vereinigt werden. Dann verwandelt sich unsere Frage in das Kroneckersche Problem, die Wurzeln aller auflösbaren Gleichungen zu finden.

Bis jetzt gingen wir von den Gleichungen aus und fragten nach den Wurzeln. Wir könnten jetzt umgekehrt von Punktaggregaten $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ ausgehen, für sie in der mannigfachsten Weise einen Äquivalenzbegriff formulieren und sie danach in Klassen einteilen. Das würde dann zu vielen wichtigen und interessanten Fragestellungen nach der Beschaffenheit der zugehörigen Gleichungen führen. Darauf kann indes nicht mehr eingegangen werden.

So haben wir denn eine große Anzahl Parallelen, denen noch viele andere anzureihen wären, aufgedeckt und insbesondere gesehen — um es nochmals zu sagen —, wie die fundamentalen Begriffsbildungen der Niederen Arithmetik, der Höheren Arithmetik und der Funktionentheorie nur verschiedene Ausdrucksformen eines und desselben Schrittes geistiger Freiheit sind, mit G. Cantor zu reden. Angesichts dieser Tatsache scheint es sehr merkwürdig, daß z. B. Kronecker das Irrationale gar nicht gelten lassen wollte, er, der doch mit Einführung der Funktionale (Ideale) denselben Schritt nur auf anderem Gebiete gemacht hat! Auch können wir die übliche Trennung von Analysis und Arithmetik nicht anerkennen; ist doch der Stetigkeitsbegriff, der sie verursachen soll, eine unmittelbare Konsequenz der Einführung des Irrationalen!

Je weiter die Wissenschaft fortschreitet, je größer ihr Umfang wird, desto mehr ist eine einheitliche Auffassung der verschiedenen Disziplinen erwünscht und vonnöten. Nicht eine Aufhäufung von Tatsachen, eine Sammlung von Sätzen, sondern die Gewinnung eines einheitlichen mathematischen Weltbildes scheint mir das Hauptziel für den einzelnen wie für die Wissenschaft im allgemeinen. Vielleicht vermögen die vorstehenden Ausführungen einen bescheidenen Beitrag hierzu zu liefern.

# Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen.

Von GEORG FABER in Straßburg i. E.

Da ich bisher nicht dazu gekommen bin, meine Untersuchungen über Interpolation, über die ich auf der Karlsruher Naturforscherversammlung im Jahre 1911 kurz berichtet habe, im Zusammenhang darzustellen, und da ich auch in der nächsten Zeit wahrscheinlich nicht dazu kommen werde, so will ich wenigstens aus meinen damals ohne Beweis mitgeteilten Ergebnissen vier Sätze beweisen, deren Formulierung sehr allgemein und deren Beweis verhältnismäßig einfach ist; ich



tue dies auch, weil damit eine Frage beantwortet wird, wie sie ähnlich neuerdings auch von anderer Seite aufgeworfen worden ist.[1])

Es handelt sich um folgendes: $f(t)$ sei eine stetige Funktion der reellen Veränderlichen $t$ und besitze die Periode $2\pi$. $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots t_{2n+1}^{(n)}$ seien $(2n+1)$ verschiedene Zahlen des Intervalls $i: 0 \leqq t < 2\pi$. Es existiert dann ein und nur ein trigonometrisches Polynom $n$ter Ordnung: $J_n(f(t))$, das für $t = t_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots n+1)$ den Wert $f(t_i^{(n)})$ annimmt:

$$(1)\quad J_n(f(t)) = f(t_1^{(n)}) \frac{\sin\frac{t - t_2^{(n)}}{2} \sin\frac{t - t_3^{(n)}}{2} \cdots \sin\frac{t - t_{2n+1}^{(n)}}{2}}{\sin\frac{t_1^{(n)} - t_2^{(n)}}{2} \sin\frac{t_1^{(n)} - t_3^{(n)}}{2} \cdots \sin\frac{t_1^{(n)} - t_{2n+1}^{(n)}}{2}} + \cdots$$

$$+ f(t_{2n+1}^{(n)}) \frac{\sin\frac{t - t_1^{(n)}}{2} \sin\frac{t - t_2^{(n)}}{2} \cdots \sin\frac{t - t_{2n}^{(n)}}{2}}{\sin\frac{t_{2n+1}^{(n)} - t_1^{(n)}}{2} \sin\frac{t_{2n+1}^{(n)} - t_2^{(n)}}{2} \cdots \sin\frac{t_{2n+1}^{(n)} - t_{2n}^{(n)}}{2}}$$

$$= \frac{a_0^{(n)}}{2} + a_1^{(n)} \cos t + \cdots + a_n^{(n)} \cos nt + b_1^{(n)} \sin t + \cdots + b_n^{(n)} \sin nt.$$

Es seien nun zu jedem ganzzahligen positiven $n$ derartige $2n+1$ Interpolationsstellen $t_i^{(n)}$ gegeben, deren Gesamtmenge $(n = 1, 2, \ldots, i = 1, 2 \ldots 2n+1)$ ich mit $M$ bezeichnen will; die Frage ist dann die:

*Kann die Menge $M$ der Interpolationsstellen so gewählt werden, daß für jede stetige Funktion $f(t)$ und gleichmäßig für alle $t$ (des Intervalls $i: 0 \leqq t < 2\pi$) die Beziehung*

$$(2)\qquad f(t) = \lim_{n=\infty} J_n(f(t))$$

*gilt, mit anderen Worten, daß die Reihe* $J_1(f(t)) + [J_2 f(t) - J_1 f(t)] + \cdots [J_{n+1}(f(t)) - J_n(f(t))] + \cdots$ *gleichmäßig gegen $f(t)$ konvergiert?*

Diese Frage wird durch die folgenden Ausführungen mit Nein beantwortet. Dies war von vornherein zu erwarten. Aus Untersuchungen des Herrn Runge[2]) folgt nämlich, daß sämtliche regulär analytische und mit der Periode $2\pi$ behaftete Funktionen $f(t)$ der reellen Veränderlichen $t$ sich nur dann in der Form (2) darstellen lassen, wenn sich die Interpolationsstellen $t_i^{(n)}$ infinitär gleichmäßig auf das Intervall $i$ verteilen, d. h. wenn die Anzahl $\mu_n(\Delta t)$ der Interpolationsstellen $t_i^{(n)}$, die in einem beliebigen Teilintervall $\Delta t$ von $i$ liegen, die Forderung

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\mu_n(\Delta t)}{2n+1} = \frac{\Delta t}{2\pi}$$

1) S. Dunham Jackson, Rend. del Circolo mat. di Palermo Bd. 37 (1914).

2) Ztschr. f. Math. u. Phys. Bd. 47 (1901) S. 229. — Theorie und Praxis der Reihen (Leipzig 1904) S. 137.

erfüllen. Dieses Verteilungsgesetz wird aber in unübertrefflicher Weise dadurch befriedigt, daß man die $t_i^{(n)}$ $(i = 1, 2 \ldots 2n+1)$ äquidistant, also $t_{i+1}^{(n)} = t_i^{(n)} + \frac{2\pi}{2n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots 2n)$ annimmt. Nun ist aber bekannt[1]), daß selbst bei dieser Wahl von $M$ die trigonometrische Interpolation bei stetigen Funktionen $f(t)$ noch divergieren und ungleichmäßig konvergieren kann. Bei anderer Wahl der Interpolationsstellen sind solche Möglichkeiten also erst recht zu erwarten.

Selbstverständlich sind diese Überlegungen von einem strengen Beweise noch weit entfernt. Ein solcher soll in den folgenden Zeilen gegeben werden; die Ergebnisse des Herrn Runge werden dabei nicht benutzt.

Mit $K$ bezeichne ich die Gesamtheit der Funktionen $f(t)$, die stetig mit der Periode $2\pi$ behaftet und dem Betrage nach $\leqq 1$ sind. Es gibt dann zu jedem $n$ eine endliche Zahl $A_n > 0$ derart, daß

(4) $$|J_n(f(t))| \leqq A_n$$

bleibt für alle $f(t)$ von $K$ und für jedes $t$. $A_n$ ist offenbar der Maximalwert der folgenden Funktion von $t$:

$$\left|\frac{\sin\frac{t-t_2^{(n)}}{2}\cdots\sin\frac{t-t_{2n+1}^{(n)}}{2}}{\sin\frac{t_1^{(n)}-t_2^{(n)}}{2}\cdots\sin\frac{t_1^{(n)}-t_{2n+1}^{(n)}}{2}}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin\frac{t-t_1^{(n)}}{2}\cdots\sin\frac{t-t_{2n}^{(n)}}{2}}{\sin\frac{t_{2n+1}^{(n)}-t_1^{(n)}}{2}\cdots\sin\frac{t_{2n+1}^{(n)}-t_{2n}^{(n)}}{2}}\right|.$$

Ich behaupte nun: Damit für jede stetige und periodische Funktion $f(t)$ gleichmäßig die Beziehung

(2) $$f(t) = \lim_{n=\infty} J_n(f(t))$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß

(5) $$\lim_{n=\infty} A_n \neq \infty$$

ist. Darnach wird gezeigt, daß die als notwendig erkannte Bedingung (5) von keiner Interpolationsmenge $M$ befriedigt wird.

Ich beweise zunächst ganz kurz, daß die Bedingung (5) hinreichend ist, wiewohl das für das Folgende unerheblich ist. Es sei also unter der Voraussetzung eines hinreichend großen $n$ einerseits

(6) $$A_n < G,$$

andererseits werde $f(t)$ auf Grund eines bekannten Satzes[2]) in der Form

(7) $$f(t) = \varphi_n(t) + r_n(t)$$

1) Vgl. Faber, Math. Ann. 69 (1910) S. 417.

2) S. z. B. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques (Paris 1906) S. 89.



angesetzt, wo $\varphi_n(t)$ ein trigonometrisches Polynom $n$ten Grades bedeutet und

(8) $$|r_n(t)| < \varepsilon$$

ist für alle $t$. Dann ist

(9) $$J_n(f(t)) = J_n(\varphi_n(t)) + J_n(r_n(t)),$$

(10) $$J_n(\varphi_n(t)) = \varphi_n(t),$$

(11) $$|J_n(r_n(t))| < \varepsilon \cdot G,$$

also

(12) $$|J_n(f(t)) - f(t)| < \varepsilon(G+1),$$

w. z. b. w.

Um die Notwendigkeit der Bedingung (5) zu erkennen, nehme man an, daß

(13) $$\overline{\lim_{n=\infty}} A_n = \infty$$

sei, und daß trotzdem für jede stetige und die Periode $2\pi$ besitzende Funktion $f(t)$ im ganzen Intervall $i$ gleichmäßig die Gleichung

(2) $$f(t) = \lim_{n=\alpha} J_n(f(t))$$

gelte; es wird sich ergeben, daß diese beiden Voraussetzungen (2) und (13) unverträglich sind. Ist $|f(t)| \leqq \frac{1}{2}$, dagegen $J_n(f(t))$ für $t = t'$ gleich $\frac{1}{2}A_n$, so kann man auf Grund des schon bei (7) benutzten bekannten Satzes $f(t)$ näherungsweise durch ein trigonometrisches *Polynom* $m$ten Grades $\varphi_m(t)$ ersetzen, das dem Betrage nach $\leqq 1$, für das aber an der Stelle $t = t'$ das Interpolationspolynom $J_n(\varphi_m(t))$ einen Wert $\geqq \frac{A_n}{4}$ liefert.

(14) $$J_n(\varphi_m(t)) = \frac{a A_n}{4} \text{ mit } a \geqq 1.$$

Ich denke mir sodann solche trigonometrische *Polynome* $\varphi_{m_i}(t)$ vom Grade $m_i$ $(i = 1, 2 \ldots)$, welche sämtlich dem Betrage nach $\leqq 1$ sind und für welche es Zahlen $n_i < m_i$ gibt derart, daß das Maximum von

(14') $$J_{n_i}(\varphi_{m_i}(t)) \geqq \frac{1}{4} A_{n_i}$$

wird mit

(15) $$\lim_{i=\alpha} A_{n_i} = \infty.$$

Dies ist nach dem Vorhergehenden alles möglich, und es können die $n_i$ und $m_i$ noch folgenden weiteren Bedingungen unterworfen werden:

(16) $$n_i > m_{i-1},$$

(17) $$A_{n_{i+1}} > A_{n_i}^2.$$

Wegen (15) und (17) konvergiert die Reihe

$$(18)\qquad f(t) = \sum_1^{\infty} {}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\, \varphi_{m_k}(t)$$

gleichmäßig im Intervalle $i$, und es ist

$$(19)\quad J_{n_i}(f(t)) = J_{n_i}\left(\sum_1^{i-1}{}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\varphi_{m_k}(t)\right) + J_{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{A_{n_i}}}\varphi_{m_i}(t)\right) + J_{n_i}\left(\sum_{i+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\varphi_{m_k}(t)\right)$$

$$= \sum_1^{i-1}{}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\underbrace{\varphi_{m_k}(t)}_{\text{(wegen 16)}} + \underbrace{\frac{a}{4}\sqrt{A_{n_i}}}_{\text{(bei geeigneter Wahl von } t \text{ wegen (14))}} + J_{n_i}\left(\sum_{i+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\varphi_{m_k}(t)\right).$$

Das erste der drei Glieder auf der rechten Seite von (19) bleibt als Teilsumme einer gleichmäßig konvergenten Reihe unterhalb einer endlichen Grenze; ebenso das letzte; denn wegen (17) ist

$$\left|\sum_{i+1}^{\infty}{}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\varphi_k(t)\right| < \frac{1}{A_{n_i}} + \frac{1}{A_{n_i}^{2}} + \frac{1}{A_{n_i}^{4}} + \cdots,$$

also

$$\left|J_{n_i}\left(\sum_1^{\infty}{}_k \frac{1}{\sqrt{A_{n_k}}}\varphi_k(t)\right)\right| < 1 + \frac{1}{A_{n_i}} + \frac{1}{A_{n_i}^3} + \cdots.$$

Weil aber das mittlere Glied $\frac{a}{4}\sqrt{A_{n_i}}$ auf der rechten Seite von (19) ins Unendliche wächst, kann $J_{n_i}(f(t))$ nicht gleichmäßig im Intervall $i$ gegen $f(t)$ konvergieren, womit die Unmöglichkeit des gleichzeitigen Bestehens von (2) und (13) dargetan ist.

Es bleibt nach diesen Vorbereitungen nur noch zu zeigen, daß bei *jeder Menge M* der Interpolationsstellen $\overline{\lim_{n=\infty}} A_n = \infty$ ausfällt; es ist sogar $\lim_{n=\infty} A_n = \infty$.

Um dies einzusehen, bemerke man, daß es trigonometrische Polynome

$$(20)\quad \varphi_m(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_m \cos mt + b_1 \sin t + \cdots + b_m \sin mt$$

gibt, die zwar selbst für alle $t$ dem Betrage nach $< 1$ sind, jedoch, nach den Gliedern $a_n \cos nt$, $b_n \sin nt$ abgebrochen, Polynome

$$(21)\quad \psi_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + \cdots + b_n \sin nt$$

liefern, welche Werte von der Größenordnung $\lg n$ annehmen; $m$ läßt



sich von vornherein so wählen, daß $n$ eine vorgegebene Zahl sein darf. Bricht man z. B. die unendliche trigonometrische Reihe[1])

$$(22)\quad \psi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}{}_\nu a_\nu \cos \nu t \quad \text{mit} \quad a_\nu = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1+2\nu} + \frac{1}{2n+1-2\nu}\right),$$

die im Intervalle $(-\pi, \pi)$ gleich $\frac{1}{2}\sin\frac{2n+1}{2}|t|$ ist, nach den Gliedern mit $\cos mt$, $\sin mt$ ab, so erhält man, falls nur $m$ groß genug gewählt ist, derartige Polynome $\varphi_m(t)$:

$$(20')\quad \varphi_m(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{\pi}\sum_1^{m}{}_\nu\left(\frac{1}{2n+1+2\nu} + \frac{1}{2n+1-2\nu}\right)\cos \nu t$$

nebst zugehörigen

$$(21')\quad \psi_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{\pi}\sum_1^{n}{}_\nu\left(\frac{1}{2n+1+2\nu} + \frac{1}{2n+1-2\nu}\right)\cos \nu t.$$

Außer den Interpolationsstellen $t_i^{(n)}$ $(i = 1, 2 \ldots 2n+1)$ betrachte man noch die Stellen $\alpha + t_i^{(n)}$, wo $\alpha$ irgendeine reelle Zahl ist; daß diese neuen Interpolationsstellen nicht sämtlich im Intervalle $i$ liegen, ist unerheblich, man kann die hinausfallenden Stellen durch kongruente Werte des Intervalls ersetzen. Dann bilde man mit diesen Stellen und mit $\varphi_m(t)$ die Interpolationspolynome $n$ter Ordnung $J_n^\alpha(\varphi_m(t))$ für jede Zahl $\alpha$ des Intervalls $0 \leqq \alpha < 2\pi$; $J_n^0$ bedeutet selbstverständlich das nämliche wie das bisherige Zeichen $J_n$. Man kann, wie ohne weiteres einleuchtet, $J_n^\alpha(\varphi_m(t))$ auch dadurch herstellen, daß man in dem Interpolationspolynome $J_n(\varphi_m(t+\alpha))$, das sich durch Anwendung der Operation $J_n$ auf die Funktion $\varphi_m(t+\alpha)$ ergibt, hinterher die Variable $t$ durch $t - \alpha$ ersetzt:

$$(23)\qquad J_n^\alpha(\varphi_m(t))_{t=t'} = J_n(\varphi_m(t+\alpha))_{t=t'-\alpha}.$$

Ich beweise, daß

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\varphi_m(t))\,d\alpha = \psi_n(t)$$

ist (vgl. (20), (21) oder (20'), (21')). Setzt man nämlich $\varphi_m(t) = \psi_n(t) + \varrho_n(t)$, so ist ohne weiteres klar, daß unabhängig von $\alpha$: $J_n^{(\alpha)}(\psi_n(t)) = \psi_n(t)$ ist; die Behauptung (24) besagt also so viel wie:

$$\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\varrho_n(t))\,d\alpha = 0.$$

1) S. Faber, Math. Ann. 69 (1910), S. 409.

Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\varrho_n(t))\,d\alpha = \sum_{n+1}^{m}{}_\nu \left[ a_\nu \int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\cos \nu t)\,d\alpha + b_\nu \int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\sin \nu t)\,d\alpha \right]$$

und es ist leicht einzusehen, daß allgemein für ganzzahlige $k > 0$

$$(24') \qquad \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\cos(n+k)t)\,d\alpha = 0, \\ &\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\sin(n+k)t)\,d\alpha = 0 \end{aligned}$$

ist. Denn irgendein Wert $t$ sowie $t + \frac{2\pi}{n+k}$ werden zur Bildung der beiden Integrale (24′) in durchaus symmetrischer Weise benutzt; die linken Seiten von (24′), die nach Definition trigonometrische Polynome von $t$ höchstens $n$ter Ordnung sind, müßten somit die Periode $\frac{2\pi}{n+k}$ besitzen, was nur möglich ist, wenn sie identisch gleich Null sind. Um ganz klar zu sein, will ich die letzten Schlüsse noch ausführlicher begründen: Bezeichnet man $J_n^{\alpha+\tau}(f(t-\tau))$ kurz mit $F(\alpha, \tau, t)$ und $J_n^\alpha(f(t))$ mit $F(\alpha, t)$, so folgen ohne weiteres aus der Definition des Zeichens $J_n^\alpha$ die Identitäten

$$(25a) \qquad F(\alpha + 2\pi, t) \equiv F(\alpha, t)$$

sowie

$$(25b) \qquad F(\alpha, t - \tau) \equiv F(\alpha, \tau, t)$$

(vgl. (23)).

Ist nun aber $f(t)$ periodisch mit der Periode $\tau$, also $f(t-\tau) \equiv f(t)$, mithin $F(\alpha, \tau, t) \equiv J_n^{\alpha+\tau}(f(t-\tau)) \equiv J_n^{\alpha+\tau}(f(t)) \equiv F(\alpha + \tau, t)$, so folgt aus (25b) weiter

$$(26) \qquad F(\alpha, t - \tau) \equiv F(\alpha + \tau, t)$$

und indem man unter Beachtung von (25a) nach $\alpha$ zwischen den Grenzen 0 und $2\pi$ integriert, ergibt sich für das Polynom $J_n^\alpha(f(t))$ die behauptete Periodizität mit der Periode $\tau$. Wäre nun $\tau = \frac{2\pi}{n+k}$ und $J_n^\alpha(f(t))$ nicht identisch $= 0$, so ließe sich dieses trigonometrische Polynom $n^{\text{ter}}$ Ordnung in eine nach Vielfachen des Winkels $(n+k)t$ fortschreitende Fouriersche Reihe entwickeln, was einen Widerspruch mit der Eindeutigkeit der Fourier-Entwickelung ergibt.

Nun nimmt man für $\varphi_m(t)$, $\psi_n(t)$ beispielsweise die Funktionen (20′), (21′) und schließt aus (24) weiter, daß für mindestens einen Wert von $\alpha$



und für $t = 0$ das Interpolationspolynom $J_n^{(\alpha)}(\varphi_m(t))$ von der Größenordnung $\lg n$ wird; dann folgt aber (vgl. (23) oder auch die Identität (25b), die hier in der Form $F(0, t' - \alpha) \equiv F(0, \alpha, t')$ zu benutzen ist), daß das Interpolationspolynom $J_n(\varphi_m(t + \alpha))$ an der Stelle $t = -\alpha$ von der Größenordnung $\lg n$ wird. Damit ist gezeigt, daß die vorhin eingeführten Zahlen $A_n$ mindestens von der Größenordnung $\lg n$ sind, wie auch die Menge $M$ der Interpolationsstellen gewählt ist, und zugleich ist der Satz bewiesen, der das erste und nächste Ziel der vorliegenden Arbeit bildet und den ich noch einmal so formuliere:

*Es gibt keine Menge $M$ von Zahlen $t_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots 2n+1)$, welche die Eigenschaft besäße, daß für jede beliebige stetige und mit der Periode $2\pi$ behaftete Funktion $f(t)$ die trigonometrischen Polynome $n^{\text{ter}}$ Ordnung, die an den $2n+1$ Stellen $t_i^{(n)}$ die nämlichen Werte wie $f(t)$ annehmen, mit wachsendem $n$ gleichmäßig gegen $f(t)$ konvergierten.*

Darnach gibt es also immer solche $f(t)$, für welche die zur Menge $M$ gehörigen Interpolationspolynome $J_n(f(t))$ entweder divergieren oder ungleichmäßig konvergieren. Es ist mir nicht gelungen, ohne weitere Voraussetzungen über die Menge $M$ zu entscheiden, ob sich bei geeigneter Wahl der Funktion $f(t)$ je nach Belieben Divergenz oder ungleichmäßige Konvergenz der Interpolationsformeln erreichen läßt. Man könnte zur Entscheidung dieser Frage versuchen, aus Gleichung (24) mehr zu entnehmen, als daß gerade nur für ein Wertepaar $\alpha$, $t'$ $J_n^\alpha(\varphi_m(t))$ von der Größenordnung $\lg n$ wird; auch wäre daran zu denken, das Rungesche Verteilungsgesetz heranzuziehen.

Für praktische wie auch für die meisten theoretischen Zwecke ist dieser unerledigte Punkt von keiner Bedeutung; denn ungleichmäßig konvergente Entwickelungen sind im allgemeinen ebenso unbrauchbar wie divergente.

Indem ich mich also in dieser Hinsicht mit der obigen Formulierung begnüge, will ich nach einer anderen Richtung hin das erhaltene Ergebnis vervollständigen.

Statt der Menge $M$ von Interpolationsstellen sei nunmehr eine Folge von trigonometrischen Polynomen $\chi_0$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t) \ldots$ gegeben, und zwar sei $\chi_0$ eine Konstante, $\chi_{2\nu-1}(t)$ und $\chi_{2\nu}(t)$ seien vom Grade $\nu$:

$$(27) \qquad \begin{aligned} \chi_{2\nu-1}(t) = \frac{\alpha_0^{(2\nu-1)}}{2} &+ \alpha_1^{(2\nu-1)}\cos t + \cdots + \alpha_\nu^{(2\nu-1)}\cos \nu t \\ &+ \beta_1^{(2\nu-1)}\sin t + \cdots + \beta_\nu^{(2\nu-1)}\sin \nu t, \\ \chi_{2\nu}(t) = \frac{\alpha_0^{(2\nu)}}{2} &+ \alpha_1^{(2\nu)}\cos t + \cdots + \alpha_\nu^{(2\nu)}\cos \nu t \\ &+ \beta_1^{(2\nu)}\sin t + \cdots + \beta_\nu^{(2\nu)}\sin \nu t. \end{aligned}$$

Die Frage ist die: *Gibt es eine solche Folge S von Polynomen $\chi_k(t)$ der Art, daß jede stetige und die Periode $2\pi$ besitzende Funktion $f(t)$ sich in eine (im Intervalle i) gleichmäßig konvergente Reihe $f(t) = \sum_0^\infty a_\nu \chi_\nu(t)$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_\nu$ entwickeln läßt?*

Um diese Frage durch die nachstehende Beweisführung zu verneinen, muß ich über die Funktionen $\chi_k(t)$ noch folgende Zusatzhypothese machen, die wohl an sich überflüssig sein dürfte, auf deren Benutzung beim Beweise zu verzichten mir jedoch nicht gelungen ist: *Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sollen in stetiger Weise von der darzustellenden Funktion $f(t)$ abhängen.* Damit ist folgendes gemeint: Wenn zwei Funktionen $f_1(t)$, $f_2(t)$, bei denen wie auch im folgenden bei $f_3(t)$ usw. Stetigkeit und die Periode $2\pi$ vorausgesetzt werden, für alle $t$ die Ungleichung $|f_1(t) - f_2(t)| < \varepsilon$ erfüllen, so bleibt die Differenz ihrer Entwickelungskoeffizienten $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$ dem Betrage nach kleiner als eine von $\varepsilon$ und $n$ abhängige endliche Zahl $\eta_n$, und es ist $\lim_{\varepsilon=0} \eta_n = 0$; oder anders ausgedrückt: der Koeffizient $a_n$ einer Funktion $f(t)$, die nach irgendeinem Gesetze abgeändert und dadurch für alle $t$ beliebig klein wird, wird bei diesem Verfahren auch beliebig klein; oder mit ebenfalls äquivalenter Formulierung: das Reihenglied $|a_n \chi_n(t)|$ bleibt für alle $t$ unter einer endlichen Grenze $G_n$, falls $|f(t)|$ für alle $t$ kleiner als 1 ist. Noch eine vierte Fassung der Zusatzhypothese sei gestattet: Während aus der bloßen Eindeutigkeit der Entwickelung schon folgt, daß der Koeffizient $a_n$ der Funktion $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ gleich $a_n^{(1)} + a_n^{(2)}$ ist, folgt offenbar erst auf Grund der Zusatzhypothese, daß die gleichmäßig konvergente unendliche Reihe $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots$ einen Koeffizienten $a_n$ besitzt, der gleich $a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots$ ist; andrerseits ergibt sich die Zusatzhypothese aus diesem Reihensatz; denn ist die Zusatzhypothese nicht erfüllt, so brauchen die Koeffizienten $a_n^{(i)}$ der mit $\frac{1}{i}$ gleichmäßig gegen Null konvergierenden Funktionen $f_i(t)$ die Gleichung $\lim_{i=\infty} a_n^{(i)} = 0$ nicht zu befriedigen; dann würde die Reihe $a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots$ nicht konvergieren, könnte also nicht gleich dem nach Voraussetzung existierenden endlichen Koeffizienten $a_n$ sein. Man sieht daraus, daß die Zusatzhypothese von den $\chi$-Entwickelungen etwas ziemlich Selbstverständliches verlangt; jedenfalls ist sie bei allen bekannten Entwickelungen, die für gewisse Funktionsklassen, z. B. die stetig differenzierbaren möglich sind, erfüllt; bei solchen bekannten Entwickelungen läßt sich sogar immer $a_n$ in der Form $\int_0^{2\pi} f(t)\omega_n(t)\,dt$ darstellen, wo $\int_0^{2\pi} |\omega_n(t)|\,dt$ existiert, so daß die



stetige Abhängigkeit der Koeffizienten $a_n$ von der zu entwickelnden Funktion $f(t)$ in die Augen fällt.

Ohne Benutzung der Zusatzhypothese beweise ich zunächst: die Polynome $\chi_k(t)$ müssen (sofern nur die ganz speziellen Funktionen $\cos \nu t$, $\sin \nu t$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$ sich in der obigen Weise *eindeutig* durch sie ausdrücken lassen sollen), die Eigenschaft besitzen, daß sämtliche Determinanten $D_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_\nu^{(2\nu-1)} & \alpha_\nu^{(2\nu)} \\ \beta_\nu^{(2\nu-1)} & \beta_\nu^{(2\nu)} \end{vmatrix}$ von Null verschieden sind; mit anderen Worten: es darf niemals $\alpha_\nu^{(2\nu)} \cos \nu t + \beta_\nu^{(2\nu)} \sin \nu t$ bis auf einen konstanten Faktor $= \alpha_\nu^{(2\nu-1)} \cos \nu t + \beta_\nu^{(2\nu-1)} \sin \nu t$ sein $(\nu = 1, 2 \ldots)$. Wäre nämlich zunächst für $\nu = 1$: $\alpha_1^{(2)} \cos t + \beta_1^{(2)} \sin t = C(\alpha_1^{(1)} \cos t + \beta_1^{(1)} \sin t)$, so würde dies so viel heißen wie $\chi_2(t) = C\chi_1(t) + C'$, und da ja $\chi_0$ eine Konstante ist, hätte man entgegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Darstellung eine Entwickelung der Null: $0 = C''\chi_0 + C\chi_1(t) - \chi_2(t)$ mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten. Wenn nun angenommen wird, daß $D_\nu \neq 0$ ist für $\nu = 1, 2 \ldots n$, so folgt aus den gemachten Voraussetzungen auch $D_{n+1} \neq 0$. Denn für $\nu \leqq n$ ergibt sich aus (27):

$$(28)\begin{cases} \cos \nu t = \dfrac{\beta_\nu^{(2\nu)}}{D_\nu} \chi_{2\nu-1}(t) - \dfrac{\beta_\nu^{(2\nu-1)}}{D_\nu} \chi_{2\nu}(t) \begin{cases} + \text{ einem in } \cos t, \cdots \cos(\nu-1)t; \\ \quad \sin t, \cdots \sin(\nu-1)t \text{ linearen Ausdruck,} \end{cases} \\ \sin \nu t = \dfrac{-\alpha_\nu^{(2\nu)}}{D_\nu} \chi_{2\nu-1}(t) + \dfrac{\alpha_\nu^{(2\nu-1)}}{D_\nu} \chi_{2\nu}(t) \begin{cases} + \text{ einem in } \cos t, \cdots \cos(\nu-1)t; \\ \quad \sin t, \cdots \sin(\nu-1)t \text{ linearen Ausdruck.} \end{cases} \end{cases}$$

Auf den rechten Seiten von (28) kann man darnach $\cos(\nu-1)t$, $\sin(\nu-1)t$; $\cos(\nu-2)t$, $\sin(\nu-2)t$; ... nacheinander durch $\chi_{2\nu-2}(t)$, $\chi_{2\nu-3}(t)$; $\chi_{2\nu-4}(t)$, $\chi_{2\nu-5}(t)$; ... ersetzen, so daß sich schließlich $\cos \nu t$, $\sin \nu t$ und mithin alle trigonometrischen Polynome $\nu^{\text{ten}}$ Grades für $\nu \leqq n$ als endliche Ausdrücke der Form $a_0\chi_0 + a_1\chi_1(t) + \cdots + a_{2\nu}\chi_{2\nu}(t)$ ergeben. Wäre nun $\alpha_n^{(2n+2)} \cos nt + \beta_n^{(2n+2)} \sin nt = C(\alpha_n^{(2n+1)} \cos nt + \beta_n^{(2n+1)} \sin nt)$, so wäre $\chi_{2n+2}(t) \equiv C\chi_{2n+1}(t) +$ einem trigonometrischen Polynom $n^{\text{ter}}$ Ordnung also nach dem soeben Bemerkten

$$0 \equiv \chi_{2n+2}(t) - C\chi_{2n+1}(t) + a_{2n}\chi_{2n}(t) + a_{2n-1}\chi_{2n-1}(t) + \cdots + a_0\chi_0(t);$$

man hätte also wieder eine Darstellung der Null mit nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten.

Wir haben also einstweilen das Ergebnis: Wenn die Folge $S$ der Funktionen $\chi_k(t)$ so beschaffen ist, daß sich jede stetige Funktion eindeutig in eine Reihe $a_0\chi_0(t) + a_1\chi_1(t) + \cdots$ entwickeln läßt, so sind die Determinanten $D_n$ sämtlich von Null verschieden und die Funktionen $\cos nt$, $\sin nt$ und ebenso alle trigonometrischen Polynome höchstens $n^{\text{ter}}$ Ordnung lassen *endliche* Entwickelungen der Form

$$a_0\chi_0(t) + a_1\chi_1(t) + \cdots + a_{2n}\chi_{2n}(t)$$

zu.

Lautet die $\chi$-Entwickelung von $f(t)$: $a_0\chi_0(t) + a_1\chi_1(t) + \cdots$, so bezeichne ich die abgebrochene Teilreihe $a_0\chi_0(t) + a_1\chi_1(t) + \cdots + a_{2n}\chi_{2n}(t)$ kurz mit $T_n(f(t))$; die Frage, die zur Lösung steht, kann dann auch so gestellt werden: Können die Entwickelungsfunktionen $\chi_k(t)$ so gewählt werden, daß gleichmäßig in $t$ für jede stetige Funktion $f(t)$ mit der Periode $2\pi$

$$\lim_{n=\infty} T_n(f(t)) = f(t) \tag{29}$$

gilt?

Ich betrachte wieder die Klasse $K$ derjenigen stetigen und periodischen Funktionen $f(t)$, die dem Betrage nach $\leqq 1$ sind, und bezeichne mit $C_n$ die obere Grenze der Werte von $|T_n(f(t))|$ in $t$, falls $f(t)$ der Klasse $K$ angehört; diese Zahlen $C_n$ entsprechen den Zahlen $A_n$ von S. 194; und es ist auf Grund der Zusatzhypothese einleuchtend, daß für keinen Wert von $n$ $C_n = \infty$ wird.

Man beweist: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für alle stetigen Funktionen $f(t)$ mit der Periode $2\pi$ gleichmäßig in $t$ die Beziehung (29) gilt, ist

$$\lim_{n=\infty} C_n \neq \infty \tag{30}$$

Der Beweis ist genau der nämliche wie der S. 194—196 geführte; es ist fast nichts zu ändern als $C_n$ für $A_n$ und $T_n(f(t))$ für $J_n(f(t))$ zu schreiben.

Nachdem dies festgestellt ist, bleibt nur noch übrig zu beweisen, daß es unmöglich ist, die Polynome $\chi_k(t)$ so zu wählen, daß $\lim\limits_{n=\infty} C_n \neq \infty$ wird.

Um dies zu zeigen, definiere ich völlig entsprechend den Interpolationspolynomen $J_n^\alpha(f(t))$ folgendermaßen gewisse Polynome $T_n^\alpha(f(t))$: Wenn $T_n(f(t+\alpha)) = G_\alpha(t)$ gesetzt wird, so sei $T_n^\alpha(f(t))$ so viel wie $G_\alpha(t-\alpha)$; ist $f(t)$ ein trigonometrisches Polynom höchstens $n^{\text{ten}}$ Grades, dann ist offenbar $T_n^\alpha(f(t)) \equiv f(t)$, also auch $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} T_n^\alpha f(t)\,d\alpha \equiv f(t)$; ist aber $f(t) = \sin(n+k)t$ oder $= \cos(n+k)t$ mit ganzzahligem $k > 0$, so ergibt sich aus genau den gleichen Überlegungen wie S. 198: $\int\limits_0^{2\pi} T_n^\alpha(f(t)) \equiv 0$. Und auch der Rest des Beweises, daß $\lim\limits_{n=\infty} C_n = \infty$ ist, wird genau so geführt wie der entsprechende für $\lim\limits_{n=\infty} A_n = \infty$.

Damit haben wir den *zweiten Satz* gewonnen:

*Es gibt keine Folge von trigonometrischen Polynomen $\chi_0, \chi_1(t), \chi_2(t)\ldots$, wo $\chi_0$ eine Konstante ist und $\chi_{2\nu-1}(t)$, sowie $\chi_{2\nu}(t)$ vom $\nu^{\text{ten}}$ Grade sind, mit der Eigenschaft, daß sich jede stetige und die Periode $2\pi$ besitzende Funktion $f(t)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe*

$$a_0 + a_1\chi_1(t) + a_2\chi_2(t) + \cdots$$

*mit eindeutig bestimmten und in stetiger Weise von $f(t)$ abhängigen Koeffizienten $a_\nu$ entwickeln ließe.*



An Stelle der für alle reellen $t$ definierten periodischen Funktionen $f(t)$ betrachte ich nunmehr in einem endlichen Intervalle $s$ stetige Funktionen $F(x)$ der reellen Veränderlichen $x$; als Intervall $s$ wähle ich beispielshalber immer die Strecke $(-1, +1)$.

Unter $x_1^{(n)} x_2^{(n)} \ldots x_{n+1}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ verstehe ich $(2n+1)$ verschiedene der Größe nach, beginnend mit der kleinsten, geordnete Zahlen dieses Intervalls; die Gesamtheit der Zahlen $x_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots n+1)$ bezeichne ich mit $E$; ich bilde mittels der Lagrangeschen Interpolationsformel die Polynome $n^{\text{ten}}$ Grades, die für $x = x_i^{(n)}$ die Werte $F(x_i^{(n)})$ annehmen $(i = 1, \ldots n+1)$:

$$L_n(F(x)) = F(x_1^{(n)}) \frac{(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_{n+1}^{(n)})}{(x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) \ldots (x_1^{(n)} - x_{n+1}^{(n)})} + \cdots + F(x_{n+1}^{(n)}) \frac{(x - x_1^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)})}{(x_{n+1}^{(n)} - x_1^{(n)}) \ldots (x_{n+1}^{(n)} - x_n^{(n)})}. \tag{31}$$

Die Frage ist dann die: *Kann die Menge $E$ der Interpolationsstellen $x_i^{(n)}$ ein für allemal so gewählt werden, daß für jede stetige Funktion $F(x)$ die Interpolationspolynome $L_n(F(x))$ mit wachsendem $n$ gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergieren?*

Der Gedankengang, durch den diese Frage verneint wird, ist ganz ähnlich dem beim Beweise des ersten Satzes benutzten. Die aufgestellte Frage erweist sich als gleichwertig mit der andern: ist für eine Menge $E$ von Interpolationsstellen

$$\lim_{n=\infty} D_n \neq \infty, \tag{32}$$

wenn unter $D_n$ (entsprechend $A_n$ beim ersten Satze) das Maximum innerhalb $s$ der Funktion

$$\left|\frac{(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_{n+1}^{(n)})}{(x_1^{(n)} - x_2^{(n)}) \ldots (x_1^{(n)} - x_{n+1}^{(n)})}\right| + \cdots + \left|\frac{(x - x_1^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)})}{(x_{n+1}^{(n)} - x_1^{(n)}) \ldots (x_{n+1}^{(n)} - x_n^{(n)})}\right| \tag{33}$$

verstanden wird. Daß aber $\lim\limits_{n=\infty} D_n = \infty$ ist, wird wieder durch Konstruktion von Polynomen $\Phi_m(x)$ bewiesen (entsprechend der S. 196 mit $\varphi_m(t)$ bezeichneten), die zwar selbst dem Betrage nach $\leqq 1$ sind, für die aber bei passender Wahl von $n$ das Interpolationspolynom $L_n(\Phi_m(x))$ an mindestens einer Stelle des Intervalls $s$ von der Größenordnung $\lg n$ wird; es stellt sich heraus, daß zu jeder noch so großen Zahl $n$ zugehörige Polynome $\Phi_m(x)$ existieren.

Einer näheren Ausführung bedarf nur der Existenzbeweis für diese Polynome $\Phi_m(x)$. Es sei zunächst $\Phi(x)$ irgendein Polynom $m^{\text{ten}}$ Grades, das dem Betrage nach $\leqq 1$ ist; ich mache in $\Phi(x)$ und in dem Interpolationspolynome $L_n(\Phi(x))$ die Substitution $x = d_n \cos t$, und zwar sei $d_n = x_{n+1}^{(n)}$, falls $|x_{n+1}^{(n)}| \geqq |x_1^{(n)}|$ ist und $d_n = x_1^{(n)}$, falls $|x_{n+1}^{(n)}| < |x_1^{(n)}|$ ist; das auf der Strecke $s$ liegende und möglicherweise mit $s$ zusammenfallende Intervall $-|d_n| \leqq x \leqq +|d_n|$, das seinerseits wieder alle Interpolationsstellen $x_i^{(n)}$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ enthält, wird so auf jedes der Intervalle $l\pi \leqq t \leqq (l+1)\pi$ abgebildet $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; das Polynom $\Phi(x)$ geht durch die obige Substitution in ein trigonometrisches Polynom $m^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(t)$ über, das nur cos-Glieder enthält, während das Interpolationspolynom $L_n(\Phi(x))$, für das ich kurz $\Lambda(x)$ schreibe, in ein cos-Polynom $n^{\text{ten}}$ Grades $\lambda(t)$ übergeht.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $|x_1^{(n)}| \neq |x_{n+1}^{(n)}|$ oder $|x_1^{(n)}| = |x_{n+1}^{(n)}|$ ist; im ersten Falle entspricht die Stelle $\pi$ keiner der Zahlen $x_i^n$ und es finden sich im Intervalle $i$ $(0 \leqq t < 2\pi)$ $2n+1$ Stellen $t_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots 2n+1)$, welche den Interpolationsstellen $x_i^{(n)}$ entsprechen und auch ihrerseits Interpolationsstellen genannt werden sollen; eine davon ist $t_1^{(n+1)} = 0$; die anderen liegen symmetrisch zur Stelle $t = \pi$. Das Polynom $\lambda(t)$ stimmt an den Stellen $t_i^{(n)}$ mit $\varphi(t)$ überein, ist also nach der eingeführten Bezeichnungsweise $J_n(\varphi(t))$; im zweiten Falle $|x_1^{(n)}| = |x_{n+1}^{(n)}|$ entsprechen den Zahlen $x_i^{(n)}$ nur $2n$ Stellen $t_i^{(n)}$ des Intervalles $i$, darunter $t_1^{(n)} = 0$, $t_n^{(n)} = \pi$; die $(2n-2)$ andern liegen symmetrisch zur Stelle $t = \pi$. Die Aufgabe, ein trigonometrisches Polynom $n^{\text{ter}}$ Ordnung zu finden, das an diesen $2n$ Stellen $t_i^{(n)}$ die nämlichen Werte annimmt wie $\varphi(t)$, läßt unendlich viele Lösungen zu; eine davon ist $\lambda(t)$, die anderen sind in der Form

$$\lambda(t) + A \sin t\,(d_n \cos t - x_2^{(n)})\,(d_n \cos t - x_3^{(n)}) \cdots (d_n \cos t - x_n^{(n)})$$

enthalten. Da $\varphi(t)$ im vorliegenden Falle eine gerade Funktion von $t$ ist, liegt es nahe, das Interpolationspolynom so zu bestimmen, daß es auch eine gerade Funktion wird, wodurch man eindeutig auf $\lambda(t)$ kommt. Im folgenden aber wird es nötig sein, zu einem beliebigen trigonometrischen Polynom $m^{\text{ter}}$ Ordnung $\psi(t)$, das nun auch sin-Glieder enthalten darf, *eindeutig* ein Polynom $\mu(t)$ $n^{\text{ten}}$ Grades zu finden, das an jenen $2n$ Stellen $t_i^{(n)}$ mit $\psi(t)$ übereinstimmt; dies geschieht mittels der Zusatzbedingung, daß $\mu'(0) = \psi'(0)$ sein soll, wodurch die Konstante $A$ eindeutig bestimmt ist und man zugleich in Übereinstimmung mit der soeben in dem Spezialfalle $\varphi(t)$, $\lambda(t)$ getroffenen Fortsetzung bleibt.

Nachdem so für jedes trigonometrische Polynom $\varphi(t)$ in jedem der beiden Fälle die Bedeutung von $J_n(\varphi(t))$ festgelegt ist, wird $J_n^\alpha(\varphi(t))$ in



Übereinstimmung mit der S. 197 gegebenen Definition folgendermaßen erklärt: Ergibt die Operation $J_n$, angewandt auf das Polynom $\varphi(t+\alpha)$ das Polynom $n^{\text{ter}}$ Ordnung $k(t)$, so ist $J_n^\alpha(\varphi(t)) = k(t-\alpha)$.

Es sei nun im folgenden $\varphi(t)$ stets gleich dem früher eingeführten cos-Polynom $\varphi_m(t)$ (20′). Ich setze

$$\text{(34a)}\qquad \varphi_m(t) = \sum_0^m \varkappa_\nu \cos \nu(t-\alpha) + \sum_1^m \lambda_\nu \sin \nu(t-\alpha) = k(\cos(t-\alpha)) + l(\sin(t-\alpha))$$

und

$$\text{(34b)}\qquad J_n^\alpha(\varphi_m(t)) = \sum_0^n \gamma_\nu \cos \nu(t-\alpha) + \sum_1^n \delta_\nu \sin \nu(t-\alpha) = g_n^\alpha(\cos(t-\alpha)) + h_n^\alpha(\sin(t-\alpha)).$$

Dann ist offenbar

$$\text{(35)}\qquad k(\cos t) = \frac{\varphi_m(\alpha+t) + \varphi_m(\alpha-t)}{2},\qquad l(\sin t) = \frac{\varphi_m(\alpha+t) - \varphi_m(\alpha-t)}{2},$$

also bleiben $k(\cos t)$ und $l(\sin t)$ gleichzeitig mit $\varphi_m(t)$ dem Betrage nach $\leqq 1$. Auch ist

$$\text{(36a)}\qquad J_n^\alpha[k(\cos(t-\alpha))] = g_n^\alpha(\cos(t-\alpha))$$

$$\text{(36b)}\qquad J_n^\alpha[l(\sin(t-\alpha))] = h_n^\alpha(\sin(t-\alpha));$$

denn wegen der Symmetrie in der Verteilung der Interpolationsstellen muß auf der rechten Seite von (36a) eine gerade, auf der rechten Seite von (36b) eine ungerade Funktion von $t-\alpha$ stehen; da aber wegen (34a) die Summe dieser Funktionen gleich der rechten Seite von (34b) sein muß, können es nur die in (36a), (36b) angegebenen Funktionen sein.

Da die zu $\varphi_m(t)$ zugehörige Funktion $\psi_n(t)$ (vgl. (21′)) für $t = 0$ gleich $\beta \lg n$ wird, wo $\beta > 0$ von $n$ unabhängig ist, und da, wie bewiesen wurde,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\varphi_m(t))\,d\alpha = \psi_n(t)$$

ist, muß für mindestens einen Wert $\alpha$ $J_n^\alpha(\varphi(t))$ an der Stelle $t = 0$ größer oder gleich $\beta \lg n$ werden; d. h. mit Benutzung von (34b):

$$\text{(37)}\qquad g_n^\alpha(\cos\alpha) - h_n^\alpha(\sin\alpha) \geqq \beta \lg n.$$

Ich behaupte, daß $\alpha$ gleichzeitig so gewählt werden kann, daß

$$\text{(38)}\qquad g_n^\alpha(\cos\alpha) \geqq \frac{\beta}{2} \lg n$$

ausfällt.

Um mich an dieser Stelle nicht zu sehr aufzuhalten, beweise ich (38) nachträglich. Da wegen der Bedeutung des Symbols $J_n^\alpha$ (vgl. (23)) Gleichung (36a) identisch ist mit

$$J_n(k(\cos t)) = g_n^\alpha(\cos t), \tag{39}$$

besitzen wir nunmehr in $k(\cos t)$ *ein reines Cos-Polynom*, das selbst dem Betrage nach $\leqq 1$ ist, aus dem aber durch die trigonometrische Interpolation an den Stellen $t_i^{(n)}$ ein anderes Cos-Polynom $g_n^\alpha(\cos t)$ entsteht, das auf Grund von (38) von der Größenordnung $\lg n$ wird. Setzt man wieder $d_n \cos t = x$, so geht $k(\cos t)$ in ein Polynom $\Phi(x) \equiv k\left(\frac{x}{d_n}\right)$ über, das auf der Strecke $|x| \leqq d_n$ dem Betrage nach $\leqq 1$ ist, das aber mittels der Lagrangeschen Interpolationsformel zu einem innerhalb jener Strecke Werte von der Größenordnung $\lg n$ annehmenden Polynome $L_n(\Phi(x)) \equiv g_n^\alpha\left(\frac{x}{d_n}\right)$ Veranlassung gibt. Wenn nicht von vornherein die Strecke $|x| \leqq d_n$ mit der Strecke $s$: $|x| \leqq 1$ zusammenfällt, so kann man doch annehmen, daß $\Phi(x)$ auch auf dieser erweiterten Strecke der Bedingung $|\Phi(x)| \leqq 1$ genügt; wäre das nämlich nicht von vornherein der Fall, so könnte man auf den Punkten der Strecke $s$, die außerhalb der Strecke $|x| \leqq d_n$ liegen, $\Phi(x)$ irgendwie als stetige und dem Betrage nach unterhalb 1 bleibende Funktion definieren; diese erweiterte Funktion $\Phi(x)$, die nicht mehr notwendig ein Polynom ist, kann dann hinterher mit solcher Genauigkeit durch ein Näherungspolynom $\Phi(x)$ ersetzt werden, daß sowohl $|\Phi(x)| < 1$ als auch $L_n(\Phi(x))$ von der Größenordnung $\lg n$ wird.

Damit ist gezeigt, daß die S. 201 eingeführten Zahlen $D_n$ die Bedingung $\lim D_n = \infty$ erfüllen, und es bleibt nur noch der Nachweis von (38) nachzutragen; dieser ist im Grunde das einzige, was beim Beweise unseres dritten Satzes gegenüber dem des ersten neu hinzukommt.

Nach (36a) und (35) ist

$$\begin{aligned} g_n^\alpha(\cos(t-\alpha)) &= J_n^\alpha[k(\cos(t-\alpha))] \\ &= J_n^\alpha\left[\frac{\varphi_m(t)+\varphi_m(-t+2\alpha)}{2}\right], \end{aligned} \tag{40}$$

also wegen des distributiven Charakters von $J_n^\alpha$:

$$g_n^\alpha(\cos(t-\alpha)) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^m \frac{a_\nu}{2} J_n^\alpha(\cos \nu t + \cos \nu(-t+2\alpha)), \tag{41}$$

wo die Koeffizienten der Funktion (20') wieder kurz mit $a_\nu$ bezeichnet sind. Ferner ist



(42a) $J_n^\alpha(\cos\nu t+\cos\nu(-t+2\alpha)) = (1+\cos 2\nu\alpha) J_n^\alpha(\cos\nu t) + \sin 2\nu\alpha\, J_n^\alpha(\sin\nu t)$

und falls $\nu \leqq n$:

$$= (1+\cos 2\nu\alpha)\cos\nu t + \sin 2\nu\alpha \sin\nu t; \tag{42b}$$

also für $\nu \leqq n$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\cos\nu t + \cos\nu(-t+2\alpha))\,d\alpha = \cos\nu t. \tag{43}$$

Für $\nu > n$ ist dagegen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\cos\nu t + \cos\nu(-t+2\alpha))\,d\alpha = 0, \tag{44}$$

weil (vergleiche die rechte Seite von (42a)) sowohl (wie S. 198 bewiesen wurde)

$$\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\cos\nu t)\,d\alpha = 0, \tag{45}$$

als auch, wie man in ganz ähnlicher Weise beweist:

$$\int_1^{2\pi} J_n^\alpha(\cos\nu t)\cos 2\nu\alpha\,d\alpha = 0 \tag{46a}$$

und

$$\int_0^{2\pi} J_n^\alpha(\cos\nu t)\sin 2\nu\alpha\,d\alpha = 0 \tag{46b}$$

ist.

Um beispielsweise den Beweis für (46a) durchzuführen, setze man $\frac{2\pi}{\nu} = \tau$, sowie im Anschluß an die Bezeichnungsweise von S. 198: $J_n^\alpha(\cos\nu t)\cos 2\nu\alpha = F(\alpha, t)$; $J_n^{\alpha+\tau}(\cos\nu(t-\tau))\cos 2\nu(\alpha+\tau) = F(\alpha,\tau,t)$; dann folgt genau wie dort aus (23):

$$F(\alpha, t-\tau) \equiv F(\alpha,\tau,t) \equiv F(\alpha+\tau, t),$$

also indem man $\alpha + \tau = \alpha'$ setzt und die Gleichung

$$F(\alpha + 2\pi, t) \equiv F(\alpha, t)$$

beachtet,

$$\int_0^{2\pi} F(\alpha,t)\,d\alpha \equiv \int_0^{2\pi} F(\alpha', t-\tau)\,d\alpha',$$

d. h. das durch $\int_0^{2\pi} F(\alpha,t)\,d\alpha$ dargestellte trigonometrische Polynom $n^{\text{ten}}$ Grades von $t$ besitzt die Periode $\frac{2\pi}{\nu}$ $(\nu > n)$, was unmöglich ist, wenn es sich nicht identisch auf Null reduziert; damit sind die Gleichungen (46) bewiesen.

Setzt man die erhaltenen Werte (43), (44) auf der rechten Seite von (41) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n^\alpha(\cos(t-\alpha))\,d\alpha = \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\psi_n(t). \tag{47}$$ (s. (21'))

Es gibt also mindestens einen Wert von $\alpha$, für den $g_n^\alpha(\cos(-\alpha)) \geqq \frac{\beta}{2}\lg n$ (38) wird. Das war aber einzig noch zu beweisen, um die Richtigkeit des folgenden *dritten Satzes* darzutun:

*Es gibt keine im Intervalle $s = (-1, +1)$ gelegene Menge $E$ von Interpolationsstellen $x_i^{(n)}$ $(n = 1, 2\ldots;\ i = 1, 2\ldots n+1)$ von der Art, daß jede in $s$ stetige Funtion $\Phi(x)$ sich gleichmäßig in $s$ als Grenzwert derjenigen Polynome $n^{\text{ten}}$ Grades darstellen ließe, die für $x = x_i^{(n)}$ die nämlichen Werte annehmen wie $\Phi(x)$.*

Fast von selbst ergibt sich auf Grund des Vorhergehenden endlich der Beweis des folgenden *vierten Satzes:*

*Es gibt keine Folge von Polynomen $P_0(x), P_1(x), \ldots P_\nu(x) \ldots$ vom Grade $0, 1, \ldots \nu \ldots$ mit der Eigenschaft, daß jede im Intervalle $s = (-1, +1)$ stetige Funktion $\Phi(x)$ sich in eine in $s$ gleichmäßig konvergente Reihe*

$$\Phi(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \cdots + a_\nu P_\nu(x) + \cdots$$

*mit eindeutig bestimmten und in stetiger Weise von $\Phi(x)$ abhängigen Koeffizienten entwickeln ließe.*

Da der Beweis des vierten Satzes im einzelnen nur aus Wiederholungen schon gemachter Schlüsse besteht, skizziere ich nur seine Etappen.

Man betrachtet wieder die Klasse $K$ derjenigen Funktionen $\Phi(x)$, die in $s$ stetig und dem Betrage nach $\leqq 1$ sind, und bezeichnet mit $E_n$ den größten Wert, den die nach $(n+1)$ Gliedern abgebrochene Entwicklung einer solchen Funktion $\Phi(x)$ in eine $P$-Reihe, überhaupt annehmen kann; eine solche abgebrochene $P$-Reihe bezeichne ich kurz mit $U_n(\Phi(x))$:

$$U_n(\Phi(x)) = a_0 P_0 + a_1 P_1(x) + \cdots + a_n P_n(x). \tag{48}$$

Man sieht, daß alle $E_n$ endlich sind, und daß der vierte Satz gleichwertig ist mit der Behauptung

$$\lim_{n=\infty} E_n = \infty.$$



Es wird dann gezeigt, daß sogar $\lim_{n=\infty} E_n = \infty$ ist. Die Funktionen $P_\nu(\cos t)$ bilden zusammen mit den Funktionen $\sin \nu t$ ein Funktionensystem $\chi_k(t)$ von der S. 201 betrachteten Art:

$$\begin{cases} \chi_{2\nu}(t) = P_\nu(\cos t) & (\nu = 0, 1, 2\ldots) \\ \chi_{2\nu-1}(t) = \sin \nu t & (\nu = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{50}$$

Dann lassen sich zu jeder stetigen und die Periode $2\pi$ besitzenden Funktion $\psi(t)$, in eindeutiger Weise die Koeffizienten $a_0, a_1 \ldots, b_1, b_2 \ldots$ der Entwicklung

$$\psi(t) \sim \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu P_\nu(\cos t) + \sum_1^\infty{}_\nu\, b_\nu \sin \nu t \tag{51}$$

nach der Vorschrift bilden, daß die $b_\nu$ die Fourierkoeffizienten von $\frac{\psi(t)-\psi(-t)}{2}$ sein sollen, während die $a_\nu$ mit den Koeffizienten der Entwicklung $\Psi(x) \sim \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu P_\nu(x)$ identisch sein sollen, wo $\Psi(x)$ diejenige in $s$ stetige Funktion von $x$ bedeutet, welche vermöge der Substitution $x = \cos t$ aus $\frac{\psi(t)+\psi(-t)}{2}$ hervorgeht.

Man setze insbesondere für $\psi(t)$ das trigonometrische Polynom $\varphi_m(t)$ (20') und betrachte die Polynome $T_n^\alpha(\varphi_m(t))$; deren S. 202 gegebene Definition stimmt offenbar mit der folgenden überein:

Lautet die eindeutig vorhandene endliche Entwicklung von $\varphi_m(t)$ nach Funktion $\chi_k(t-\alpha)$, wo die $\chi_k$ die obige Bedeutung (50) haben:

$$\varphi_m(t) = \sum_0^m{}_\nu\, a_\nu^\alpha \chi_{2\nu}(t-\alpha) + \sum_1^m{}_\nu\, b_\nu^\alpha \chi_{2\nu-1}(t-\alpha), \tag{52}$$

so ist

$$T_n^\alpha(\varphi_m(t)) = \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^\alpha \chi_{2\nu}(t-\alpha) + \sum_1^n{}_\nu\, b_\nu^\alpha \chi_{2\nu-1}(t-\alpha). \tag{53}$$

Da wieder

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n^\alpha(\varphi_m(t))\,d\alpha = \psi_n(t) \tag{21'}$$

ist, so existiert mindestens ein $\alpha$, für das

$$\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^\alpha \chi_{2\nu}(-\alpha) + \sum_1^n{}_\nu\, b_\nu^\alpha \chi_{2\nu-1}(-\alpha) \geqq \beta \lg n \tag{54}$$

wird, wo $\beta$ von $n$ unabhängig ist. Und genau so, wie zuvor die Gleichung (38) bewiesen wurde, beweist man jetzt, daß bei passender Wahl von $\alpha$ der erste Summand der linken Seite von (54), nämlich

$$\sum_0^n a_\nu^\alpha \chi_{2\nu}(-\alpha) \text{ für sich allein} \geqq \frac{\beta}{2} \lg n$$

wird. Geht man wieder von der Veränderlichen $t$ zur Veränderlichen $x$ zurück, so hat man dann in $\sum_0^m a_\nu^\alpha P_\nu(x)$ und $\sum_0^n a_\nu^\alpha P_\nu(x)$ zwei Polynome $\Phi(x)$ und $\Phi_1(x)$, die in der Beziehung $\Phi_1(x) = U_n(\Phi(x))$ zueinander stehen, und von denen das erste, $\Phi(x)$, in $s$ dem Betrage nach $\leqq 1$ bleibt, während $\Phi_1(x)$ für $x = \cos\alpha$ größer oder gleich $\frac{\beta}{2} \lg n$ wird, womit $E_n$ als mindestens von der Größenordnung $\lg n$ nachgewiesen ist.

# Beweise zu Sätzen von Brunn und Minkowski über die Minimaleigenschaft des Kreises.

Von WILHELM BLASCHKE in Prag.

## Inhalt.



H. Minkowski hat für zwei im Endlichen gelegene konvexe Bereiche in der Ebene eine Invariante $M$ erklärt, die er den gemischten Flächeninhalt der beiden Bereiche nennt. Diese Größe hängt von den beiden Bereichen in symmetrischer Weise ab und bleibt ungeändert, wenn man die Bereiche unabhängig voneinander parallel verschiebt. Fallen sie zusammen, so geht $M$ in den gewöhnlichen Flächeninhalt über; ist einer der Bereiche ein Einheitskreis, so bedeutet $M$ den halben



Umfang des andern. Zwischen den Flächeninhalten $F_0$, $F_1$ zweier Bereiche und ihrer gemischten Fläche besteht die fundamentale Ungleichung

$$M^2 - F_0 F_1 \geqq 0,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn die Bereiche ähnlich sind und ähnlich liegen. Nimmt man für das eine Gebiet einen Kreis, so erhält man eine speziellere Ungleichung, deren Inhalt der Satz von der Minimaleigenschaft des Kreises ist. Die allgemeine Ungleichung läßt auch eine räumliche Deutung zu. Diese ergibt den wichtigen Satz von H. Brunn über die Flächeninhalte paralleler Querschnitte eines konvexen Körpers.[1])

Der Beweis, den Minkowski in seiner scharfsinnigen Abhandlung „Volumen und Oberfläche", fußend auf einem Gedanken von H. Brunn, für seine Ungleichung gegeben hat[2]), ist nicht leicht zu überblicken. Ich möchte mir daher hier erlauben, einen andern, mehr geometrischen Beweis für diese Ungleichung und damit für die Minimaleigenschaft des Kreises und für den Satz von Brunn mitzuteilen, einen Beweis, der nur völlig elementare Hilfsmittel verwendet und wohl ganz durchsichtig ist. Ich beginne damit, auf Grund einer symmetrischen Formel für die Vierseitsfläche die Ungleichung zuerst für den einfachsten Fall, nämlich für zwei gleichgerichtete Vierseite herzuleiten. Damit ist dann eigentlich die Hauptschwierigkeit schon überwunden. Auf diesen einfachen Sonderfall kann man nämlich den allgemeinen Satz zurückführen. Zuerst folgt die Gültigkeit des Satzes für zwei gleichgerichtete $n$-Seite und damit durch einen Grenzübergang auch für beliebig krummlinig begrenzte konvexe Bereiche.

Auf diese elementare Beweismethode bin ich durch die Abhandlungen von J. Steiner geführt worden, in denen die schönen Beweisansätze für das spezielle isoperimetrische Problem enthalten sind.[3]) Es wird der Versuch unternommen, eine Brücke zu schlagen von den Steinerschen Ideen zum Gedankenkreis Minkowskis.

Schließlich gebe ich noch einen andern kurzen Beweis für die fundamentale Ungleichung, und zwar mit Hilfe der trigonometrischen Reihen ähnlich einem von A. Hurwitz für die Minimaleigenschaft des Kreises geführten Beweise.[4]) Dabei ist hier jede einschränkende Voraus-

1) H. Brunn, Ovale und Eiflächen, Dissertation, München 1887. Eine Anwendung dieses Satzes auf die Abschätzung von Doppelintegralen habe ich kürzlich angegeben. C. R., t. 158, p. 778, Paris 16. 3. 1914.

2) Mathematische Annalen, Bd. 57 (1903) oder Gesammelte Abhandlungen (Leipzig 1911), Bd. 2.

3) Über Maximum und Minimum bei den Figuren . . ., Crelles Journal, Bd. 24 (1842) oder Gesammelte Werke, Bd. 2 (Berlin 1882).

4) Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, Annales de l'école normale supérieure, (3) t. 19 (1902), p. 357—408.