans} \quad B\ .$$

En particulier, cela montre que ${}^a\theta_\nu(\underline{f})$ *ne dépend pas des choix faits lorsque l'application ℓ-linéaire*

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_\delta : \ell &\to H^0_{\mathfrak{M}}(B)_\delta \\ 1 &\mapsto \mathrm{sylv}_0(\underline{f}) \end{aligned}$$

est injective. C'est le cas lorsque la suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est régulière, en particulier dans le cas générique standard ou semi-standard sur un anneau commutatif k, ou plus généralement lorsque la condition (H_1) de (2.2.B) est satisfaite. Lorsque, pour $\underline{m}, \underline{d}$ données vérifiant (5.3.1), la suite $(f_1^{\text{gén}}, \cdots, f_n^{\text{gén}})$ générique correspondante sur $\mathbf{Z}$ est régulière, on peut en général normaliser les choix faits, et obtenir une notion intrinsèque, par spécialisation à partir du cas générique sur $\mathbf{Z}$.

Exemple 5.3.8 La suite $(f_1, f_2, \cdots, f_n) := (X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n})$ est régulière dans C, donc ${}^a\Theta_\nu(X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n})$ ne dépend pas du choix des $\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f})$. Comme

$$\mathrm{sylv}_\beta(\underline{f}) = [X_1^{(d_1/m_1)-1-\beta_1} \cdots X_n^{(d_n/m_n)-1-\beta_n}]^-,$$

on peut prendre

$$\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f})\ :=\ X_1^{(d_1/m_1)-1-\beta_1} \cdots X_n^{(d_n/m_n)-1-\beta_n}$$

pour tout $\beta \in {}^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu)$. Pour ce choix, ${}^a\boldsymbol{\Theta}_\nu = \mathbf{1}_{\mathrm{Mon}(n\ ;\ \delta-\nu)}$, donc

$${}^a\Theta_\nu(X_1^{d_1/m_1}, X_2^{d_2/m_2}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}) = 1$$

dans C.

5.3.9 Par définition de ${}^a\Theta_\nu(\underline{f})$, il résulte des formules de Cramer appliquées à la matrice ${}^a\boldsymbol{\Theta}_\nu(\underline{f})$ que

$$X^\beta\ {}^a\Theta_\nu(\underline{f}) \in ((f_i)_{1\le i\le n},\ (\mathrm{Sylv}_\beta(\underline{f}))_{\beta\in^a\mathrm{Mon}(n\ ;\ \nu)}) \subset C,$$

donc que

$$X^{\beta}\ {}^{a}\Theta_{\nu}(\underline{f}) \in H^0_{\mathfrak{M}}(B)_{\delta-\nu} \tag{5.3.10}$$

pour tout $\beta \in {}^{a}\mathrm{Mon}(n\ ;\ \delta-\nu)$.

En particulier, lorsque

$$\delta - \nu \in \mathbf{N}m_1 \cap \mathbf{N}m_2 \cap \cdots \cap \mathbf{N}m_n,$$

le déterminant ${}^{a}\Theta_{\nu}(\underline{f})$ est une forme d'inertie de degré zéro pour l'idéal $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de C.

C'est aussi le cas en situation générique standard ou même semi-standard sur un anneau commutatif k, puisqu'alors

$$H^0_{\mathfrak{M}}(B) = H^0_{X_i}(B) \qquad \forall i \in [n]$$

d'après ([J3] 4.2.1 et 6.3.10.2). Par spécialisation, on en déduit que c'est vrai aussi en situation standard ou semi-standard non nécessairement générique, à condition de définir ${}^{a}\Theta_{\nu}(\underline{f})$ par spécialisation à partir de choix génériques pour les polynômes Sylv_{β}, comme suggéré à la fin de (5.3.6).

Proposition 5.3.11.— *On se place dans la situation générique standard sur un anneau commutatif k. En particulier,*

$$m\ :=\ ppcm(m_1, m_2, \cdots, m_n) \quad \text{divise} \quad d\ :=\ pgcd(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

On se fixe un entier $\nu <\ \min_i(d_i)$, tel que m divise ν. Alors :

1) $\delta - \nu \in \mathbf{N}m_1 + \mathbf{N}m_2 + \cdots + \mathbf{N}m_n$.

2) On peut définir sans ambiguïté (5.3.6) l'élément ${}^{a}\Theta_{\nu}(\underline{f})$, et les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) Il existe un unique scalaire $c_{\nu}(\underline{f}) \in A$ tel que

$${}^{a}\Theta_{\nu}(\underline{f}) = c_{\nu}(\underline{f})\ {}^{a}\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

dans A.

(ii) Par spécialisation $f_i \mapsto X_i^{d_i/m_i}$, on obtient

$$c_{\nu}(X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}) = 1 \qquad \text{dans} \qquad k.$$

En particulier, l'élément $c_{\nu}(\underline{f})$ ne divise pas zéro dans A.

(iii) Pour tout $i \in [n]$, l'élément $c_{\nu}(\underline{f})$ de A est homogène par rapport à l'ensemble des coefficients de f_i. Il ne dépend pas des coefficients de f_n, autrement dit est homogène de degré zéro par rapport à l'ensemble de ces derniers.

Preuve : Montrons 1). Il est clair que $pgcd(m_1, \cdots, m_n) | \delta - \nu$. Utilisant le théorème de Brauer (4.1.1), l'assertion résultera alors de l'inégalité

$$\delta - \nu \geq (n-1)m - \sum_{i=1}^{n-1} m_i \tag{5.3.12}$$

que nous allons vérifier. Par hypothèse, il existe des entiers $r_i \geq 1$ tels que $d_i = r_i m$ ($i \in [n]$), et l'on a $\nu < \min_i(d_i) = [\min_i(r_i)]m$, d'où, comme m divise ν,

$$\nu \leq [\min_i(r_i) - 1]m.$$

On en déduit la succession d'égalité et d'inégalités

$$\begin{aligned} \delta - \nu &= \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) m - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) - \nu \\ &\geq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) - \min_i(r_i) + 1\right] m - \sum_{i=1}^{n} m_i \\ &\geq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) - \min_i(r_i)\right] m - \sum_{i=1}^{n-1} m_i, \end{aligned}$$

la dernière provenant de ce que $m_n \leq m$. Alors (5.3.12) résulte de l'inégalité, immédiate puisque $r_i \geq 1$ pour tout $i \in [n]$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) - \min_i(r_i) \geq n - 1.$$

Montrons 2). Tout d'abord (5.3.9), ${}^a\Theta_\nu(\underline{f})$ est une forme d'inertie de degré 0 pour l'idéal $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ de C. Ceci montre ([J3] 6.3.5 (A) (i)) l'existence d'un élément $c_\nu(\underline{f})$ comme en (i) ; son unicité provient de ce que ${}^a\mathrm{Res}(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ ne divise pas zéro dans A ([J3] 6.3.5 (A) (ii)). Montrons (ii). On a

$$\begin{aligned} &{}^a\Theta_\nu\ (X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}) = 1 \\ &{}^a\mathrm{Res}\ (X_1^{d_1/m_1}, \cdots, X_n^{d_n/m_n}) = 1 \qquad ([J3]6.3.5(A)(\mathrm{i})) \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

dans k, d'où l'égalité de (ii) par comparaison avec la relation de définition de $c_\nu(\underline{f})$. On en déduit que $c_\nu(\underline{f})$ ne divise pas zéro dans A par application du lemme de Dedekind-Mertens. Montrons (iii). Le seul point délicat est de vérifier que $c_\nu(\underline{f})$ ne dépend pas des coefficients de f_n. Par construction, le degré de ${}^a\Theta_\nu(\underline{f})$ par rapport aux coefficients de f_n est le nombre de solutions $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{Z}^n$ du système

$$(I) \qquad \begin{cases} \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n = \delta - \nu \\ 0 \leq \alpha_i \leq (d_i/m_i) - 1 \text{ pour tout } i \in [n-1] \\ \alpha_n \geq 0\ . \end{cases}$$

Par ailleurs ([J3] preuve de 6.3.10), l'élément ${}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ a pour degré par rapport aux coefficients de f_n le nombre de solutions $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ dans $\mathbf{Z}^n$ du système

$$(II) \qquad \begin{cases} \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n = 0 \\ 0 \le \alpha_i \le (d_i/m_i) - 1 \text{ pour tout } i \in [n-1] \ . \end{cases}$$

Comme $m_n|\nu$, il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que $d_n - m_n - \nu = cm_n$. Par substitution

$$\begin{aligned} &\alpha_i \mapsto (d_i/m_i - 1) - \alpha_i \quad (i \in [n-1]) \\ &\alpha_n \mapsto c - \alpha_n \end{aligned}$$

on voit que le nombre de solutions de (II) dans $\mathbf{Z}^n$ est égal au nombre de solutions $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}^n$ du système

$$(II') \qquad \begin{cases} \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \cdots + \alpha_n m_n = \delta - \nu \\ 0 \le \alpha_i \le (d_i/m_i - 1) \quad \text{pour tout} \quad i \in [n-1]. \end{cases}$$

On aura donc terminé si on vérifie que toute solution de (II') est telle que $\alpha_n \ge 0$. Pour une telle solution, on a immédiatement

$$\begin{aligned} \alpha_n m_n &= \delta - \nu - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i m_i \right) \\ &\ge \delta - \nu - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{d_i}{m_i} - 1 \right) m_i \\ &\ge d_n - m_n - \nu \ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme m divise ν et $\nu < d_n$, on voit que $\nu \le d_n - m$. D'autre part, il est clair que $m_n \le m$, d'où

$$d_n - m_n - \nu \ge m - m_n \ge 0,$$

ce qui achève la démonstration (se placer sur $\mathbf{Z}$, puis spécialiser).

Corollaire 5.3.13.— *(Situation générique standard sur un anneau commutatif k)*

On se place sous les hypothèses de (5.3.11). Soit Σ une partie de $\mathfrak{S}_n$ telle que l'application

$$\begin{aligned} \Sigma &\to [n] \\ \sigma &\mapsto \sigma(n) \end{aligned}$$

soit surjective. Alors, avec des notations et dans un sens évidentes, on a

a) $$pgcd_{\sigma\in\Sigma}\ c_\nu\ (\underline{f}_\sigma) = 1,$$

b) $$pgcd_{\sigma\in\Sigma}\ {}^a\Theta_\nu\ (\underline{f}_\sigma) = {}^a\mathrm{Res}\,(f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

dans A .

Preuve : Une fois connues les assertions de (5.3.11), il suffit de paraphraser la preuve de ([J5] 3.10.16 (ii)).

5.3.14 Restant pour le moment en situation générique standard sur un anneau commutatif k, il peut arriver, pour certaines valeurs des suites $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ et de l'entier $\nu < \min_i(d_i)$, que le polynôme ${}^a\Theta_\nu\ (\underline{f})$ ait même degré total (par rapport à l'ensemble des coefficients de tous les f_i) que ${}^a\text{Res}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Dans ce cas, utilisant (5.3.8) et la fin de (5.3.9), on voit que

$$ {}^a\Theta_\nu\ (\underline{f}) = {}^a\text{Res}\ (f_1, f_2, \cdots, f_n). $$

De telles situations se rencontrent surtout dans le cas isotrope, où $m_i = 1$ pour tout $i \in [n]$. Ainsi, pour $n = 3$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, une liste exhaustive en est donnée ([J5] 3.10.22) à permutation des indices près par :

a)	$d_1 = d_2 = d_3 = t$	$\nu = t-1, t-2$	(si $t \geq 2$ pour le $2^{\text{ème}}$)
b)	$(d_1, d_2, d_3) = (t, t, t+1)$	$\nu = t-1$	
c)	$(d_1, d_2, d_3) = (t, t+1, t+1)$	$\nu = t-1.$	

Voici un autre cas où cela se produit.

Proposition 5.3.15.— *En situation générique (standard) sur un anneau commutatif k, supposons que $n = 4$ et*

$$ \begin{array}{lll} \underline{m} & = (m_1, m_2, m_3, m_4) & = (1, 1, 1, d) \\ \underline{d} & = (d_1, d_2, d_3, d_4) & = (d, d, d, d), \end{array} $$

où d est un entier ≥ 2. Alors on a les égalités

$$ \begin{aligned} {}^a\Theta_{d-1}(f_1, f_2, f_3, f_4) &= {}^a\Theta_{d-2}(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ &= {}^a\text{Res}\ (f_1, f_2, f_3, f_4) \end{aligned} $$

dans $A = k[U_{i\alpha} | 1 \leq i \leq 4,\ \deg_a(X^\alpha) = d]$.

Preuve : Avec les notations de (1.1), on a : $\delta = 3d - 3$,

$$ \chi\ := \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{pgcd(m_1, m_2, m_3, m_4)} = d, $$

$$ \text{deg tot }{}^a\text{Res}\ (f_1, f_2, f_3, f_4) = \frac{\sum_{i=1}^4 d_1 \cdots \hat{d_i} \cdots d_4}{\chi} = 4d^2. $$

Soit $0 \leq \nu < d$. Le degré total de ${}^a\Theta_\nu\ (\underline{f})$ est

$$4|\text{ Nonrep }(\underline{d}\ ;\ \delta-\nu)| + |\text{ Rep }(\underline{d}\ ;\ \delta-\nu)|\ .$$

On a

$$\text{Nonrep }(\underline{d}\ ;\ \delta-\nu)$$

$$= \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) \in \mathbf{N}^4 | \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = \delta-\nu \text{ et } 0 \leq \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \leq d-1, \alpha_4 = 0\}.$$

Posant $\beta_i = d-1-\alpha_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, on voit que

$$\begin{aligned}&\text{Nonrep }(\underline{d}\ ;\ \delta-\nu)\\ &\simeq \{(\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in \mathbf{N}^3 | \beta_1+\beta_2+\beta_3 = \nu \text{ et } 0 \leq \beta_1,\beta_2,\beta_3 \leq d-1\}\\ &=\ \text{Mon }(3\ ;\ \nu),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de ce que, par hypothèse, $\nu < d$. Par suite,

$$\text{(5.3.16)} \qquad |\text{ Nonrep }(\underline{d}\ ;\ \delta-\nu)| = \binom{\nu+2}{2} \qquad (\nu < d)$$

Dans la suite, pour tout $t \in \mathbf{N}$, on note Mon $(3\ ;\ t)$ l'ensemble des monômes de degré t (pour la graduation usuelle deg $(X_i) = 1$) en les variables X_1, X_2, X_3.

Lorsque $\nu = d-1$, on a : $\delta-\nu = 2d-2$. Il est clair que Dod $(\underline{d}\ ;\ 2d-2) = \phi$, d'où

Rep $(\underline{d}\ ;\ 2d-2)$

$$= X_1^d \text{ Mon }(3\ ;\ d-2) \coprod X_2^d \text{ Mon }(3\ ;\ d-2) \coprod X_3^d \text{ Mon }(3\ ;\ d-2) \coprod X_4 \text{ Mon }(3\ ;\ d-2),$$

et par suite

$$|\text{ Rep }(\underline{d}\ ;\ 2d-2)| = 4\binom{d}{2}.$$

De même, pour $\nu = d-2$, donc $\delta-\nu = 2d-1$, l'égalité Dod $(\underline{d}\ ;\ 2d-1) = \emptyset$ montre que

Rep $(\underline{d}\ ;\ 2d-1)$

$$= X_1^d \text{ Mon }(3\ ;\ d-1) \coprod X_2^d \text{ Mon }(3\ ;\ d-1) \coprod X_3^d \text{ Mon }(3\ ;\ d-1) \coprod X_4 \text{ Mon }(3\ ;\ d-1),$$

et par suite

$$|\text{ Rep }(\underline{d}\ ;\ 2d-1)| = 4\binom{d+1}{2}.$$

Comparant avec (5.3.16), on en déduit que, pour $\nu = d-1, d-2$, on a

$$\begin{aligned} \text{deg tot } {}^a\Theta_\nu\ (\underline{f}) &= 4\binom{d}{2} + 4\binom{d+1}{2} = 4d^2 \\ &= \text{ deg tot } {}^a\text{Res } (f_1, f_2, f_3, f_4). \end{aligned}$$

D'où la conclusion en utilisant (5.3.14).

5.3.17 L'intérêt de la proposition 5.3.15 provient des considérations géométriques suivantes.

Soient n un entier ≥ 1 et k un corps, disons algébriquement clos. Supposons donnés $n+1$ polynômes $f_i \in k[X_1, \cdots, X_n]$ $(1 \leq i \leq n+1)$ homogènes de même degré $d \geq 1$ (pour la graduation usuelle deg $(X_j) = 1$ pour tout $j \in [n]$). Lorsque les f_i $(i \in [n+1])$ n'ont aucun zéro commun dans $k^n \setminus 0$, ils définissent un morphisme de k-schémas

$$\begin{aligned} \varphi\ :\ P_k^{n-1} &\to P_k^n \\ (x_1, \cdots, x_n)^- &\mapsto (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \cdots, f_{n+1}(\underline{x}))^- \end{aligned}$$

dont on note Z l'image schématique, qui est donc un sous-schéma fermé et intègre de P_k^n. De plus, on a $Z \neq P_k^n$ pour des raisons de dimension.

Soit $(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}) \in k^{n+1} \setminus 0$. Le point $\xi := (t_1, t_2, \cdots, t_{n+1})^-$ de P_k^n appartient à Z si et seulement s'il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in k^n \setminus 0$ et $x_{n+1} \in k \setminus 0$ tels que

$$(5.3.18) \qquad f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - t_i x_{n+1} = 0 \text{ pour tout } i \in [n+1].$$

En fait, toute suite $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in k^{n+1} \setminus 0$ et satisfaisant aux égalités (5.3.18) est telle que $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0$, et $x_{n+1} \neq 0$. Montrons-le. Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$, il résulte de (5.3.18) que $t_i x_{n+1} = 0$ pour tout i, donc $x_{n+1} = 0$ puisque l'un des t_i n'est pas nul. Si $x_{n+1} = 0$, les égalités (5.3.18) s'écrivent $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ et impliquent $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ d'après l'hypothèse faite sur les f_i.

Affectant les indéterminées $X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ des poids $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ et $m_{n+1} = d$, de sorte que les polynômes

$$f_i(X_1, X_2, \cdots, X_n) - T_i X_{n+1} \in k[T_1, \cdots, T_{n+1}][X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$$

deviennent isobares de poids d en les X_i, posons

$$h(T_1, \cdots, T_{n+1}) := {}^a\text{Res}(f_1 - T_1 X_{n+1}, \cdots, f_{n+1} - T_{n+1} X_{n+1}) \in k[T_1, T_2, \cdots, T_{n+1}].$$

Avec cette notation, la discussion qui précède montre que, ensemblistement,

$$Z = \{(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1})^- \in P_k^n | h(t_1, t_2, \cdots, t_{n+1}) = 0\}.$$

Bien entendu, cela suggère que le polynôme h est homogène par rapport à l'ensemble des variables $T_1, T_2, \cdots, T_{n+1}$ affectés du degré 1, ce que nous allons vérifier. D'après ([J3] 6.3.9.4 d) (voir Errata), en situation générique standard définie par deux suites $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ et $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, le résultant anisotrope devient isobare de poids

$$\frac{d_1 d_2 \cdots d_n}{\chi m_n}$$

lorsqu'on affecte chaque $U_{i\alpha}$ du poids α_n. Dans la situation spécialisée qui nous intéresse, l'entier n est remplacé par $n+1$, et le seul monôme divisible par X_{n+1} du support de $f_i - T_i X_{n+1}$ est X_{n+1}, affecté du coefficient $-T_i$. Par suite, le polynôme h est homogène de degré

$$\frac{d_1 d_2 \cdots d_{n+1}}{\chi m_{n+1}} = \frac{d^{n+1}}{d \times d} = d^{n-1}.$$

L'hypersurface $Y\ :\ h = 0$ de P_k^n est donc de degré d^{n-1} et telle que $Z = Y^{\text{réd}}$, donc $\dim\,(Z) = n-1$.

Par ailleurs, notant D le degré du morphisme φ, bien défini par ce qui précède, une application des théorèmes de Bertini que nous allons expliciter montre que

$$\deg\,(Z) = d^{n-1}/D. \tag{5.3.19}$$

Il en résulte que h est la puissance $D^{\text{ème}}$ d'un polynôme irréductible H de degré $(d^{n-1})/D$.

Montrons (5.3.19). Etant données $n-1$ formes linéaires générales $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{n-1}$, soient

$$\ell_j = \sum_{i=1}^{n+1} u_{ji} T_i,$$

posons $\Delta = V(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{n-1}) \subset P_k^n$. Par Bertini, le schéma $Z \cap \Delta$ est fini et réduit, et le schéma $\varphi^{-1}(Z \cap \Delta)$ est fini et localement libre de degré D sur $Z \cap \Delta$. Par ailleurs, il résulte du théorème de Bezout que

$$\varphi^{-1}(Z \cap \Delta) = V\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_{ji} f_i | 1 \leq j \leq n-1\right)$$

a pour degré d^{n-1} dans P_k^{n-1} d'où, comme annoncé,

$$|Z \cap \Delta| = \frac{\deg\,[\varphi^{-1}(Z \cap \Delta)]}{D} = \frac{d^{n-1}}{D}\ .$$

Lorsque φ est un plongement, on a $D = 1$, et l'équation de Z dans P_k^n est $h = 0$, avec, rappelons-le,

$$h(T_1, T_2, \cdots, T_{n+1}) = {}^a\mathrm{Res}(f_1 - T_1 X_{n+1}, \cdots, f_{n+1} - T_{n+1} X_{n+1}).$$

En particulier, *lorsque $n = 3$ et φ est un plongement la proposition (5.3.15) fournit explicitement h comme spécialisation d'un polynôme à coefficients dans* $\mathbf{Z}$.

5.3.20 Un autre cas, cette fois-ci seulement semi-standard, où l'on peut, grâce aux considérations de (5.3.9), donner une expression polynomiale explicite pour le résultant anisotrope est le suivant.

On prend $n = 4$ et, étant donné un entier $d \geq 2$, on prend pour suites

$$\begin{aligned} \underline{m} &= (1, 1, 1, d-1) \\ \underline{d} &= (d, d-1, d-1, d-1). \end{aligned}$$

Dans cette situation, on a

$$\delta = 3d - 5 \text{ et } \chi \ := \frac{m_1 m_2 m_3 m_4}{pgcd(m_1, m_2, m_3, m_4)} = d - 1.$$

Il est immédiat que les conditions $(H_1), (H_2), (H_3)$ rappelées en 2.2.B) sont réalisées. En outre, pour toute suite (i, j, s) d'entiers compris entre 1 et 4, on a

$$d_s \in \ ppcm(m_i, m_j) + \sum_{1 \leq \ell \leq 4} \mathbf{N} m_\ell.$$

Par suite ([J3] 6.3.10.8 et 6.3.10.10), le résultant en situation générique sur $\mathbf{Z}$ est absolument irréductible, et on peut le normaliser de sorte que

$${}^a\mathrm{Res}\ (X_1^d, X_2^{d-1}, X_3^{d-1}, X_4) = 1 \text{ dans } \mathbf{Z}.$$

Pour tout anneau commutatif k, posant ${}^a\mathrm{Res} \ := \ {}^a_{\mathbf{Z}}\mathrm{Res}$, on a, en situation générique sur k,

$$\mathcal{A} \ := H^0_{\mathfrak{M}}(B)_0 = \ ({}^a\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, f_3, f_4))$$

dans A. Enfin, le degré total du résultant est

$$\begin{aligned} \text{deg tot } {}^a\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, f_3, f_4) &= \frac{(d-1)^3 + 3d(d-1)^2}{\chi} \\ &= (d-1)(4d-1). \end{aligned}$$

D'après (5.3.9), pour tout $\nu < \ \min_i(d_i) = d - 1$, l'élément ${}^a\Theta_\nu\ (\underline{f})$ est une forme d'inertie de degré 0 pour l'idéal (f_1, f_2, f_3, f_4) de C, donc il existe un (unique) $c_\nu\ (\underline{f}) \in A$ tel que

$${}^a\Theta_\nu\ (\underline{f}) \ = \ c_\nu\ (\underline{f})\ {}^a\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

dans A. Nous allons montrer que

$$\text{deg tot } {}^a\Theta_{d-2}\ (\underline{f}) \ = \ (d-1)(4d-1).$$

Il en résultera que $c_\nu\ (\underline{f})\ \in k$, d'où $c_\nu\ (\underline{f})\ = 1$ par spécialisation $f_i \mapsto X_i^{d_i/m_i}$ (utiliser (5.3.8)). D'où l'égalité

$$(5.3.21) \qquad {}^a\Theta_{d-2}\ (\underline{f})\ =\ {}^a\mathrm{Res}\ (f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ dans } A\ .$$

Vérifions le. Par définition de ${}^a\Theta_{d-2}\ (\underline{f})$, on a

$$(5.3.22) \qquad \text{deg tot } {}^a\Theta_{d-2}\ (\underline{f}) = 4|\ \mathrm{Nonrep}\ (\underline{d}\ ;\ 2d-3)| + |\ \mathrm{Rep}\ (\underline{d}\ ;\ 2d-3)|.$$

Explicitons le deuxième membre. Tout d'abord,

Nonrep $(\underline{d}\ ;\ 2d-3)$

$$= \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbf{N}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + (d-1)\alpha_4 = 2d-3 \\ \alpha_1 \le d-1\ ;\ \alpha_2, \alpha_3 \le d-2\ ;\ \alpha_4 = 0 \end{array} \right\}\ ,$$

soit, par la substitution $\beta_1 = d-1-\alpha_1, \beta_2 = d-2-\alpha_2, \beta_3 = d-2-\alpha_3$,

$$\begin{aligned} &\simeq \{(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbf{N}^3 | \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = d-2\ ;\ \beta_1 \le d-1\ ;\ \beta_2 \le d-2\ ;\ \beta_3 \le d-2\} \\ &=\ \mathrm{Mon}\ (3\ ;\ d-2). \end{aligned}$$

D'où

$$(5.3.23) \qquad |\ \mathrm{Nonrep}\ (\underline{d}\ ;\ 2d-3)| = \binom{d}{2}$$

Par ailleurs, il est clair que Dod $(\underline{d}\ ;\ 2d-3) = \emptyset$, d'où

Rep $(\underline{d}\ ;\ 2d-3)$

$$= X_1^d\ \mathrm{Mon}\ (3\ ;\ d{-}3) \coprod X_2^{d-1}\ \mathrm{Mon}\ (3\ ;\ d{-}2) \coprod X_3^{d-1}\ \mathrm{Mon}\ (3\ ;\ d{-}2) \coprod X_4\ \mathrm{Mon}\ (3\ ;\ d{-}2).$$

Par suite,

$$(5.3.24) \qquad |\ \mathrm{Rep}\ (\underline{d}\ ;\ 2d-3)| = \binom{d-1}{2} + 3\binom{d}{2}$$

Par comparaison de (5.3.22), (5.3.23) et (5.3.24), on en déduit bien que

$$\begin{aligned} \text{deg tot } {}^a\Theta_{d-2}\ (\underline{f}) &= 7\binom{d}{2} + \binom{d-1}{2} \\ &= \frac{d-1}{2}(7d + (d-2)) = (d-1)(4d-1) \end{aligned}$$

comme annoncé.

5.3.25 Un exemple d'application de (5.3.21) est le suivant. Soient k un corps algébriquement clos, d un entier ≥ 2, et $f, g, h \in k[X, Y, Z]$ trois polynômes homogènes (au sens usuel) de degré d de la forme

$$\begin{cases} f = u\varphi + ZF \\ g = v\varphi + ZG \\ h = w\varphi + ZH\ , \end{cases}$$

avec $\varphi \in k[X, Y]_d, F, G, H \in k[X, Y, Z]_{d-1}$ et $u, v, w \in k$. Alors $(f, g, h) \subset (Z, \varphi)$ dans $k[X, Y, Z)$ et les courbes

$$\Gamma_f\ :\ f = 0, \Gamma_g\ :\ g = 0, \Gamma_h\ :\ h = 0$$

ont en commun à l'infini

- les $(x, y, 0)^-$ tels que $\varphi(x, y) = 0$ si $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$

- la droite à l'infini si $u = v = w = 0$.

Lorsque $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$, on peut chercher des conditions nécessaires, et dans une certaine mesure suffisantes, pour que les courbes $\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_h$ aient en commun un point "à distance finie" $(x_0, y_0, z_0)^-$, autrement dit tel que $z_0 \neq 0$. Si tel est le cas, posant $t_0 := \frac{\varphi(x_0, y_0)}{z_0}$, le quadruplet (x_0, y_0, z_0, t_0) vérifie le système

$$\begin{cases} \varphi(x_0, y_0) - t_0 z_0 = 0 \\ F(x_0, y_0, z_0) + ut_0 = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) + vt_0 = 0 \\ H(x_0, y_0, z_0) + wt_0 = 0 \end{cases}$$

dans k^4, et, bien sûr, $(x_0, y_0, z_0, t_0) \neq 0$ puisque $(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Munissons l'indéterminée T du poids $d - 1$ et, comme de juste, X, Y, Z du poids 1. Avec ces poids, le système précédent peut s'interpréter en disant que $(x_0, y_0, z_0, t_0)^-$ est une solution du système

$$(I) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) - tz = 0 \\ F(x, y, z) + ut = 0 \\ G(x, y, z) + vt = 0 \\ H(x, y, z) + wt = 0 \end{cases}$$

dans ${}^aP^3_k(x, y, z, t)$. Par suite, si $\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_h$ ont un point commun à distance finie, on a l'égalité

$${}^a\mathrm{Res}\ (\varphi - TZ, F + uT, G + vT, H + wT) = 0 \text{ dans } k,$$

soit, d'après (5.3.21)

$$(5.3.26) \qquad {}^a\Theta_{d-2}\ (\varphi - TZ, F + uT, G + vT, H + wT) = 0$$

dans k, où le premier membre est un polynôme explicite à coefficients dans $\mathbf{Z}$ en u, v, w et les coefficients des polynômes F, G, H.

Pour préciser dans quelle mesure (5.3.26) est une condition suffisante pour que $\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_h$ aient un point commun à distance finie, introduisons le système

$$(II) \qquad \begin{cases} \varphi(x,y) = 0 \\ F(x,y,0) + ut = 0 \\ G(x,y,0) + vt = 0 \\ H(x,y,0) + wt = 0 \end{cases}$$

dans ${}^aP_k^2(x,y,t)$ déduit de (*I*) par "spécialisation $z \mapsto 0$".

Avec ces notations, on peut formuler l'énoncé suivant.

Proposition 5.3.27.— *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) On a ${}^a\Theta_{d-2}\ (\varphi - TZ, F + uT, G + vT, H + wT) = 0$ *dans* k.

(ii) Le système (I) a une solution dans ${}^aP_k^3(x,y,z,t)$.

(iii) L'une des condition suivantes est réalisée.

a) Les courbes $\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_h$ *ont un point en commun à distance finie.*

b) Le système (II) a une solution dans ${}^aP_k^2(x,y,t)$.

Preuve : L'équivalence de (i) et (ii) résulte de (5.3.21). Que (iii) a) implique (ii) résulte de la discussion précédente. Si $(x_0, y_0, t_0)^-$ est une solution de (*II*) dans ${}^aP_k^2(x,y,t)$ alors $(x_0, y_0, 0, t_0)^-$ est une solution de (*I*) dans ${}^aP_k^3(x,y,z,t)$, d'où (iii) b) $\Rightarrow$ (ii). Montrons (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $(x_0, y_0, z_0, t_0)^-$ une solution de (*I*) dans ${}^aP_k^3(x,y,z,t)$. Si $z_0 = 0$, il est clair que $(x_0, y_0, t_0)^-$ est une solution de (*II*) dans ${}^aP_k^2(x,y,t)$, d'où (iii) b). Si $z_0 \neq 0$, on voit aussitôt (multiplier les deux membres des 3 dernières équations de (*I*) par z, et tenir compte de la première) que $(x_0, y_0, z_0)^-$ est un point commun à distance finie pour $\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_h$, d'où (iii) a).

Corollaire 5.3.28.— *Lorsque le système (II) n'a pas de solution dans* ${}^aP_k^2(x,y,t)$, *la condition*

$${}^a\Theta_{d-2}\ (\varphi - TZ, F + uT, G + vT, H + wT) = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que les courbes $\Gamma_f, \Gamma_g, \Gamma_h$ *aient un point commun à distance finie dans* P_k^2.

Un *exemple* simple de telles considérations est le suivant, dans lequel le résultant anisotrope est un résultant ordinaire.

Soient k un corps algébriquement clos, de caractéristique $\neq 2$ pour simplifier, et

$$\begin{array}{lclcl} C_u : & f_u := u_0(x^2+y^2) & + & z(u_1x+u_2y+u_3z) & =0 \\ C_v : & f_v := v_0(x^2+y^2) & + & z(v_1x+v_2y+v_3z) & =0 \\ C_w : & f_w := w_0(x^2+y^2) & + & z(w_1x+w_2y+w_3z) & =0 \end{array}$$

les équations de trois “cercles-droites” dans P_k^2.

Posons

$$\ell_u \ := \ u_1X+u_2Y+u_3Z+u_0T \in k[X,Y,Z,T]_1,$$

et définissons de manière analogue ℓ_v, ℓ_w. Notons $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ et Δ_3 les déterminants définis par l'égalité

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = X_0\Delta_0 + X_1\Delta_1 + X_2\Delta_2 + X_3\Delta_3$$

dans $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Avec ces notations, on a ([J3] 5.8, 5.4.4)

$$\begin{aligned} & \text{Res }(X^2+Y^2-TZ, \ell_u, \ell_v, \ell_w) \\ = & \text{ Res }(\ell_u, \ell_v, \ell_w, X^2+Y^2-TZ) \qquad \text{(le premier degré est pair)} \\ = & \ \Delta_1^2 + \Delta_2^2 - \Delta_0\Delta_3. \end{aligned}$$

D'après (5.3.27), la condition $\Delta_1^2+\Delta_2^2-\Delta_0\Delta_3 = 0$ exprime que

- ou bien les “cercles-droites” C_u, C_v, C_w ont un point commun à distance finie,

- ou bien le système

$$(S) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2+y^2 &= 0 \\ u_1x+u_2y+u_0t &= 0 \\ v_1x+v_2y+v_0t &= 0 \\ w_1x+w_2y+w_0t &= 0 \end{aligned} \right.$$

a une solution dans $k^3 \setminus 0$.

Lorsque, comme il se doit, on suppose $(u_o, v_0, w_0) \neq (0,0,0)$ alors une solution $(x_o, y_0, t_0) \neq 0$ de (S) est telle que $(x_0, y_0) \neq 0$, donc il existe $\lambda \in k^\star$ tel que $(x_0, y_0) = \lambda(i,1)$ ou $\lambda(-i,1)$ avec $i^2 = -1$.

Lorsque, par exemple, les courbes C_u, C_v, C_w sont de “vrais cercles”, on se ramène au cas où $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et il résulte de (S) que,

$$\begin{cases} \text{soit } u_1 i + u_2 = v_1 i + v_2 = w_1 i + w_2 \\ \text{soit } -u_1 i + u_2 = -v_1 i + v_2 = -w_1 i + w_2 \ . \end{cases}$$

Lorsque $k = \mathbf{C}$ et les équations sont à coefficients réels avec $u_0 = v_0 = w_0 = 1$, le système (S) ne peut avoir de solution que si $u_1 = v_1 = w_1$ et $u_2 = v_2 = w_2$, autrement dit que si les cercles C_u, C_v, C_w sont concentriques.

Pour trois cercles réels non concentriques, la condition $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = \Delta_0 \Delta_3$ équivaut donc à l'existence d'un point commun à distance finie.

5.3.29 Nous allons préciser ce qui précède en montrant que, *en général*, le polynôme ${}^a\mathrm{Res}\,(\varphi - TZ, F + uT, G + vT, H + wT)$ est irréductible. Pour cela, nous allons nous placer dans une situation un peu plus générale, dans laquelle nous allons développer une théorie d'*élimination réduite.*

Soient n un entier $\geq 1, X_1, X_2, \cdots, X_n$ des indéterminées de degrés $m_i = 1 (i \in [n]), k$ un anneau commutatif et $\varphi \in k[X_1, X_2, \cdots, X_n]_d$ un polynôme homogène de degré $d \geq 2$. Introduisons de nouvelles indéterminées V_i $(1 \leq i \leq n)$ et $U_{i\alpha}$ $(1 \leq i \leq n, |\alpha| = d-1)$, et posons

$$\begin{aligned} A &= k[U_{i\alpha}(i \in [n], |\alpha| = d-1) \ ; \ V_1, V_2, \cdots, V_n] \\ C &= A[X_1, X_2, \cdots, X_n] \qquad (\deg X_i = 1 \text{ pour tout } i) \\ f_i &= X_n \left(\sum_{|\alpha| = d-1} U_{i\alpha} X^\alpha \right) + V_i \varphi \\ g_i &= \sum_{|\alpha| = d-1} U_{i\alpha} X^\alpha \\ B &= C/(f_1, f_2, \cdots, f_n) \ . \end{aligned}$$

Dans $P_A^{n-1} = \mathrm{Proj}\ (C)$, on a l'inclusion schématique

$$V((X_n, \varphi)) \subset V((f_1, \cdots, f_n)) = \mathrm{Proj}\ (B),$$

et on se propose de déterminer l'image fermée du morphisme de projection canonique

$$W \ := \ \mathrm{Proj}\ (B) \setminus V(X_n, \varphi) \to \ \mathrm{spec}\ (A)$$

définie par l'idéal

$$\mathfrak{b} \ := [H^0_{(X_n, \varphi)}(B)]_0.$$

dans A.

Remarquons tout d'abord qu'on a un isomorphisme de $k[U_{i\alpha}(i \in [n], |\alpha| = d-1)]$ $[X_1, X_2, \cdots, X_n]$-algèbres

$$\begin{aligned} B_\varphi &\tilde{\to} k[(U_{i\alpha})(i \in [n], |\alpha| = d-1)][X_1, \cdots, X_n]_\varphi \\ V_i &\mapsto -\varphi^{-1} X_n g_i \qquad (i \in [n]) \end{aligned}$$

qui montre que X_n ne divise pas zéro dans B_φ, donc que $B_\varphi \subset B_{X_n\varphi}$. Il en résulte

$$\begin{aligned} H^0_{(X_n,\varphi)}(B) : &= \text{ Ker } (\text{can } : B \to B_{X_n} \times B_\varphi) \\ &= H^0_{X_n}(B) \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

dans B, et en particulier

$$\mathfrak{b} = H^0_{X_n}(B)_0 \ . \tag{5.3.31}$$

Introduisons maintenant une nouvelle indéterminée X_{n+1} affectée du poids $m_{n+1} := d-1$, et posons

$$\begin{aligned} F_i &:= \left(\sum_{\substack{|\alpha|=d-1 \\ \alpha \in \mathbf{N}^n}} U_{i\alpha} X^\alpha \right) + V_i X_{n+1} = g_i + V_i X_{n+1} \quad (i \in [n]) \\ \psi &:= \varphi - X_n X_{n+1} \end{aligned}$$

dans $A[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]_{d-1}$ et $k[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]_d$ respectivement, ainsi que

et
$$\begin{aligned} D : &= A[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]/(\psi, F_1, F_2, \cdots, F_n) \\ \mathcal{M} \ &= (X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}) \subset A[X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]. \end{aligned}$$

Les morphismes de $A[X_1, \cdots, X_n]$-algèbres

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & : & D_{X_n} & \to & & B_{X_n} \\ & & X_{n+1} & \mapsto & & \varphi/X_n \\ \mu & : & B_{X_n} & \to & D_{X_n} & \text{canonique} \end{array}$$

(dans D_{X_n}, on a : $X_{n+1} = \varphi/X_n$ car $\psi = 0$) sont inverses l'un de l'autre. En particulier, on a

$$\mathfrak{b} = H^0_{X_n}(D)_0 \ . \tag{5.3.32}$$

Les polynômes $F_1, F_2, \cdots, F_n \in A[X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}]$ sont génériques de leurs poids ($= d-1$) sur k ; par suite (2.3.3), la suite $(F_1, F_2, \cdots, F_n)$ est régulière dans $A[X_1, \cdots, X_{n+1}]$.

Par ailleurs, on a pour tout $i \in [n]$ un isomorphisme de $k[V_1, \cdots, V_n, X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$-algèbres

(5.3.33) $$[A[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(F_1, F_2, \cdots, F_n)]_{X_i}$$

$$\tilde{\to} k[U_{j\alpha} | X^\alpha \neq X_i^{d-1} \; ; \; V_1, V_2, \cdots, V_n][X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]_{X_i}$$

$$U_{j\alpha} \mapsto \begin{cases} U_{j\alpha} & \text{si} \quad X^\alpha \neq X_i^{d-1} \\ -X_i^{1-d} \left(V_j X_{n+1} + \sum_{X^\alpha \neq X_i^{d-1}} U_{j\alpha} X^\alpha \right) & \text{si } X^\alpha = X_i^{d-1} \end{cases}$$

et de même un isomorphisme de $k[U_{i\alpha} | i \in [n], |\alpha| = d-1][X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]$-algèbres

(5.3.34) $$[A[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(F_1, F_2, \cdots, F_n)]_{X_{n+1}}$$

$$\tilde{\to} k[U_{i\alpha} | i \in [n], |\alpha| = d-1][X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}]_{X_{n+1}}$$

$$V_i \mapsto -g_i / X_{n+1} \qquad (i \in [n]).$$

Au vu de ces isomorphimes, le lemme de Dedekind-Mertens montre que $\psi := \varphi - X_n X_{n+1}$ ne divise pas zéro dans les anneaux $[A[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(F_1, \cdots, F_n)]_{X_i}$ $(1 \leq i \leq n+1)$. On en déduit d'abord que $(F_1, F_2, \cdots, F_n, \psi)$ est régulière dans $A[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ en dehors de $V(\mathcal{M})$, puis régulière dans n'importe quel ordre d'après (1.5.1).

Supposons que (X_n, φ) *soit une suite régulière de* $k[X_1, \cdots, X_n]$ autrement dit que $\bar{\varphi} := \varphi(X_1, \cdots, X_{n-1}, 0)$ ne divise pas zéro dans $k[X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}]$. Alors, pour raison d'homogénéité, la suite (φ, X_n) est aussi régulière, donc φ ne divise pas zéro dans $k[X_1, \cdots, X_n]$. De plus, nous allons voir que, pour tout $i \in [n+1]$, *l'élément* X_i *n'est pas diviseur de zéro* dans

$$R := k[X_1, \cdots, X_{n+1}]/(\varphi - X_n X_{n+1}).$$

Plus précisément, la suite $(X_i, \varphi - X_n X_{n+1})$ est (commutativement) régulière, ou encore la classe de $\varphi - X_n X_{n+1}$ dans $k[X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{n+1}]$ par $X_i \mapsto 0$ n'est pas diviseur de 0 dans cet anneau. Si $i \neq n, n+1$, c'est une conséquence immédiate du lemme de Dedekind-Mertens ; pour $i = n$ (resp. $n+1$), cela résulte de ce que $\bar{\varphi}$ (resp. φ) n'est pas diviseur de zéro dans $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$ (resp. $k[X_1, \cdots, X_n]$).

Sous l'hypothèse que $\bar{\varphi}$ *ne divise pas zéro dans* $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$, il résulte de ce qui précède et des isomorphismes (5.3.33) et (5.3.34) que, pour tout $(i,j) \in [n+1]^2$, l'élément X_i ne divise pas 0 dans D_{X_j} d'où les égalités

(5.3.35) $$H^0_{X_i}(D) = H^0_{\mathfrak{M}}(D) \qquad (i \in [n+1])$$

dans ce cas.

Après ces considérations, nous sommes en mesure de prouver l'assertion suivante.

Proposition 5.3.36.— *Sous les hypothèses préliminaires de (5.3.29), les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Lorsque $\bar{\varphi} := \varphi(X_1, \cdots, X_{n-1}, 0)$ *ne divise pas zéro dans* $k[X_1, \cdots, X_{n-1}]$, *on a l'égalité*

$$\mathfrak{b} := H^0_{(X_n, \varphi)}(B)_0 = H^0_{\mathfrak{M}}(D)_0$$

dans A *et l'idéal* $\mathfrak{b}$ *de* A *n'est pas nilpotent.*

(ii) Lorsque l'anneau k *est intègre et* φ *n'est pas divisible par* X_n *dans* $k[X_1, \cdots, X_n]$, *l' idéal* $\mathfrak{b}$ *de* A *est premier.*

(iii) Lorsque l'anneau k *est factoriel et* X_n *ne divise pas* φ *dans* $k[X_1, \cdots, X_n]$, *alors l'idéal* $\mathfrak{b}$ *est (premier et) engendré par*

$$^a\mathrm{Res}\ (\psi, F_1, F_2, \cdots, F_n)$$

dans A.

Preuve : La première partie de l'assertion (i) est conséquence de (5.3.32) et (5.3.35). Pour la deuxième, il suffit d'exhiber une fibre géométrique vide du morphisme de projection canonique $\mathrm{Proj}\ (D) \to\ \mathrm{Spec}\ (A)$. Comme $\bar{\varphi}$ n'est pas nilpotent, on peut, quitte à remplacer k par la clôture algébrique de l'un de ses corps résiduels, supposer que k est un corps algébriquement clos. Alors, comme $\bar{\varphi} \neq 0$, on a *a fortiori* $\varphi \neq 0$. Dans ce cas, comme φ est homogène, il n'est pas divisible par $X_n - 1$, et il résulte du théorème des zéros de Hilbert qu'il existe $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in k^{n-1}$ tel que

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 1) \neq 0\ .$$

Alors la spécialisation $F_i \mapsto (X_i - x_iX_n)^{d-1}(1 \leq i \leq n-1)$ et $F_n \mapsto X_{n+1}$ définit un point rationnel de $\mathrm{spec}(A)$ dont la fibre dans $\mathrm{Proj}(D)$ est vide : si $\xi = (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1})^- \in {}^a\mathbf{P}^n_k$ appartient à $F_1 = F_2 = \cdots = F_n = 0$, on a

$$y_i = x_iy_n(1 \leq i \leq n-1) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 0\ ,$$

donc en particulier $y_n \neq 0$, et alors

$$\psi(y_1, \cdots, y_{n+1}) = \varphi(y_n) - y_ny_{n+1} = y_n^d\varphi(x_1, \cdots, x_{n-1}) \neq 0$$

par hypothèse.

On peut aussi démontrer que $\mathfrak{b}$ n'est pas nilpotent sans recourir au théorème des zéros de Hilbert comme suit. D'après la première partie de (i), l'idéal $\mathfrak{b}$ a même racine que l'idéal engendré par

$$\mathrm{Res} := \mathrm{Res}(g_1 + V_1X_{n+1}^{d-1}, \cdots, g_n + V_nX_{n+1}^{d-1}, \varphi - X_nX_{n+1}^{d-1}),$$

et il suffit d'exhiber une spécialisation non nilpotente de Res. Pour cela, on choisit $n-1$ formes linéaires génériques en $(X_1, \cdots, X_n)$

$$\ell_i \ := \ U_{i1}X_1 + U_{i2}X_2 + \cdots + U_{in}X_n,$$

et on fait la spécialisation

$$g_i + V_i X_{n+1}^{d-1} \mapsto \begin{cases} \ell_i^{d-1} \text{ pour } 1 \le i \le n-1 \\ X_{n+1}^{d-1} \text{ pour } i = n \ . \end{cases}$$

Alors Res se spécialise en

$$\begin{aligned} &\text{Res}\ (\ell_1^{d-1}, \ell_2^{d-1}, \cdots, \ell_{n-1}^{d-1}, X_{n+1}^{d-1}, \varphi - X_n X_{n+1}^{d-1}) \\ &= \pm\ \text{Res}\ (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{n-1}, \varphi)^{(d-1)^n} \end{aligned}$$

en utilisant les propriétés de transformation usuelles du résultant ([J3] 5.7 à 5.10). Par ailleurs, on sait ([J3] 5.4.4) que notant $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n \in k[U_{ij} | i \in [n-1], j \in [n]]$ les mineurs définis par l'égalité

$$\begin{vmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_n \\ U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n-1,1} & U_{n-1,2} & \cdots & U_{n-1,n} \end{vmatrix} = T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2 + \cdots + T_n\Delta_n$$

dans $k[T_1, T_2, \cdots, T_n]$, on a

$$\text{Res}\ (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_{n-1}, \varphi) = \varphi(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n)$$

dans $k[U_{ij} | i \in [n-1], j \in [n]]$. Or les éléments $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ sont algébriquement indépendants sur k ; comme φ n'est pas nilpotent dans $k[X_1, \cdots, X_n]$ ($\bar{\varphi}$ ne l'est pas !), le résultant Res $(\ell_1, \cdots, \ell_{n-1}, \varphi)$ ne l'est pas non plus.

A titre d'illustration de la théorie de l'élimination, voici une preuve de l'indépendance algébrique de $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ sur k. Introduisons une autre forme linéaire générique

$$\ell_n = U_{n1}X_1 + \cdots + U_{nn}X_n.$$

Alors, posant $R = k[U_{ij} | 1 \le i, j \le n], S = R[X_1, \cdots, X_n]/(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n)$, on a Res $(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n) =$ dét $(U_{ij}) =: \Delta, \Delta_i = (-1)^{n-1}\partial\Delta/\partial U_{ni}$ de sorte que ([J3] 6.4.3) on a un isomorphisme de R-algèbres $\mathbf{N}$-graduées

$$\begin{aligned} S/H^0_{\mathfrak{M}}(S) &\xrightarrow{\sim} \text{Rees}_{R/(\Delta)}(\bar{\Delta}_1, \cdots, \bar{\Delta}_n) \ . \\ X_i &\mapsto \bar{\Delta}_i \end{aligned}$$

Par ailleurs le morphisme de k-algèbres canonique

$$X_i \mapsto X_i \ : \ k[X_1, \cdots, X_n] \to S/H^0_{\mathfrak{M}}(S)$$

admet la rétraction $X_i \mapsto X_i, U_{ij} \mapsto 0$, donc est injectif. Par suite le morphisme composé

$$k[X_1, \cdots, X_n] \to \ \mathrm{Rees}_{R/(\Delta)}(\bar{\Delta}_1, \cdots, \bar{\Delta}_n)$$

est injectif. Pour des raisons d'homogénéité des Δ_i par rapport à l'ensemble des U_{ij}, on en conclut que les $\bar{\Delta}_i$ sont algébriquement indépendants dans $R/(\Delta)$, et a fortiori les Δ_i algébriquement indépendants sur k dans $k[U_{ij} | i \in [n-1], j \in [n]]$.

Montrons (ii). Comme $H^0_{(X_n,\varphi)}(B)_0 = H^0_{X_n}(B)_0 = H^0_{X_n}(D)_0$ par (5.3.30) et (5.3.32), il suffit de montrer que l'anneau D_{X_n} est intègre. Utilisant le lemme (5.3.37) ci-après, nous allons montrer que l'élément $\psi = \varphi - X_n X_{n+1}$ de $k[X_1, \cdots, X_{n+1}]$ est premier. Utilisant l'isomorphisme (5.3.33) avec $i = n$, on en déduira l'intégralité de D_{X_n} par extension polynomiale et localisation par X_n. Comme (X_n, φ) est par hypothèse une suite régulière de $k[X_1, \cdots, X_n]$, le fait que ψ soit premier est le cas particulier, où $a := -X_n, b := \varphi, T := X_{n+1}, S := k[X_1, \cdots, X_n]$, de l'énoncé facile suivant.

Lemme 5.3.37.— *Soient S un anneau commutatif intègre et (a, b) une suite régulière de S. Alors l'élément $aT + b$ de l'anneau de polynômes $S[T]$ est premier.*

Montrons-le. Comme (a, b) est régulière et le S-module $S[T]$ est plat, il est clair que la suite $(a, aT + b)$ de $S[T]$ est régulière. D'autre part, comme a ne divise pas zéro dans S, il résulte du lemme de Dedekind $-$ Mertens que $aT + b$ ne divise pas non plus zéro dans $S[T]$; appliquant le théorème 117 de [Kaplansky : Commutative rings], on en conclut, *sans utiliser l'intégrité de S*, que $(aT + b, a)$ est aussi régulière. Par suite, a ne divise pas zéro dans $S[T]/(aT + b)$, et le morphisme de localisation

$$S[T]/(aT + b) \to [S[T]/(aT + b)]_a$$

est injectif. Le composant avec l'isomorphisme de S-algèbres canonique

$$[S[T]/(aT + b)]_a \xrightarrow{\sim} \ S_a, \qquad T \mapsto -\frac{b}{a}$$

on en déduit un plongement $S[T]/(aT + b) \subset S_a$. Si maintenant S est intègre, il en est de même pour S_a, donc pour $S[T]/(aT + b)$ qui en est un sous-anneau, d'où le lemme.

Montrons (iii). Par (i) et (ii), nous savons que $\mathfrak{b}$ est premier et non nul. Posant ici, pour simplifier,

$$R \ := \ {}^a\mathrm{Res}\ (\psi, F_1, F_2, \cdots, F_n),$$

le théorème principal de l'élimination implique que $\mathfrak{b}$ a même racine que (R) (d'après (i), on a $\mathfrak{b} = H^0_{\mathfrak{M}}(D)_0$). Utilisant la factorialité de A, on conclut de tout ce qui précède que $\mathfrak{b}$ est engendré par un élément premier a de A (prendre pour a un diviseur premier de R), et que R est associé à une puissance convenable ℓ de a dans A :

$$R = ua^\ell \qquad (u \in A^* = k^*, \ell \geq 1)\ . \tag{5.3.38}$$

Nous allons montrer que $\ell = 1$ en faisant une spécialisation convenable. Pour cela, observons tout d'abord que la condition (ii) de ([J3] 6.3.10.8) est satisfaite ; posant

$$R^\# \ := \ \mathrm{Res}\,(\varphi - X_n X_{n+1}^{d-1}, g_1 + V_1 X_{n+1}^{d-1}, \cdots, g_n + V_n X_{n+1}^{d-1}),$$

il résulte donc de ([J3] 6.3.10.7) que

$$R^\# \sim R^{\frac{m_1 m_2 \cdots m_{n+1}}{pgcd(m_1,\cdots,m_{n+1})}} = R^{d-1}$$

dans A. D'où, utilisant (5.3.38),

$$R^\# \sim a^{\ell(d-1)} \qquad \text{dans } A. \tag{5.3.39}$$

Effectuons alors la spécialisation θ des coefficients définie par

$$\begin{aligned} &g_i \mapsto \bar{g}_i \ := \ g_i(X_1, \cdots, X_{n-1}, 0) \qquad (1 \leq i \leq n-1) \\ &V_i \mapsto 0 \qquad (1 \leq i \leq n-1) \\ &g_n \mapsto V X_n^{d-1} \qquad (V \text{ indéterminée})\ . \end{aligned}$$

Par (5.3.39), on a

$$\theta(R^\#) = \ \mathrm{Res}\,(\varphi - X_n X_{n+1}^{d-1}, \bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_{n-1}, V X_n^{d-1} + V_n X_{n+1}^{d-1}) \sim \theta(a)^{\ell(d-1)} \tag{5.3.40}$$

dans l'anneau factoriel

$$A' \ := \ k[(U_{i\alpha})(i \in [n-1], |\alpha| = d-1)][V, V_n].$$

Par ailleurs, la formule de Laplace ([J3] 5.10) implique que

$$\mathrm{Res}\,(\varphi - X_n X_{n+1}^{d-1}, \bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_{n-1}, V X_n^{d-1} + V_n X_{n+1}^{d-1}) = \pm\, \mathrm{Res}\,(\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_{n-1})^{d(d-1)} w^{(d-1)^{n-1}}\ ,$$

où, définissant $c \in k$ par $\varphi(0, \cdots, 0, X_n) = cX_n^d$,

$$\begin{aligned} w :&= \mathrm{Res}(cX_r^d - X_n X_{n+1}^{d-1}\ ,\ V X_n^{d-1} + V_n X_{n+1}^{d-1}) \\ &= V_n(V + cV_n)^{d-1} \end{aligned}$$

par multiplicativité et changement de base ([J3] 5.12), Finalement

$$\mathrm{Res}(\varphi - X_n X_{n+1}^{d-1}\ ,\ \bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_{n-1}, V X_n^{d-1} + V_n X_{n+1}^{d-1}) \tag{5.3.41}$$

$$= \pm \mathrm{Res}(\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_{n-1})^{d(d-1)} V_n^{(d-1)^{n-1}} (V + cV_n)^{(d-1)^n} .$$

Or les $\bar{g}_i$ sont génériques de leurs degrés, donc $\mathrm{Res}(\bar{g}_1, \cdots, \bar{g}_{n-1})$ est irréductible dans A'. Comparant (5.3.40) et (5.3.41), on en déduit que $\ell(d-1)$ divise $pgcd(d(d-1), (d-1)^{n-1}, (d-1)^n) = d-1$, donc $\ell = 1$ comme annoncé.

Références

[Br] A. Brill : Note über die Gleichung der auf einer Ebene abbildbaren Flächen, Math. Ann. 5 (1872) pp 401-403.

[Du] P. Dutton : Prime ideals attached to a module, Quart.J. Math. Oxford (2), 29 (1978), pp. 403-413.

[J1] J.P. Jouanolou : Singularités rationnelles du résultant, in Lecture Notes Springer 732 (1979) pp 183-214.

[J2] J.P. Jouanolou : Idéaux résultants, Adv. in Maths 37 (1980), pp.212-238.

[J3] J.P. Jouanolou : Le formalisme du résultant, Adv. in Maths 90 (1991) n° 2, pp.117-263.

[J4] J.P. Jouanolou : Aspects invariants de l'élimination, IRMA Strasbourg 1991, à paraître in Adv. in Maths.

[J5] J.P. Jouanolou : Formes d'inertie et résultant : un formulaire, IRMA Strasbourg 1992.

[J6] J.P. Jouanolou : Résultant et résidu de Grothendieck, IRMA Strasbourg 1992.

[No] D.G. Northcott : Finite free resolutions, Cambridge tracts in Maths 71 (1976).

N.B. Une liste essentiellement complète des textes classiques sur le résultant multivarié est donnée dans la bibliographie de [J3], [J4] et [J5].

Je remercie vivement les membres du groupe de calcul formel de l'Ecole Polytechnique, et plus particulièrement Marc GIUSTI, qui m'ont proposé de faire taper mon manuscrit par le secrétariat du Centre de Mathématiques de cette Ecole. Un grand merci aussi aux secrétaires qui ont accompli ce travail avec compétence et efficacité. Enfin, je suis extrêmement reconnaissant à Abdellah AL AMRANI qui a relu attentivement le texte, et m'a permis de corriger quelques incorrections et fautes "matérielles".