

Jerzy Szender

Nowe dowody pewnych twierdzeń dotyczących pierwiastków charakterystycznych macierzy o elementach nieujemnych

Korzystając z podstawowego twierdzenia dotyczącego układów nierówności różniczkowych zwyczajnych udowodniliśmy dwa twierdzenia, które wykazał Frobenius na drodze algebraicznej.

Pierwsze z tych twierdzeń mówi o tym, że pierwiastek charakterystyczny macierzy o elementach nieujemnych, poza przekątną główną, którego część rzeczywista stanowi maksimum części rzeczywistych pierwiastków charakterystycznych tej macierzy, jest rzeczywisty.

Drugie, że pierwiastek ten rośnie, jeżeli powiększamy elementy macierzy.

Podobnymi zagadnieniami zajmowała się Z. Szmydt [1].

Korzystając z tych twierdzeń podamy następnie pewien sposób szacowania wielkości tego pierwiastka charakterystycznego.

§ 1

Posłużymy się następującym twierdzeniem z nierówności różniczkowych [2], przy czym podamy je w postaci mniej ogólnej, ale wystarczającej dla dowodu naszych twierdzeń:

Twierdzenie P. Jeżeli:

I) Prawe strony układu równań różniczkowych

$$(U) \quad \frac{dy^i}{dt} = f^i(y_1, \dots, y_n)$$

spełniają założenia H w zbiorze otwartym Ω , tzn.:

- a) f^i są ciągłe w Ω
- b) dla każdej pary punktów

$$A_i = (a_1, \dots, a_{i+1}, c, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad B_i = (b_1, \dots, b_{i-1}, c, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

należących do Ω takich, że

$$a_\nu \leq b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

jest

$$f^i(A_i) \leq f^i(B_i).$$

2) Funkcje $\chi^i(t)$ są różniczkowalne w przedziale $t_0 \leq t < a$ i krzywa $y^i = \chi^i(t)$ dla t z tego przedziału jest zawarta w Ω , oraz spełnia nierówność:

$$(N) \quad \frac{d\chi^i(t)}{dt} \leq f^i(\chi^1(t), \dots, \chi^n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dla

$$t_0 \leq t < a.$$

3) Punkt $B = (b_1, \dots, b_n) \in \Omega$ i $\chi^i(t_0) \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

4) W przedziale $t_0 \leq t < a$ istnieje całka górna w prawo układu (U) $y^i = \tau^i(t)$ przechodząca przez punkt B , wtedy

$$\chi^i(t) \leq \tau^i(t) \quad \text{dla} \quad t_0 \leq t < a.$$

Twierdzenie 1. Niech dana będzie dowolna rzeczywista macierz kwadratowa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

której pierwiastkami charakterystycznymi są liczby:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \quad \text{gdzie} \quad \lambda_j = \alpha_j + \beta_{ji} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Niech na przykład

$$(1) \quad \alpha_1 = \max(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Twierdzimy: $\beta_1 = 0$.

Dowód: Zakładamy na razie, że pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ są jednokrotne.

Przyporządkujmy macierzy A układ równań różniczkowych zwyczajnych, liniowych o współczynnikach stałych

$$(UA) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Łatwo zobaczyć, że dzięki założeniu $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$ układ (UA) spełnia założenia H twierdzenia P w całej przestrzeni n -wymiarowej. Dalej, przez każdy punkt $(x_0, b_1, \dots, b_n)$ przechodzi dokładnie jedna cała określona na całej osi liczbowej.

Niech dla dowolnego x_0 i dowolnych $b_i \geq 0$, $y_i = y_i(x)$ będzie całką (UA) spełniającą warunek początkowy

$$(2) \quad y_i(x_0) = b_i \geq 0.$$

Twierdzimy, że

$$(3) \quad y_i(x) \geq 0 \quad \text{dla} \quad x \geq x_0.$$

Dowód wynika natychmiast z twierdzenia P zastosowanego do układu (UA), do funkcji $y_i \equiv 0$ (odpowiednie do $x_i(t)$) i do funkcji $y_i(x)$ (odpowiednie do $\tau^i(t)$). Krzywa $y_i \equiv 0$ jest bowiem całką (UA), więc spełnia (UA), więc spełnia wszędzie nierówności różniczkowe (N) i przechodzi przez punkt $(x_0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n)$.

Ogólne rozwiązanie układu (UA) ma postać:

$$(4) \quad y_i = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_i^j(x)$$

gdzie C_j oznacza stałe dowolne, zaś $\varphi_i^j(x)$ są funkcjami postaci

$$e^{\alpha x} (l \cos \beta x + m \sin \beta x).$$

Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że $\beta_1 \neq 0$. Można wtedy przyjąć:

$$\varphi_i^1(x) = e^{\alpha_1 x} (l_i^1 \cos \beta_1 x + m_i^1 \sin \beta_1 x)$$

$$\varphi_i^2(x) = e^{\alpha_1 x} (l_i^2 \cos \beta_1 x + m_i^2 \sin \beta_1 x).$$

Postaramy się teraz wyznaczyć stałe C_j i punkt $(x_0, b_1, \dots, b_n)$ w ten sposób, ażeby otrzymać całkę $y_i = y_i(x)$ spełniającą warunek (2) oraz taką, ażeby liczby $C_1 l_i^1 + C_2 l_i^2$ nie znikwały równocześnie. Rozpatrzmy w tym celu związki

$$C_1 l_i^1 + C_2 l_i^2 + \dots + C_n l_i^n = b_i,$$

które otrzymujemy z (2) w punkcie $x_0 = 0$. Ponieważ (4) było ogólnym rozwiązaniem, więc $\text{Det. } \{l_i^j\} \neq 0$. Gdyby dla wszystkich możliwych $b_i \geq 0$ było $C_1 l_i^1 + C_2 l_i^2 = 0$ wynikałoby stąd, że część w przestrzeni n -wymiarowej określona nierównościami (2) leży na hiperpłaszczyźnie $(n-2)$ wymiarowej wyznaczonej przez wektory $l_i^3, l_i^4, \dots, l_i^n$.

W dalszym ciągu przypuścimy, że punkt $(x_0, b_1, \dots, b_n)$ i stałe $C_1, C_2, \dots, C_n$ są w żądany sposób wyznaczone. To znaczy, że dla pewnego i_0 mamy

$$(5) \quad C_1 l_{i_0}^1 + C_2 l_{i_0}^2 \neq 0.$$

Rozpatrzmy odnośną składową całki $y_i = y_i(x)$.

$$y_{i_0} = C_1 e^{\alpha_1 x} (l_{i_0}^1 \cos \beta_1 x + m_{i_0}^1 \sin \beta_1 x) + \\ + C_2 e^{\alpha_1 x} (l_{i_0}^2 \cos \beta_1 x + m_{i_0}^2 \sin \beta_1 x) + \sum_{j=3}^n C_j \varphi_{i_0}^j.$$

Przez proste przekształcenia trygonometryczne otrzymamy

$$y_{i_0} = \gamma \sin(\beta_1 x + \delta) e^{\alpha_1 x} + \sum_{j=3}^n C_j \varphi_{i_0}^j$$

przy czym ze względu na (5) $\gamma \neq 0$ czyli

$$y_{i_0} = e^{\alpha_1 x} \left[\gamma \sin(\beta_1 x + \delta) + e^{-\alpha_1 x} \sum_{j=3}^n C_j \varphi_{i_0}^j \right].$$

Łatwo widzieć, że w przypadku gdy $\alpha_1 > \alpha_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$) funkcja $y_{i_0}(x)$ będzie zmieniała znak przy dostatecznie dużych x a zatem dojdziemy do sprzeczności z faktem, że $y_{i_0} \geq 0$ dla $x \geq x_0$. Musi więc być $\beta_1 = 0$.

Aby ukończyć dowód naszego twierdzenia, wystarczy wykazać, że nie może być

$$\alpha_1 = \alpha_i \quad (i = 2, 3, \dots, r \leq n) \quad \alpha_1 < \alpha_i \quad (i = r+1, \dots, n).$$

Prowadząc dowód nie wprost, postępujemy podobnie jak powyżej i przedstawiamy w tym przypadku składową y_{i_0} następująco:

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^n \gamma_j \sin(\beta_j x + \delta_j) e^{\alpha_1 x} + \sum_{j=r+1}^n C_j \varphi_{i_0}^j.$$

Ze względu na jednokrotność pierwiastków charakterystycznych możemy przyjąć $|\beta_1| > |\beta_i|$. Mamy też $\gamma_1 \neq 0$.

Oznaczając

$$f(x) = \sum_{j=1}^r \gamma_j \sin(\beta_j x + \delta_j)$$

na podstawie tego, że $y_{i_0} \geq 0$ dla $x \geq x_0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha_1 x} \sum_{j=r+1}^n C_j \varphi_{i_0}^j = 0$ mamy $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq 0$. Stąd, ponieważ $f(x)$ jest prawie okresowa, więc $f(x) \geq 0$

dla wszystkich x . Zatem funkcja

$$F(x) = \sum_{j=1}^r \frac{\gamma_j}{\beta_j} \cos(\beta_j x + \delta_j)$$

spełniająca związek $F'(x) = f(x)$ jako funkcja niemalejąca i prawie określona jest stała. Zatem $f(x) \equiv 0$,

Zauważmy, że

$$0 \equiv \frac{1}{(\beta_1)^4} \frac{d^{4n}}{dx^{4n}} f(x) \equiv \gamma_1 \sin(\beta_1 x + \delta_1) + P_n(x)$$

gdzie

$$P_n(x) = \sum_{j=2}^n \gamma_j \left(\frac{\beta_j}{\beta_1} \right)^{4n} \sin(\beta_j x + \delta_j).$$

Ponieważ $P_n(x)$ zmierza jednostajnie do zera, przy $n \rightarrow \infty$ więc

$$\gamma_1 \sin(\beta_1 x + \delta_1) \equiv 0$$

co wobec $\beta_1 \neq 0$ i $\gamma_1 \neq 0$ stanowi widoczną sprzeczność.

Twierdzenie 2. Niech macierz A spełnia założenia podane w twierdzeniu I. Niech $\bar{A}$ będzie macierzą o wyrazach $\bar{a}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) i niech

$$(6) \quad a_{ij} \leq \bar{a}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Oznaczmy pierwiastki charakterystyczne macierzy $\bar{A}$ przez $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$, gdzie $\bar{\lambda}_j = \bar{a}_j + \bar{\beta}_j$ i niech

$$(7) \quad \bar{a}_1 = \max(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$$

(na podstawie twierdzenia I $\beta_1 = 0$).

Twierdzimy, że $\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_1$.

Dowód: Zakładamy na razie, że λ_j i $\bar{\lambda}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), są jednokrotne. Przyporządkujmy macierzy $\bar{A}$ układ równań różniczkowych

$$(U\bar{A}) \quad \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \bar{a}_{11}y_1 + \dots + \bar{a}_{1n}y_n \\ \frac{dy_2}{dx} &= \bar{a}_{21}y_1 + \dots + \bar{a}_{2n}y_n \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= \bar{a}_{n1}y_1 + \dots + \bar{a}_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Weźmy dowolną szczególną całkę $\bar{y}_i(x)$ układu $(U\bar{A})$, taką, żeby było

$$(8) \quad 0 \leq b_i \leq \bar{y}_i(x_0) = C_i.$$

Zastosujmy twierdzenie P do układu $(U\bar{A})$, krzywej $y_i(x)$ (całka (UA) przechodząca przez punkt $(x_0, b_1, \dots, b_n)$) i do całki $\bar{y}_i(x)$.

Na podstawie założenia (6) i własności (3) mamy dla $x \geq x_0$

$$(9) \quad y'_i(x) = a_{i1}y_1(x) + a_{i2}y_2(x) + \dots + a_{in}y_n(x) \leq \\ \leq \bar{a}_{i1}y_2(x) + \bar{a}_{i2}y_2(x) + \dots + \bar{a}_{in}y_n(x)$$

a więc spełniona jest potrzebna nierówność różniczkowa. Układ (UA) oczywiście też spełnia założenie H w całej przestrzeni n -wymiarowej, więc na podstawie (8), (9) i twierdzenia P mamy

$$(10) \quad 0 \leq y_i(x) \leq \bar{y}_i(x) \quad \text{dla} \quad x \geq x_0.$$

Całka ogólna układu $(U\bar{A})$ ma postać:

$$(11) \quad y_i = \sum_{j=1}^n \bar{C}_j \bar{\varphi}_i^j(x)$$

a całkę $\bar{y}_i(x)$ spełniającą (8) otrzymamy z całki ogólnej (11) przez odpowiedni wybór stałych.

Ponieważ na podstawie twierdzenia 1 $\beta_1 = 0$ i $\bar{\beta}_1 = 0$ nierówność (10) dla $i = i_0$ przyjmuje postać

$$ke^{\lambda_1 x} + \sum_{j=2}^n C_j \varphi_{i_0}^j(x) \leq \bar{k}e^{\bar{\lambda}_1 x} + \sum_{j=2}^n \bar{C}_j \bar{\varphi}_{i_0}^j(x) \quad \text{dla} \quad x \geq x_0$$

gdzie $k \neq 0$, stąd zaś otrzymamy

$$e^{(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)x} \leq \frac{\bar{k} + e^{-\bar{\lambda}_1 x} \sum_{j=2}^n \bar{C}_j \bar{\varphi}_{i_0}^j(x)}{k + e^{-\lambda_1 x} \sum_{j=2}^n C_j \varphi_{i_0}^j(x)}.$$

Gdyby $\lambda_1 > \bar{\lambda}_1$, to zdążając z x do ∞ otrzymalibyśmy

$$+\infty \leq \frac{\bar{k}}{k}$$

gdyż

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\bar{\lambda}_1 x} \sum_{j=2}^n \bar{C}_j \bar{\varphi}_{i_0}^j(x) = 0 \quad (\text{bo } \bar{\lambda}_2 > \bar{\alpha}_i \quad i = 2, \dots, n)$$

i

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda_1 x} \sum_{j=2}^n C_j \varphi_{i_0}^j(x) = 0 \quad (\text{bo } \lambda_2 > \lambda_1 \quad i = 2, \dots, n).$$

Musi zatem być

$$\bar{\lambda}_1 \geq \lambda_1.$$

§ 2

Udowodnimy teraz twierdzenie 1 i 2 w przypadku, gdy macierze A i $\bar{A}$ mają pierwiastki charakterystyczne wielokrotne. Podamy w tym celu następujące lematy:

Lemat 1. Do dowolnej macierzy $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) i dowolnie małego $\varepsilon > 0$ istnieje macierz $B = (b_{ij})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), której pierwiastki charakterystyczne są jednokrotne i

$$0 < b_{ij} - a_{ij} < \varepsilon$$

przy czym, jeśli macierz A jest rzeczywista, to i macierz B można dobrać rzeczywistą.

Dowód: Rozpatrzmy macierz $A + E$, gdzie $E = (l_{ij})$ oznacza macierz o elementach rzeczywistych. Jeśli macierz $A + E$ posiada krotny pierwiastek charakterystyczny, to wielomian charakterystyczny $f(\lambda) = |A + E - \lambda I|$ posiada wyróżnik $W(E)$ (wielomian zmiennych l_{ij}) równy zero.

Dla pewnych l_{ij} z przedziału $0 < l_{ij} < \lambda$ musi być $W(E) \neq 0$ i wtedy macierz $A + E = B$, będzie czyniła zadość tezie.

Rzeczywiście, gdyby $W(E) = 0$ dla $0 < l_{ij} < \varepsilon$ to $W(E)$ jako wielomian byłby tożsamościowo równy zero. Tak jednak nie jest, bo dla $l_{ij} = -a_{ij}$ dla $i \neq j$ i $l_{ii} = i - a_{ii}$ pierwiastki charakterystyczne macierzy

$$A + E = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 2, \dots \\ \vdots \\ 0, \dots, n \end{pmatrix}$$

są jednokrotne, a zatem $W \neq 0$.

Lemat 2. Niech $\lambda_j^* = \alpha_j^* + \beta_j^*$ i ($j = 1, \dots, n$) będą pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $A_* = (a_{ij}^*)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) i

$$\alpha_1^* = \max(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*).$$

Jeżeli $A_* \rightarrow A$, to znaczy $a_{ij}^* \rightarrow a_{ij}$ to

$$\lambda_1^* \rightarrow \lambda_1 = \alpha_1 + \beta_{11}$$

gdzie

$$\alpha_1 = \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Dowód: Oczywiście pierwiastki charakterystyczne macierzy A , zmierzają do pierwiastków charakterystycznych macierzy A , na podstawie ciągłej zależności pierwiastków wielomianu od jego współczynników, zatem $\lambda_1^* \rightarrow \lambda_1$ i $\alpha_1^* \rightarrow \alpha_1$.

Gdyby $\alpha_1 < \max(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_k$ ($k \neq 1$), to stąd, że $\lambda_k^* \rightarrow \lambda_k$ i $\alpha_k^* \rightarrow \alpha_k > \alpha_1$ od pewnego wskaźnika byłoby $\alpha_k^* > \alpha_1^*$, co jest sprzeczne z założeniem.

Przystąpimy teraz do dowodu twierdzenia 1, w przypadku gdy pierwiastki charakterystyczne macierzy A są wielokrotne.

Na podstawie lematu 1 istnieje ciąg macierzy

$$A_r = (a_{ij}^r) \quad a_{ij}^r > a_{ij} \quad a_{ij}^r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a_{ij},$$

których pierwiastki charakterystyczne $\lambda_j^r = \alpha_j^r + \beta_j^r i$ ($j = 1, 2, \dots, n$) są jednokrotne, więc $\beta_1^r = 0$. Na podstawie lematu 2

$$0 = \beta_1^r \rightarrow \beta_1 \quad \text{zatem} \quad \beta_1 = 0.$$

Uzupełnimy teraz dowód twierdzenia 2. Wybieramy w tym celu ciąg macierzy

$$\bar{A}_r = (\bar{a}_{ij}^r) \quad \bar{a}_{ij}^r > \bar{a}_{ij} \quad \bar{a}_{ij}^r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \bar{a}_{ij}$$

i pierwiastki charakterystyczne macierzy $\bar{A}$:

$$\lambda_j^r = \bar{\alpha}_j^r + \bar{\beta}_j^r i, \quad \text{gdzie} \quad \bar{\alpha}_1^r = \max(\bar{a}_1^r, \bar{a}_2^r, \dots, \bar{a}_n^r)$$

są jednokrotne.

Ze względu na nierówność $a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$ można dobrać $\bar{a}_{ij}^r \leq \bar{a}_{ij}^r$. Wtedy na podstawie twierdzenia 2 udowodnionego dla macierzy o pierwiastkach charakterystycznych jednokrotnych, oraz na podstawie lematu 2 mamy

$$\lambda_1^r \leq \bar{\lambda}_1^r \quad \text{oraz} \quad \lambda_1^r \rightarrow \lambda_1 \quad \text{i} \quad \bar{\lambda}_1^r \rightarrow \bar{\lambda}_1$$

zatem

$$\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_1.$$

Oznaczmy przez $\lambda_{\max}$ pierwiastek charakterystyczny o największej części rzeczywistej. Na podstawie twierdzenia 1 jest on rzeczywisty.

Wniosek: Dla macierzy o elementach $a_{ij} \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)

$$\lambda_{\max} \geq 0.$$

Wynika to od razu z faktu, że dla macierzy o elementach $a_{ij} = 0$ $\lambda_{\max} = 0$, oraz z twierdzenia 2.

§ 3

Podamy obecnie pewne oszacowanie maksymalnego pierwiastka charakterystycznego. Zaczniemy od lematów.

Lemat 3. Dla macierzy o elementach $a_{ij} = k \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)

$$\lambda_{\max} = kn$$

Dowód:

$$\begin{aligned} W(n, k, \lambda) &\stackrel{\text{df}}{=} \begin{vmatrix} k-\lambda & k & \dots & k \\ k & k-\lambda & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \dots & k-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} nk-\lambda & k & \dots & k \\ nk-\lambda & k-\lambda & \dots & k \\ nk-\lambda & k & \dots & k-\lambda \end{vmatrix} = (nk-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & k & \dots & k \\ 1 & k-\lambda & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & \dots & k-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Wykażemy indukcyjnie, że

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & k & \dots & k \\ 1 & k-\lambda & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & \dots & k-\lambda \end{vmatrix}}_{n \text{ kolumn}} \stackrel{\text{df}}{=} S(n, k, \lambda) = (-\lambda)^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Łatwo sprawdzić, że $S(2, k, \lambda) = -\lambda$.

Zakładamy $S(n, k, \lambda) = (-\lambda)^{n-1}$

$$\begin{aligned} S(n+1, k, \lambda) &= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & k & \dots & k \\ 1 & k-\lambda & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & \dots & k-\lambda \end{vmatrix}}_{n+1 \text{ kolumn}} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & \dots & 0 \\ 1 & k-\lambda & \dots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k & \dots & k-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda S(n, k, \lambda) = (-\lambda)^n. \end{aligned}$$

Jest więc $W(n, k, \lambda) = (nk-\lambda)(-\lambda)^n$, a zatem pierwiastkami charakterystycznymi macierzy $a_{ij} = k$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) są liczby $\lambda_1 = nk, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ więc

$$\lambda_{\max} = nk.$$

Lemat 4. Jeżeli do elementów macierzy na przekątnej głównej dodamy liczbę s , wówczas pierwiastki charakterystyczne tej macierzy powiększą się także o s .

Niech λ będzie pierwiastkiem charakterystycznym macierzy o elementach a_{ij} . Dowód wynika z równości

$$\text{Det}\{a_{ij} + \delta_{ij}s - \delta_{ij}(\lambda + s)\} = \text{Det}\{a_{ij} - \delta_{ij}\lambda\} = 0.$$

Twierdzenie 3. Maksymalny pierwiastek charakterystyczny macierzy o elementach a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$), takich, że $a_{ij} \geq 0$ dla $i \neq j$, zawarty jest w przedziale:

$$(12) \quad \max[\max_{i \neq j} a_{ij}, (n-1) \min_{i \neq j} a_{ij} + \min_{i \neq j} a_{ii}] \leq \lambda_{\max} \leq (n-1) \max_{i \neq j} a_{ij} + \max_{i \neq j} a_{ii}.$$

Dowód: Wykażemy najpierw nierówność $\max_{i \neq j} a_{ij} \leq \lambda_{\max}$. Dla macierzy A^* o elementach $a_{ii}^* = a_{ii}$ i $a_{ij}^* = 0$ dla $i \neq j$ $\lambda_{\max}^* = \max_{i \neq j} a_{ii}^* = \max_{i \neq j} a_{ii}$. Ponieważ $a_{ij}^* \leq a_{ij}$, więc na podstawie twierdzenia 2 $\lambda_{\max}^* \leq \lambda_{\max}$ czyli $\max_{i \neq j} a_{ii} \leq \lambda_{\max}$.

Aby dowieść nierówności $(n-1) \min_{i \neq j} a_{ij} + \min_{i \neq j} a_{ii} \leq \lambda_{\max}$ rozróżnimy dwa przypadki

$$1) \quad \min_{i \neq j} a_{ij} = \min_{i \neq j} a_{ii}.$$

Dla macierzy A^* o elementach $a_{ij}^* = \min_{i \neq j} a_{ij}$ na podstawie lematu 3 $\lambda_{\max}^* = n \min_{i \neq j} a_{ij}$. Ponieważ $\min_{i \neq j} a_{ij} = a_{ij}^* \leq a_{ij}$ więc na podstawie twierdzenia 2 $\lambda_{\max}^* \leq \lambda_{\max}$, czyli

$$n \min_{i \neq j} a_{ij} \leq \lambda_{\max}.$$

$$2) \quad \min_{i \neq j} a_{ij} \neq \min_{i \neq j} a_{ii}.$$

Niech $\min_{i \neq j} a_{ij} - \min_{i \neq j} a_{ii} = s$. Dla macierzy A^* o elementach $a_{ij}^* = a_{ij}$ dla $i \neq j$, $a_{ii}^* = a_{ii} + s$ na podstawie lematu 3 i twierdzenia 2 mamy $n \min_{i \neq j} a_{ij}^* \leq \lambda_{\max}^*$, zaś na podstawie lematu 4 $\lambda_{\max}^* = \lambda_{\max} + s$. Ponieważ $\min_{i \neq j} a_{ij}^* = \min_{i \neq j} a_{ij}$, więc

$$n \min_{i \neq j} a_{ij} \leq \lambda_{\max} + s$$

$$n \min_{i \neq j} a_{ij} + \min_{i \neq j} a_{ii} - \min_{i \neq j} a_{ij} \leq \lambda_{\max}$$

$$(n-1) \min_{i \neq j} a_{ij} + \min_{i \neq j} a_{ii} \leq \lambda_{\max}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Z. Szmydt, *Sur les racines caractéristiques et sur les directions caractéristiques de certaines matrices* Ann. Soc. Polon. Math. 22 (1949), str. 235—240.
- [2] T. Ważewski, *Système des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), str. 124, tw. 2.

SUMMARY

New Proofs of Certain Theorems Concerning Characteristic Roots of the Matrix with Non Negative Elements

Using the basic theorem concerning differential ordinary systems of inequalities (Theorem P) we prove two theorems of Frobenius.

The first one says that the characteristic root of a matrix with non negative elements besides main diagonal, having a maximum real part is real (Theorem 1), and the second says that this root increases if we enlarge the elements of the matrix (Theorem 2).

In § 1 we prove these theorems for the roots characteristic and simple, and in § 2 we complete the proof for the roots characteristic and multiple.

In § 3 some evaluation of the magnitude of this maximum characteristic root is given (formula 12).

СОДЕРЖАНИЕ

Новые доказательства некоторых теорем, относящихся к характеристическим корням матриц с неотрицательными элементами

Пользуясь основной теоремой, относящейся к системам обыкновенных дифференциальных неравенств (Теорема Р), проводим в нашей работе доказательство двух теорем Фробениуса. Первая из них гласит, что характеристический корень матрицы с неотрицательными элементами за главной диагональю, обладающий максимальной действительной частью, является действительным (Теорема 1), вторая же: что этот корень возрастает, если увеличиваем элементы матрицы (Теорема 2).

В § 1 мы приводим доказательство этих теорем для характеристических однократных корней, а в § 2 дополняем доказательство для характеристических многократных корней.

В § 3 дается некоторая оценка величины этого максимального характеристического корня (формула 12).