

К Л А С С И К И
Е С Т Е С Т В О З Н А Н И Я



МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ



О Г И З

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва. 1948. Ленинград

A. A. Markov

А. А. МАРКОВ

Selected Works

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Theory of Stochastic Processes

НЕПРЕРЫВНЫХ

ДРОВАЙ

Theory of Functions of a Complex Variable

ОТ НАУКИ



Биографический очерк
и приложения
Н. И. АХИЕЗЕРА



О Г И З

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва. 1948. Ленинград

Рассматривая теперь функции

$$\varphi_n\left(y, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_n(y, 0), \quad \varphi_n\left(y, -\frac{1}{2}\right),$$

которые, в силу наших условий, обращаются в

$$\cos(n \arccos y), \quad \frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n}, \quad \frac{\sin((n+1) \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

мы можем заключить, что корни уравнения

$$\frac{d^n(y^2-1)^n}{dy^n} = 0$$

заключены по одному в следующие интервалы:

$$\left(\cos \frac{\pi}{2n}, \cos \frac{\pi}{n+1}\right), \quad \left(\cos \frac{3\pi}{2n}, \cos \frac{2\pi}{n+1}\right), \\ \left(\cos \frac{5\pi}{2n}, \cos \frac{3\pi}{n+1}\right), \dots, \quad \left(\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}, \cos \frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Эти интервалы более узкие, чем предыдущие.

Петербург, 17 ноября 1885 г.



5. ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА

В настоящей статье мы будем рассматривать совокупность тех целых функций

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \dots + p_{n-1} z + p_n,$$

степень которых не превосходит данного целого числа n , а численные значения не превосходят другого данного числа L для всех значений переменной z , лежащих между данными пределами a и $b > a$.

Итак,

$$-L \leq f(z) \leq +L \quad \text{при} \quad a \leq z \leq b.$$

Спрашивается, какого предела не превосходит численное значение произвольной

$$f'(x) = np_0 x^{n-1} + (n-1)p_1 x^{n-2} + \dots + 2p_{n-2}x + p_{n-1}$$

от $f(x)$ по x ?

Такой вопрос поставлен Д. И. Менделеевым, при $n=2$, в его сочинении «Исследование волновых расстрой по удельному весу» (§ 86).

Ответ зависит от того, насколько определено число x .

Мы разделим два случая:

- 1) x — число данное,
- 2) x — произвольное число между a и b .

Соответственно этому рассмотрим две задачи.

Задача № 1. Для данного числа x найти наибольшее численное значение $f'(x)$.

Решение. Обозначим через y ту из рассматриваемых нами функций $f(z)$, для которой $f'(x)$ численно достигает наибольшего значения.

По условному вопросу

$$-L \leq y \leq +L$$

для всех значений z , лежащих между a и b .

Из всех этих значений z обратим особое внимание на те, при которых y равняется $\pm L$.

Пусть в возрастающем порядке они будут

$$z_1, z_2, \dots, z_t, z_{t+1}, \dots, z_s.$$

Обозначим через

$$y(z_i)$$

значение y при $z = z_i$, равное $\pm L$, заметим, что ряд $s = 1$ отношений

$$\frac{y(z_2)}{y(z_1)}, \frac{y(z_3)}{y(z_2)}, \dots, \frac{y(z_s)}{y(z_{s-1})}$$

должен содержать по крайней мере $n - 1$ чисел, равных -1 .

Действительно, в противном случае между двумя функциями $n - 2$ -й степени от z удалось найти бесчисленное множество таких, отношения которых к y при

$$z = z_1, z_2, \dots, z_s$$

— числа отрицательные.

Если затем, умножив одну из них

$$\varphi(z)$$

на $(z - x)^2$ и на достаточно малое положительное число ε , произведем

$$\varepsilon(z - x)^2 \varphi(z)$$

прибавим к y , то получим новую функцию

$$Y = y + \varepsilon(z - x)^2 \varphi(z)$$

n -й степени от z и притом такую, что при $a \leq z \leq b$ численное значение $Y < L$ и при $z = x$

$$\frac{dY}{dz} = \frac{dy}{dz}.$$

Наконец, если умножим Y на отношение числа L к наибольшему численному значению Y при $a \leq z \leq b$, то полученная таким образом новая функция будет принадлежать к числу рассматриваемых нами функций $f(z)$ и при $z = x$ её производная численно больше $\frac{dy}{dz}$.

Итак, с не меньше n , и ряд отношений

$$\frac{y(z_2)}{y(z_1)}, \frac{y(z_3)}{y(z_2)}, \dots, \frac{y(z_s)}{y(z_{s-1})} \quad (1)$$

содержит не менее $n - 1$ чисел, равных -1 .

Если -1 встречается n раз в ряду (1), то, как известно, y приводится к

$$\pm L \cos n \arccos \frac{2z - a - b}{b - a} = \pm f_0(z).$$

Вместе с тем имеем

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\pm nL}{V(z - a)(b - z)} \sin n \arccos \frac{2z - a - b}{b - a} = \pm f'_0(z).$$

Исследуем условия, при которых наибольшее численное значение $f'_0(x)$ действительно равно численному значению $f'_0(x)$.

Так как мы занимаемся численными значениями, то из всех функций $f(z)$ можем ограничиться только теми, для которых $f'(x)$ имеет одинаковый знак с $f'_0(x)$.

Положим для краткости

$$\frac{b - a}{2} \cos i\pi + \frac{b + a}{2} = \frac{1}{2} n - i \quad \text{при} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$f(z) = f_0(z) = \varphi(z).$$

Рассматривая значение $f(z)$ и $f_0(z)$ при

$$z = \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

находим:

$$\begin{aligned} f_0(\xi_n) &= +L \text{ и потому } \varphi(\xi_n) \leq 0, \\ f_0(\xi_{n-1}) &= -L \text{ » } \varphi(\xi_{n-1}) \geq 0, \\ f_0(\xi_{n-2}) &= +L \text{ » } \varphi(\xi_{n-2}) \leq 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$f_0(\xi_0) = (-1)^n L \text{ и потому } (-1)^n \varphi(\xi_0) \leq 0.$$

Следовательно, уравнение

$$\varphi(z) = 0$$

должно иметь по одному корню между ξ_0 и ξ_1 , между ξ_1 и ξ_2 , ..., между ξ_{n-1} и ξ_n .

Иначе сказать, функция $\varphi(z)$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z :

$$\varphi(z) = q(z - \eta_1)(z - \eta_2) \dots (z - \eta_n),$$

причём

$$a = \xi_0 \leq \eta_1 \leq \xi_1 \leq \eta_2 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1} \leq \eta_n \leq \xi_n = b.$$

Что касается коэффициента q , то он должен быть отрицательным.

Вместе с тем имеем

$$f'(x) = f'_0(x) + \left(\frac{1}{x - \eta_1} + \frac{1}{x - \eta_2} + \dots + \frac{1}{x - \eta_n} \right) \varphi(x)$$

и

$$f'_0(x) = \frac{2^{2n-1}n!}{(b-a)^n} (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_{n-1}),$$

так как $f'_0(z)$ обращается в нуль при

$$z = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$$

и старший член целой функции $f'_0(z)$ равен:

$$\frac{2^{2n-1}n!z^n}{(b-a)^n}.$$

Остановимся сначала на том случае, когда x лежит вне пределов a и b .

Тогда каждое из выражений

$$\frac{\varphi(x)}{x - \eta_1}, \frac{\varphi(x)}{x - \eta_2}, \dots, \frac{\varphi(x)}{x - \eta_n}$$

имеет знак, противоположный знаку $f'_0(x)$ и потому численное значение $f'(x) <$ численного значения $f'_0(x)$.

Итак, если x лежит вне пределов a и b , то наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f'_0(x)$.

Положим теперь, что x заключается между ξ_{i-1} и ξ_i .

Тогда

$$\frac{\varphi(x)}{x - \eta_i} = q(x - \eta_1)(x - \eta_2) \dots (x - \eta_{i-1})(x - \eta_{i+1}) \dots (x - \eta_n)$$

имеет знак, противоположный знаку $f'_0(x)$.

Остаётся рассмотреть знак суммы

$$\frac{x - \eta_1}{x - \eta_1} + \frac{x - \eta_2}{x - \eta_2} + \dots + \frac{x - \eta_i}{x - \eta_{i-1}} + \frac{x - \eta_i}{x - \eta_i} + \dots + \frac{x - \eta_n}{x - \eta_n} = \sum \frac{x - \eta_i}{x - \eta_i},$$

которую мы для краткости обозначаем одной буквой Σ . У нас $f(z)$ означает какую угодно из целых функций n -й степени от z , удовлетворяющих условиям

$$-L \leq f(z) \leq +L \text{ при } a \leq z \leq b$$

и

$$\frac{f'(x)}{f'_0(x)} > 0.$$

Поэтому числа

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

могут получать какие угодно значения, лишь бы только измени место неравенства

$$\xi_0 \leq \eta_1 \leq \xi_1 \leq \eta_2 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1} \leq \eta_n \leq \xi_n$$

и коэффициент q численно был достаточно мал.

Приняв во внимание это замечание, нетрудно убедиться, что наименьшее (предельное) значение суммы Σ равно наименьшему из чисел

$$x - \frac{z}{z_0} - 1, \quad x - \frac{z}{z_1} - 1, \quad \dots, \quad x - \frac{z}{z_{n-1}} - 1$$

$$= (x - \frac{z}{z_{l-1}}) \left\{ \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-a} \right\}$$

$$x - \frac{z}{z_1} + x - \frac{z}{z_2} + \dots + x - \frac{z}{z_n}$$

$$= (x - \frac{z}{z_l}) \left\{ \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-b} \right\}.$$

Если наименьшее значение Σ — число положительное, то и все значения Σ также числа положительные и знак выражения

$$\left(x - \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{x - \eta_2} + \dots + \frac{1}{x - \eta_n} \right) \varphi(x)$$

противоположен знаку $f_0''(x)$; вместе с тем, конечно, численное значение $f'(x) <$ численного значения $f_0''(x)$.

Если же наименьшее значение Σ — число отрицательное, то неопределёнными числами

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

можно располагаться так, что $f'(x)$ численно превзойдёт $f_0''(x)$.

Отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f_0''(x)$ тогда и только тогда, когда x лежит вне пределов a и b или

$$a < x < b, \quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-a} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-b} < 0. \quad (2)$$

Вместо дробных выражений

$$\frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-a} \quad \text{и} \quad \frac{f_0''(x)}{f_0'(x)} + \frac{1}{x-b}$$

можно рассматривать

$$(x-a)f_0''(x) + f_0''(x) \quad \text{и} \quad (x-b)f_0''(x) + f_0''(x),$$

так как, во-первых, при соблюдении неравенств (2) выражения

$$(x-a)f_0''(x) + f_0''(x) \quad \text{и} \quad (x-b)f_0''(x) + f_0''(x) \quad (3)$$

имеют одинаковые знаки и, во-вторых, наши неравенства (2) наверно имеют место, если знаки выражений (3) одинаковы и $a < x < b$.

Рассмотрев таким образом случай

$$y = f_0(z),$$

обратимся к другим.

Если y не равно $f_0(z)$, то по доказанному ряд отношений

$$\frac{y(\alpha_2)}{y(\alpha_1)}, \quad \frac{y(\alpha_3)}{y(\alpha_2)}, \quad \dots, \quad \frac{y(\alpha_n)}{y(\alpha_{n-1})} \quad (1)$$

содержит $n-1$ чисел, равных -1 .

Вместе с тем $s = n$, и из двух разностей

$$\alpha_1 - \alpha, \quad b - \alpha_n$$

должна обращаться в нуль по крайней мере одна.

Возьмём одну из функций $f(z)$, удовлетворяющих нашим условиям.

Уравнение

$$f(z) - y = 0$$

n -й или нижней степени относительно z имеет по одному корню между α_1 и α_2 , между α_2 и α_3 , ..., между α_{n-1} и α_n .

Иначе сказать, разность $f(z) - y$ должна разлагаться на вещественные множители первой степени относительно z : $f(z) - y = \psi(z) = (qz - r)(z - \eta_1)(z - \eta_2) \dots (z - \eta_{n-1})$, причём

$$\alpha_1 \leq \eta_1 \leq \alpha_2 \leq \eta_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \eta_{n-1} \leq \alpha_n, \\ \frac{r}{q} \geq \alpha_n \quad \text{или} \quad \leq \alpha_1.$$

Вместе с тем имеем

$$f'(x) = \left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=x} + \left\{ \frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \dots + \frac{1}{x-\eta_{n-1}} + \frac{1}{x-\eta_n} \right\} \psi(x),$$

где $\eta_n = q$.

Нетрудно также убедиться, что знак разности

$$qz - r$$

противоположен знаку $y'(\alpha_n)$ при всех значениях z , лежащих между α_1 и α_n .

При соблюдении указанных нами условий числам

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

можно давать какие угодно значения, лишь бы только числовая величина коэффициента q была достаточно мала.

Тогда при $\eta_n > x$ имеют место неравенства

$$0 < \frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \dots + \frac{1}{x-\eta_{n-1}} < \frac{1}{x-\eta_n} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_n},$$

$$0 > \frac{1}{x-\eta_n} > -\infty,$$

и неопределенностью чисел

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$$

можно воспользоваться так, что выражение

$$\left\{ \frac{1}{x-\eta_1} + \frac{1}{x-\eta_2} + \dots + \frac{1}{x-\eta_n} \right\} \psi(x)$$

будет иметь какой угодно знак.

Следовательно, случаи

$$x > \eta_n$$

невозможны.

Совершенно так же докажем, что x не меньше α_1 . Положим затем, что x заключается между α_i и α_{i+1} .

Тогда знак

$$\frac{\psi(x)}{x-\eta_i}$$

противоположен знаку

$$(-1)^{n-i-1} y'(\alpha_n),$$

и для того, чтобы $f'(x)$ по числовой величине было меньше $\left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=x}$, знак суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_2} + \dots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_i} + \dots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

должен быть одинаков со знаком

$$(-1)^{n-i-1} y'(\alpha_n) \left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=x}.$$

А выражение

$$(-1)^{n-i-1} y'(\alpha_n) \left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=x}$$

— число положительное, так как знак

$$(-1)^{n-i-1} y'(\alpha_n)$$

одинаков со знаком $y'(\alpha_{i+1})$ и со знаком $\left(\frac{dy}{dz} \right)_{z=x}$.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что наименьшее значение суммы

$$\frac{x-\eta_i}{x-\eta_1} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_2} + \dots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_{i-1}} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_i} + \dots + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_{n-1}} + \frac{x-\eta_i}{x-\eta_n}$$

равно наименьшему из чисел

$$(x-\alpha_i) \left\{ \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_i} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_{n-1}} + \frac{1}{x-\alpha_n} \right\},$$

$$(x-\alpha_{i+1}) \left\{ \frac{1}{x-\alpha_2} + \frac{1}{x-\alpha_3} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_{i+1}} + \frac{1}{x-\alpha_i} \right\}$$

и потому не может быть ни больше, ни меньше нуля.

Таким образом, мы приходим к следующему условию:

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_{n-1}} + \frac{1}{x-a_n} = 0. \quad (4)$$

Наши рассуждения показывают также, что за исключением одного случая, когда одновременно

$$n=2, \quad a_1=a, \quad a_n=b, \quad x=\frac{a+b}{2},$$

производная $f'(x)$ достигает своего наибольшего численного значения только для двух функций $f(z)$ и эти последние отличаются друг от друга только знаком.

$$n=2 \quad \text{и} \quad x=\frac{a+b}{2},$$

то наибольшее численное значение $f'(x)$ равно $\frac{2L}{b-a}$ и соответствует бесчисленному множеству различных функций $f(z)$: именно, всем функциям вида

$$L \left\{ \frac{2z-a-b}{b-a} + q(z-a)(z-b) \right\}$$

при

$$-\frac{2}{(b-a)^2} < q < \frac{2}{(b-a)^2}.$$

Вспомним, что из двух разностей

$$a_1 - a, \quad b - a_n$$

одна по крайней мере обращается в нуль, и соответственно этому различны три случая:

1) $a_1=a, a_n < b$; 2) $a_1 > a, a_n=b$; 3) $a_1=a, a_n=b$.

Если

$$a_1=a \quad \text{и} \quad a_n < b,$$

то к числам

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n$$

можно прибавить еще некоторое число

$$a_{n+1}$$

которое больше b и удовлетворяет условию

$$y(a_{n+1}) = -y(a_n),$$

так как при непрерывном возрастании z от a_n до $+\infty$ отношение

$$\frac{-y}{y(a_n)}$$

также постоянно возрастает от -1 до $+\infty$.

Вместе с тем имеем:

$$y = \pm L \cos n \arccos \frac{2z-a-a_{n+1}}{a_{n+1}-a} = \pm f_1(z).$$

Неизвестное a_{n+1} , согласно условию (4), должно удовлетворять уравнению

$$\sum_{x=\frac{a+a_{n+1}}{2}}^1 \frac{1}{\frac{a+a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n+1}-a}{2} \cos \frac{ix}{n}} = 0,$$

т. е.

$$\frac{f_1^{\prime\prime}(x)}{f_1^{\prime}(x)} + \frac{1}{x-a} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

и, кроме того, неравенствам

$$a_{n+1} > b > \frac{a+a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1}-a}{2} \cos \frac{\pi}{n},$$

отсюда

$$\frac{b-a \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} > a_{n+1} > b.$$

Следовательно, для того чтобы случай

$$a_1=a, \quad a_n < b$$

действительно имеет место, одно из значений α_{n+1} , удовлетворяющих уравнению

$$(x-a)f_1''(x) + f_1'(x) = 0, \quad (5)$$

должно заключаться между

$$b - a \sin^2 \frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad b, \quad \cos^2 \frac{\pi}{2n}$$

и только одно, так как в противном случае искомым нами наибольшее значение $f(x)$ соответствовало бы нескольким различным функциям $f(z)$, а предельные рассуждения показывают невозможность этого.

Рассматривая затем сумму

$$\sum_{i=1, 2, \dots, n} \frac{1}{x - \frac{a + \alpha_{i+1}}{2} - \frac{\alpha_{i+1} - a}{2} \cos \frac{i\pi}{n}}$$

как функцию от α_{n+1} , замечаем, что при непрерывном возрастании α_{n+1} эта функция постоянно возрастает, за исключением тех значений α_{n+1} , при которых она обращается в ∞ .

Поэтому уравнение (5) не может иметь кратных корней. Отсюда уже нетрудно заключить, что случаи

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_n < b$$

имеет место тогда и только тогда, когда при переходе α_{n+1}

$$\text{от } b \text{ до } \frac{b - a \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} \quad \text{выражение}$$

$$(x-a)f_1''(x) + f_1'(x)$$

меняет свой знак.

Заметим еще, что при $\alpha_{n+1} = b$ выражение

$$(x-a)f_1''(x) + f_1'(x)$$

обращается в

$$(x-a)f_0''(x) + f_0'(x).$$

Совершенно так же, введя новое переменное число α_0 и положив

$$L \cos n \arccos \frac{2z - \alpha_0 - b}{b - \alpha_0} = f_2(z),$$

убедимся, что случаи

$$\alpha_1 > a, \quad \alpha_n = b$$

имеет место тогда и только тогда, когда при переходе α_0

$$\text{от } \frac{a - b \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\cos^2 \frac{\pi}{2n}} \text{ до } a \text{ выражение } (x-b)f_2''(x) + f_2'(x)$$

меняет свой знак.

Тогда

$$y = \pm f_2(z),$$

причем α_0 должно удовлетворять уравнению

$$(x-b)f_2''(x) + f_2'(x) = 0$$

и неравенствам

$$\alpha_0 < a < \frac{\alpha_0 + b}{2} + \frac{b - \alpha_0}{2} \cos \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Обратимся к случаю

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_n = b,$$

который имеет место тогда и только тогда, когда не может иметь места ни один из предельных случаев.

Если

$$\alpha_1 = a \quad \text{и} \quad \alpha_n = b,$$

то уравнение

$$\frac{dy}{dz} = 0$$

n — 1-й степени относительно z имеет $n - 2$ корни

$$z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$$

между a и b и один корень вне этих пределов.

Обозначим этот последний буквой β и предположим для определённости $\beta > b$.

В таком случае численное значение y , при возрастании z от b до β , возрастает, а при дальнейшем возрастании z снова убывает до нуля и затем возрастает беспрерывно. Вместе с тем, конечно, уравнение

$$y^2 - L^2 = 0$$

$2n$ -й степени относительно z имеет, кроме $n - 2$ двукратных корней

$$z_2, z_3, \dots, z_{n-1}$$

и двух простых

$$a, b,$$

ещё два корня, которые мы обозначим буквами

$$\gamma \text{ и } \delta.$$

Эти последние два корня больше β . Следовательно,

$$y^2 - L^2 =$$

$$= p_0^2 (z - z_2)^2 (z - z_3)^2 \dots (z - z_{n-1})^2 (z - a) (z - b) (z - \gamma) (z - \delta)$$

и

$$\frac{dy}{dz} = mp_0 (z - z_2) (z - z_3) \dots (z - z_{n-1}) (z - \beta),$$

откуда выводя дифференциальное уравнение первого порядка

$$y^2 - L^2 = z (z - a) (z - b) (z - \gamma) (z - \delta) \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \cdot n^2 (z - \beta)^2. \quad (6)$$

Е. И. Золотарёв в своей статье «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля» выразил решение последнего уравнения посредством эллиптических функций.

Не останавливаясь на формулах Е. И. Золотарёва, покажем, каким образом можно свести нашу задачу к трём алгебраическим уравнениям.

Для этой цели из уравнения (6) посредством дифференцирования выводим:

$$n^2 (z - \beta)^3 y = (z - a)(z - b)(z - \gamma)(z - \delta)(z - \beta)^2 y'' + \frac{1}{2} (z - a)(z - b)(z - \gamma)(z - \delta)(z - \beta) \left\{ \frac{1}{z - a} + \dots + \frac{1}{z - \delta} - \frac{2}{z - \beta} \right\} y'. \quad (7)$$

Пологая затем

$$y = p_0 (z - \beta)^n + p_1' (z - \beta)^{n-1} + \dots + p_{n-3}' (z - \beta)^3 + p_n',$$

располагаем обе части уравнения (7) по степеням $z - \beta$ и посредством сравнения коэффициентов приходим к системе $n + 1$ уравнений с $n + 2$ неизвестными

$$\frac{p_1'}{p_0}, \frac{p_2'}{p_0}, \dots, \frac{p_{n-2}'}{p_0}, \frac{p_n'}{p_0}, \beta, \gamma, \delta.$$

Из этих уравнений нетрудно вывести выражения неизвестных

$$\frac{p_1'}{p_0}, \frac{p_2'}{p_0}, \dots, \frac{p_{n-2}'}{p_0}, \frac{p_n'}{p_0},$$

которые входят в них линейным образом через остальные три

$$\beta, \gamma, \delta.$$

Исключая

$$\frac{p_1'}{p_0}, \frac{p_2'}{p_0}, \dots, \frac{p_{n-2}'}{p_0}, \frac{p_n'}{p_0},$$

приходим к двум алгебраическим уравнениям с неизвестными

$$\beta, \gamma, \delta.$$

А условие (4) даёт ещё третье уравнение

$$\left(\frac{y''}{y'} \right)_{z=a} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-\beta} = 0. \quad (8)$$

Что же касается коэффициента P_0 , то он определяется из условия

$$y(a) = \pm L.$$

К этим же результатам придём и в том случае, когда β меньше a ; только при $\beta < a$ числа γ и δ должны быть меньше β .

Для дальнейшего важно заметить, что во всяком случае выражение

$$\frac{(z-\gamma)(z-\delta)}{(z-\beta)^2}$$

больше единицы при всех значениях z , лежащих между a и b .

Покажем ещё, что уравнение (6) можно заменить двумя линейными дифференциальными уравнениями первого порядка с двумя неизвестными целыми функциями.

При этом для определённости будем считать

$$y(a) = L, \quad a < b < \beta < \gamma < \delta.$$

Пусть n — число чётное. Тогда, обозначив произведение

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\dots(z-\alpha_{n-2})$$

и

$$(z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\dots(z-\alpha_{n-1})$$

соответственно буквами

U и V ,

выодем

$$y-L = P_0(z-a)(z-\delta)V^2,$$

$$y+L = P_0(z-b)(z-\gamma)U^2,$$

$$y' = P_0\{2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V\}V =$$

$$= P_0\{2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U\}U =$$

$$= nP_0(z-\beta)UV$$

и таким образом приходим к желаемым двум линейным дифференциальным уравнениям первого порядка

$$2(z-a)(z-\delta)V' + (2z-a-\delta)V = n(z-\beta)U,$$

$$2(z-b)(z-\gamma)U' + (2z-b-\gamma)U = n(z-\beta)V.$$

Подобным же образом при n нечётном, обозначив произведение

$$(z-\alpha_2)(z-\alpha_4)\dots(z-\alpha_{n-1})$$

и

$$(z-\alpha_3)(z-\alpha_5)\dots(z-\alpha_{n-2})$$

соответственно буквами

U и V ,

приходим к уравнениям

$$2(z-a)(z-b)\{z-\gamma\}V' + \{3z^2-2(a+b+\gamma)z+ab+a\gamma+b\gamma\}V = n(z-\beta)U,$$

$$2(z-b)(z-\delta)U' + U = n(z-\beta)V.$$

Примеры

1. $n=2$. В этом случае

$$f_0(z) = \frac{L}{(b-a)^2} \{8(z-a)(z-b) + (b-a)^2\},$$

$$f'_0(z) = \frac{8L}{(b-a)^2} (2z-a-b), \quad f''_0(z) = \frac{16L}{(b-a)^2}.$$

$$(x-a)f'_0(x) + f'_0(x) = \frac{8L}{(b-a)^2} (4x-3a-b),$$

$$(x-b)f''_0(x) + f'_0(x) = \frac{8L}{(b-a)^2} (4x-3b-a).$$

Следовательно,

$$\text{при } x > \frac{3b+a}{4} \text{ и при } x < \frac{3a+b}{4}$$

наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению

$$f'_0(x) = \frac{8L}{(b-a)^2} (2x-a-b).$$

Обратимся затем к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$, найдем

$$f_1(z) = \frac{L}{(\alpha_3-a)^2} \{8(z-a)(z-\alpha_3) + (\alpha_3-a)^2\},$$

$$(x-a)f'_1(x) + f'_1(x) = \frac{8L}{(\alpha_3-a)^2} (4x-3a-\alpha_3),$$

$$f_2(z) = \frac{L}{(b-\alpha_0)^2} \{8(z-\alpha_0)(z-b) + (b-\alpha_0)^2\},$$

$$(x-b)f'_2(x) + f'_2(x) = \frac{8L}{(b-\alpha_0)^2} (4x-3b-\alpha_0),$$

$$\alpha_3 = 4x-3a, \quad \alpha_0 = 4x-3b$$

и отсюда заключаем, что наибольшее численное значение

$$f'(x) \text{ при } \frac{3a+b}{4} < x < \frac{a+b}{2} \text{ равно } \frac{-8L}{(a_3-a)^2} (2x-a_3-a) = \\ = \frac{L}{x-a}, \text{ а при } \frac{a+b}{2} < x < \frac{3b+a}{4} \text{ равно}$$

$$\frac{8L}{(b-a_0)^2} (2x-a_0-b) = \frac{L}{b-x}.$$

Что же касается функции y , определенной дифференциальным уравнением (6), то при $n=2$ она не играет в нашем вопросе никакой роли.

II. $n=3$.

Предлагая для упрощения результатов

$$a = -1 \text{ и } b = +1,$$

находим:

$$f_0(z) = L(4z^2 - 3z), \quad f'_0(z) = 3L(4z^2 - 1), \quad f''_0(z) = 24Lz,$$

$$(x-a)f''_0(x) + f'_0(x) = 3L(12x^2 + 8x - 1) = \\ = 36L(x-\omega_1)(x-\omega_2),$$

$$(x-b)f''_0(x) + f'_0(x) = 3L(12x^2 - 8x - 1) = \\ = 36L(x-\omega'_1)(x-\omega''_1),$$

где

$$\omega_1 = \frac{-2 - \sqrt{7}}{6} < \omega'_1 = \frac{2 - \sqrt{7}}{6} < \omega_2 = \\ = \frac{-2 + \sqrt{7}}{6} < \omega''_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{6}.$$

Следовательно, при $x < \omega_1$, при $\omega'_1 < x < \omega_2$ и при $x > \omega''_1$ наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f'_0(x) = 3L(4x^2 - 1)$.

Обращаясь, затем к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$, находим:

$$f_1(z) = L \left\{ 4 \left(\frac{2z+1-a_4}{a_4+1} \right)^3 - 3 \frac{2z+1-a_4}{a_4+1} \right\},$$

$$(x-a)f''_1(x) + f'_1(x) =$$

$$= \frac{6L}{(a_4+1)^3} \{ 16(2x+1-a_4)(x+1) + \\ + 4(2x+1-a_4)^2 - (a_4+1)^2 \},$$

$$f_2(z) = L \left\{ 4 \left(\frac{2z-1-a_0}{1-a_0} \right)^3 - 3 \frac{2z-1-a_0}{1-a_0} \right\},$$

$$(x-b)f''_2(x) + f'_2(x) =$$

$$= \frac{6L}{(1-a_0)^3} \{ 16(2x-1-a_0)(x-1) + \\ + 4(2x-1-a_0)^2 - (1-a_0)^2 \}.$$

Выражение

$$16(2x+1-a_4)(x+1) + 4(2x+1-a_4)^2 - (a_4+1)^2$$

при $a_4 = 1$ обращается в

$$48x^2 + 32x - 4 = 48(x-\omega_1)(x-\omega_2),$$

а при $a_4 = \frac{1+\sin^2 \frac{\pi}{6}}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{5}{3}$ оно обращается в

$$32 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x+1) + 16 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{64}{9} = \\ = 48x^2 + \frac{32}{3}x - 16 = 48(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2),$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{-1 - \sqrt{28}}{9} \text{ и } \varepsilon_2 = \frac{-1 + \sqrt{28}}{9}.$$

Отсюда заключаем, что наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению $f'_1(x)$ в тех случаях, когда $\omega_1 < x < \varepsilon_1$ или $\omega_2 < x < \varepsilon_2$.

При этом число α_4 должно быть определено из уравнения

$$16(2x+1-\alpha_4)(x+1)+4(2x+1-\alpha_4)^2-(1+\alpha_4)^2=0.$$

Чтобы придать выражению $f_1'(x)$ возможно простой вид, положим

$$\alpha_4 = -1 + \xi \quad \text{и} \quad x+1 = t.$$

Тогда

$$f_1'(x) = -tf_1''(x),$$

$$f_1''(x) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^2 (2t - \frac{5}{2})}{\xi^3} \cdot L = 96 \left\{ 2 \left(\frac{t}{\xi} \right)^3 - \left(\frac{t}{\xi} \right)^2 \right\} \frac{L}{t^2},$$

$$48t^2 - 32t + 3\xi^2 = 0, \quad \frac{t}{\xi} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{12},$$

$$2 \left(\frac{t}{\xi} \right)^3 - \left(\frac{t}{\xi} \right)^2 = \frac{10 \pm 7\sqrt{7}}{144 \cdot 6},$$

$$f_1'(x) = -\frac{10 \pm 7\sqrt{7}}{9} \frac{L}{x+1}.$$

Из двух знаков $\pm$ при $\sqrt{7}$ надо остановиться на том, при котором

$$\alpha_4 = -1 + \frac{12}{4 \pm \sqrt{7}} (x+1)$$

заключается между 1 и $\frac{5}{3}$.

А неравенства

$$\frac{5}{3} > \alpha_4 > 1$$

равносильны таким:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{28}}{9} > x > \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{6}.$$

Сопоставив последние неравенства с найденными раньше

$$\omega_1 < x < \varepsilon_1 \quad \text{или} \quad \omega_2 < x < \varepsilon_2,$$

видим, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при

$$\omega_1 < x < \varepsilon_1 \quad \text{равно} \quad \frac{7\sqrt{7}-10}{9} \frac{L}{x+1}, \quad \text{а при} \quad \omega_2 < x < \varepsilon_2$$

$$\text{равно} \quad \frac{7\sqrt{7}+10}{9} \frac{L}{x+1}.$$

Совершенно так же, полагая

$$\frac{1-\sqrt{28}}{9} = \varepsilon' \quad \text{и} \quad \frac{1+\sqrt{28}}{9} = \varepsilon'',$$

убеждаемся, что наибольшее численное значение $f'(x)$ при

$$\varepsilon' < x < \omega'' \quad \text{равно} \quad \frac{7\sqrt{7}-10}{9} \frac{L}{1-x}, \quad \text{а при} \quad \varepsilon_1 < x < \omega'$$

$$\text{равно} \quad \frac{7\sqrt{7}+10}{9} \frac{L}{1-x}.$$

Если же x заключается между ε_1 и ε' или между ε_2 и ε'' , то наибольшее численное значение $f'(x)$ соответствует той функции y , которая определяется уравнениями (6) и (8) при $n=3$, $a=-1$, $b=+1$.

В нашем примере дифференциальное уравнение (6) можно заменить двумя равенствами:

$$y-L = p_0(z^2-1)(z-y),$$

$$y+L = p_0(z-\alpha_2)^2(z-\delta),$$

откуда затем выведем

$$y = \delta + 2\alpha_2, \quad -1 = \alpha_2^2 + 2\alpha_2\delta, \quad -2L = p_0(\alpha_2^2\delta + y),$$

$$\delta = -\frac{1+\alpha_2^2}{2\alpha_2}, \quad y = \frac{3\alpha_2^2-1}{2\alpha_2}, \quad p_0 = \frac{4\alpha_2L}{(1-\alpha_2^2)^2}.$$

А уравнение (8) обращается в следующее:

$$\frac{1}{x-a_2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0.$$

Следовательно,

$$x - a_2 = \frac{1-x^2}{2x}, \quad a_2 = \frac{3x^2-1}{2x},$$

$$1 - a_2 = \frac{1+2x-3x^2}{2x} = \frac{(1-x)(1+3x)}{2x},$$

$$1 - \gamma = \frac{(1-a_2)(1+3a_2)}{2a_2},$$

$$1 + a_2 = \frac{3x^2+2x-1}{2x} = \frac{(1+x)(3x-1)}{2x},$$

$$1 + \gamma = \frac{(1+a_2)(3x_2-1)}{3x_2},$$

$$1 + 3x_2 = \frac{9x^2+2x-3}{2x} = \frac{9(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)}{2x},$$

$$3a_2 - 1 = \frac{9x^2-2x-3}{2x} = \frac{9(x-\varepsilon')(x-\varepsilon'')}{2x},$$

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x} = \frac{4x_2 L}{(1-a_2)^2} \left\{ 3x^2 - \frac{3a_2^2-1}{a_2} x - 1 \right\} =$$

$$= \frac{4(x-a_2)(3xa_2+1)}{(1-a_2)^2} L = -\frac{16x^3 L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Теперь, уже нетрудно убедиться, что при $\varepsilon_1 < x < \varepsilon'$ и при $\varepsilon_2 < x < \varepsilon''$ составленная нами функция y удовлетворяет всем вышеуказанным условиям и наибольшее численное значение $f'(x)$ равно численному значению

$$\frac{16x^3 L}{(1-9x^2)(1-x^2)}.$$

Задача № 2. Найти наибольшее численное значение $f'(x)$ для всех x , лежащих между a и b .

Решение. Решая предыдущую задачу, мы нашли все те функции $f(z)$, для которых $f'(x)$ численно достигает своего наибольшего значения.

Один из наших результатов состоит в том, что при

$$\frac{(x-b)f''_0(x) + f'_0(x)}{(x-a)f''_0(x) + f'_0(x)} > 0$$

наибольшее численное значение $f'(x)$ равно

$$\text{числ. знач. } f'_0(x) = \text{числ. знач. } \frac{nL \sin n \arccos \frac{2x-a-b}{b-a}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Положив затем

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \varphi,$$

находим:

$$f_0(x) = L \cos n\varphi, \quad f'_0(x) = \frac{2nL \sin n\varphi}{(b-a) \sin \varphi},$$

$$f''_0(x) = \frac{4nL \{ \sin n\varphi \cos \varphi - n \cos n\varphi \sin \varphi \}}{(b-a)^2 \sin^3 \varphi},$$

$$\frac{(x-b)f''_0(x) + f'_0(x)}{(x-a)f''_0(x) + f'_0(x)} = \frac{1 - \cos \varphi \sin n\varphi + n \cos n\varphi \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \sin n\varphi - n \cos n\varphi \sin \varphi}.$$

$$\text{Если } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2n} \text{ или } \pi > \varphi > \pi - \frac{\pi}{2n}, \text{ то}$$

$$\text{числ. знач. } \sin n\varphi > \text{числ. знач. } n \cos n\varphi \sin \varphi$$

и

$$\frac{(x-b)f''_0(x) + f'_0(x)}{(x-a)f''_0(x) + f'_0(x)} > 0.$$

С другой стороны, из формулы

$$f'_0(x) = \frac{2nL \sin n\varphi}{(b-a) \sin \varphi}$$

видно, что при $a \leq x \leq b$ наибольшее численное значение $f_0(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}$$

и соответствует $x = a$ и $x = b$.

Поэтому для всех значений x , лежащих между a и $\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{2n}$ или между $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{2n}$ и b , наибольшее численное значение $f'(x)$ равно:

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$

Положим теперь, что x заключается между

$$\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{2n} \quad \text{и} \quad \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{2n}.$$

В таком случае

$$(x-a)(b-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+a}{2} - x\right)^2 > \\ > \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} > \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{1}{n^2}.$$

Производная $f'(x)$ достигает численно своего наибольшего значения для одной из вышеуказанных функций

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x)$$

или для функции y , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6).

Но по замеченному

$$\text{числ. знач. } f'_0(x) < \frac{2n^2L}{b-a},$$

и совершенно так же убедимся, что

$$\text{числ. знач. } f'_1(x) < \frac{2n^2L}{a_{n+1}-a} < \frac{2n^2L}{b-a}$$

и

$$\text{числ. знач. } f'_2(x) < \frac{2n^2L}{b-a_0} < \frac{2n^2L}{b-a}.$$

А из уравнения (6) при

$$\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{2n} < x < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{\pi}{2n}$$

вытекает неравенство

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x}^2 < \frac{n^2}{(x-a)(b-x)} L^2 < \frac{4n^4}{(b-a)^2} L^2$$

и потому

$$\text{числ. знач. } \left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=x} < \frac{2n^2L}{b-a}.$$

Все эти результаты показывают, что искоемое нами наибольшее значение $f'(x)$ равно

$$\frac{2n^2L}{b-a}.$$



так что

$$\sigma(y, \frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{1-y^2},$$

то и получится, что отрицательные корни

$$x_1, x_2, \dots, x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

полнома Джакшара удовлетворяют неравенствам

$$-\cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} < x_k < -\cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k=1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]).$$

указанным в статье А. Маркова.

К статье 5 «Об одном вопросе Д. И. Менделеева»

Статья была напечатана в Известиях Петербургской Академии наук за 1889 г. (т. 62, стр. 1-24).

Теорема А. А. Маркова обобщена его братом В. А. Марковым, который в своей работе «О функциях, наименее удаленных от нуля» (Петербург, 1892) доказал следующее предложение: Если $P(x)$ — вещественный многочлен степени n , то

$$\max_{-1 \leq x \leq +1} \left| \frac{d^k}{dx^k} P(x) \right| \leq \max_{-1 \leq x \leq +1} |P(x)| \cdot \frac{n^2(n^2-2^2) \dots [n^2-(k-1)^2]}{(k+1) \dots 2k}$$

причем знак = имеет место в том и только в том случае, когда

$$P(x) = A T_n(x) = A \cos n \arccos x.$$

Простое доказательство теоремы В. А. Маркова принадлежит С. Н. Бернштейну *).

В другом направлении теорему А. А. Маркова обобщил И. Шур **). Вот два из результатов Шура:

*) С. Н. Бернштейн, О теореме В. А. Маркова (Труды Ленинградского государственного института, 1938, стр. 8-12).
**) I. Schur, Ueber das Maximum des absoluten Betrages eines Polynoms in einem gegebenen Intervalle (Math. Zeitschr., Bd. 4, 1919, стр. 271-287).

1°. Если $P(x)$ — полином степени n и

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = M,$$

то

$$|P'(\pm 1)| \leq Mn^2,$$

причем знак = исключается, если $P(x) \neq A T_n(x)$. Далее, если $|P'(x)|$ имеет относительный максимум во внутренней точке ξ интервала $(-1, 1)$, то при $n \geq 3$

$$|P'(\xi)| < \frac{1}{2} Mn^2.$$

2°. Если $P(x)$ — полином степени n , обращающийся в нуль на одном из концов интервала $[-1, 1]$, то

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x)| \leq n^2 \cos^2 \frac{\pi}{4n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

К неравенству А. А. Маркова примыкают неравенства С. Н. Бернштейна, основное из которых относится к 1912 г. и гласит: Если $S(\theta)$ есть тригонометрическая сумма порядка n , т. е.

$$S(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + \dots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

то

$$\max |S'(\theta)| \leq n \max |S(\theta)|,$$

причем знак = имеет место только в том случае, когда

$$S(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

Различные дальнейшие неравенства, относящиеся к полиномам, тригонометрических суммам и некоторым другим классам целых трансцендентных функций, читатель найдет в монографии С. Н. Бернштейна «Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной» (часть первая, М.—Л., 1937).

К статье 6 «О функциях, получаемых при обращении рядов в непрерывные дроби»

Впервые статья была напечатана в Записках Петербургской Академии наук за 1894 г. (том LXIV № 2).

В 1910 г. появился английский перевод этой статьи — английский Я. Шохагом (J. Shohat) (См. Duke, Mathematical Journal, Vol. 7).