C. R. Acad. Sci., Paris

 Vol 131, (1900) 984–987

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions bornées et intégrables.* Note de M. **Léopold Fejér**, présentée par M. Picard.

« On sait que, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, la limite

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}}{n} \tag{1}$$

existe et est égale à $\sum_{1}^{\infty} a_n$, où σ_{n-1} désigne la somme $\sum_{n=0}^{n-1} a_n$.

» Nous devons ranger, parmi les séries divergentes les plus simples, les séries pour lesquelles existe au moins la limite (1). Une série divergente de telle sorte est la suivante :

$$\frac{1}{2} + \cos\delta + \cos 2\delta + \ldots + \cos(n-1)\delta + \ldots. \tag{2}$$

Ici l'on a

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}}{n} = \frac{1}{2n} \frac{1 - \cos n\delta}{1 - \cos\delta}, \tag{3}$$

et donc (pour $\delta \gtrless 2k\pi$)

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1}}{n} = 0.$$

» Nous voulons d'abord démontrer que la série de Fourier d'une fonction *bornée* et *intégrable* appartient à la classe des séries pour lesquelles la limite (1) *existe*.

» Avec plus de précision, on a le théorème :

» I. Soit $f(x)$ une fonction *bornée* et *intégrable* dans l'intervalle $\overline{0, 2\pi}$, c'est-à-dire de 0 à 2π, en y comprenant les extrémités; alors la série de Fourier correspondante à $f(x)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha\right] \tag{4}$$

peut être divergente; mais en tous les points x, pour lesquels $f(x)$ est continue ou possède une *discontinuité du premier genre* [c'est-à-dire $f(x+0)$, $f(x-0)$ sont finis, mais distincts], la limite

$$\lim \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}$$

existe et est égale à $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, où s_{n-1} désigne la somme des n premiers termes de la série (4).

» En effet, en employant l'identité (3), on a

$$(5)\qquad \frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n} = S_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}f(\alpha)\,d\alpha.$$

» Soit $f(x)$ *continu* en x. Alors étant donné un nombre δ aussi petit qu'on veut, on peut fixer un autre nombre ε, tel que

$$|f(x+h)-f(x)|<\delta$$

lorsque $|h|\leqq\varepsilon$. Nous pouvons écrire

$$S_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon} + \frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}.$$

» Mais si nous désignons par M le maximum de la valeur absolue de $f(x)$ pour l'intervalle $\overline{0,2\pi}$, nous avons

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\cdots\right| < \frac{1}{n}\,\frac{M(x-\varepsilon)}{\pi(1-\cos\varepsilon)}$$

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\cdots\right| < \frac{1}{n}\,\frac{M[2\pi-(x+\varepsilon)]}{\pi(1-\cos\varepsilon)}$$

et appliquant le premier théorème de la moyenne (ce qui est possible, car $\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}$ n'est jamais négatif)

$$S_n = [f(x)+\eta]\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha + \varepsilon'_n$$

où $|\eta|<\delta$ et $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon'_n = 0$.

» Mais on peut décomposer

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon} + \frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\right).$$

Les deux termes entre crochets tendent vers 0 pour $n=\infty$. Or, en appliquant l'identité (3)

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha = 1,$$

on aura donc

$$S_n(x) = [f(x)+\eta](1+\varepsilon''_n)+\varepsilon'_n,$$

où $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon''_n = 0$, et par suite, si n est suffisamment grand,

$$|S_n(x)-f(x)|<2\delta.$$

» On peut traiter de la même manière le cas d'une discontinuité du premier genre, et le théorème est établi.

» Remarquons maintenant que l'on a pour une fonction *bornée* et *intégrable* le développement

$$f(x) = S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_{n+1} - S_n) + \ldots.$$

» Mais, d'après la définition de S_n sous (5), on a

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{n\frac{1}{2} + (n-1)\cos(\alpha - x) + \ldots + \cos(n-1)(\alpha - x)}{n}\,d\alpha$$
$$= \lambda_0 + \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \ldots + \lambda_{n-1}\cos\overline{n-1}\,x + \mu_{n-1}\sin\overline{n-1}\,x.$$

» On peut donc conclure

» II. Une fonction *bornée* et *intégrable* admet un développement

$$\sum_1^\infty f_n(x),$$

où *le terme général est une suite finie de Fourier*.

» La série converge pour toutes les valeurs de x, où $f(x)$ est continu, ou possède une discontinuité du premier genre, et a pour somme $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

» *Remarques.* — On voit aisément que l'intégrale $S_n(x)$ converge *uniformément* vers $f(x)$ dans un intervalle $\overline{b, c}$, où $f(x)$ est *continu sans exception*, c'est-à-dire on peut trouver une série finie de Fourier : $S_n(x)$, telle que

$$|S_n(x) - f(x)| < \delta,$$

si $n > N$ pour *tous* les points de $\overline{b, c}$. De ce fait résulte le théorème de Weierstrass :

» *Une fonction continue admet un développement* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, *où* $f_n(x)$ *désigne un polynome*. (Voir aussi la Note de M. Picard, *Comptes rendus*, t. CXII; 1891, et *Traité d'Analyse*, t. I.)

» En partant de l'équation

$$I(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, f(\psi)\,d\psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\varphi) r^n,$$

valable pour $r < 1$ où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos n(\psi - \varphi)\,d\psi \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

on peut, avec application du théorème I, donner une théorie générale et nouvelle de l'intégrale de Poisson. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann.* Note de M. **W. Stekloff**, présentée par M. Picard.

« 1. Soit (S) une surface satisfaisant aux conditions du théorème I de ma Note précédente (*Sur les fonctions fondamentales et le problème de Dirichlet*).

» En posant dans les équations (1) de la Note citée $\varphi = \rho$, ρ étant la densité d'une couche électrique en équilibre sur (S) (¹), nous obtiendrons les fonctions de M. Poincaré (*Acta mathem.*, t. XX; 1896).

» On peut démontrer les propriétés suivantes de ces fonctions fondamentales que nous désignerons par $V_s (s = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\frac{\partial V_{si}}{\partial n} = \lambda_s \rho V_s, \qquad \frac{\partial V_{si}}{\partial n} = -\mu_s \frac{\partial V_{se}}{\partial n}, \qquad V_s = \frac{m_s}{4\pi}\int \rho V_s \frac{1}{r}\,ds;$$

$$(1) \qquad V_s = \frac{1+\mu_s}{4\pi}\int V_s \frac{\cos\psi}{r^2}\,ds \text{ à l'intérieur de (S)},$$

$$(2) \qquad \rho V_s = \frac{1+\mu_s}{2\pi(1-\mu_s)}\int \rho V_s \frac{\cos\psi}{r^2}\,ds \text{ sur (S)},$$

où λ_s, μ_s, m_s sont des constantes positives,

$$m_s = \lambda_s \frac{1+\mu_s}{\mu_s}.$$

Quant à μ_s, il est égal à zéro pour $s = 0$ et *différent de zéro* pour toutes les autres valeurs de s, à partir de $s = 1, \ldots$.

» On a

$$\mu_s = \frac{\int \sum \left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)^2 d\tau}{\int \sum \left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)^2 d\tau'},$$

(¹) J'ai démontré l'existence de ρ dans ma Note du 6 mars 1899 [voir aussi mon Mémoire : *Les méthodes générales*, etc. (*Annales de Toulouse*, t. II; 1900)].