

Józef Siciak

O rozkładzie zer pewnych wielomianów ekstremalnych

1. Wstęp. Niech E będzie brzegiem obszaru płaskiego $D = D(E)$, zawierającego punkt ∞ w swoim wnętrzu. Niech $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E)$ oznacza dopełnienie CD . Zbiory E i $\mathcal{C}$ są oczywiście domknięte i ograniczone, przy czym $E \subset \mathcal{C}$. Niech $f(z)$ będzie funkcją rzeczywistą, ograniczoną i półciągłą z dołu w E . Oznaczmy przez $\xi^{(n)} = (\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)})$ taki układ $n+1$ punktów $\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ zbioru E , że dla każdego układu $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ punktów zbioru E zachodzi nierówność

$$(1) \quad \prod_{0 \leq i < k \leq n} \{|\xi_i^{(n)} - \xi_k^{(n)}| \exp[-f(\xi_i^{(n)}) - f(\xi_k^{(n)})]\} \geq \\ \geq \prod_{0 \leq i < k \leq n} \{|\zeta_i - \zeta_k| \exp[-f(\zeta_i) - f(\zeta_k)]\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Układ $\xi^{(n)}$ spełniający warunek (1) istnieje, ponieważ funkcja $|z - \zeta| \exp[-f(z) - f(\zeta)]$ jest dla $z, \zeta \in E$ półciągłą z góry. Układ $\xi^{(n)}$ nazywa się *n-tym układem ekstremalnym zbioru E względem funkcji f* .

Wiadomo, że ciąg

$$V_n(E, f) = \left\{ \prod_{0 \leq i < k \leq n} |\xi_i^{(n)} - \xi_k^{(n)}| \exp[-f(\xi_i^{(n)}) - f(\xi_k^{(n)})] \right\}^{\frac{2}{n(n+1)}}$$

posiada granicę

$$(2) \quad v(E, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(E, f),$$

przy czym liczba $v(E, f)$ w przypadku $f \equiv 0$ redukuje się do średnicy pozaskończonej zbioru E , [3].

Niech $a^{(n)} = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}\}$ będzie takim układem n punktów płaszczyzny zespolonej, że dla dowolnych n liczb zespolonych $c_1, c_2, \dots, c_n$ zachodzi nierówność

$$(3) \quad \max_{z \in E} \{|(z - a_1^{(n)}) \dots (z - a_n^{(n)})| \exp[-nf(z)]\} \leq \\ \leq \max_{z \in E} \{|(z - c_1) \dots (z - c_n)| \exp[-nf(z)]\}.$$

Niech $b^{(n)} = (b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \dots, b_n^{(n)})$ będzie takim układem n punktów zbioru E , że dla dowolnych n punktów $c_1, c_2, \dots, c_n$ zbioru E mamy

$$(4) \quad \max_{z \in E} \{ |(z - b_1^{(n)}) \dots (z - b_n^{(n)})| \exp[-nf(z)] \} \leqslant \\ \leqslant \max_{z \in E} \{ |(z - c_1) \dots (z - c_n)| \exp[-nf(z)] \}.$$

Wielomian $T_n(z, E, f) = (z - a_1^{(n)}) \dots (z - a_n^{(n)})$ nazywamy n -tym wielomianem Czebyszewa dla zbioru E względem funkcji f . Gdy $f \equiv 0$, to $T_n(z, E, f)$ jest zwykłym wielomianem Czebyszewa dla zbioru E . Wielomian $S_n(z, E, f) = (z - b_1^{(n)}) \dots (z - b_n^{(n)})$ nazwijmy n -tym nieswobodnym wielomianem Czebyszewa dla zbioru E względem f .

Przedmiotem pracy jest badanie zachowania się asymptotycznego trójkątnego ciągu punktów ekstremalnych $\{\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}\}$ określonych warunkiem (1) oraz zer wielomianów $T_n(z, E, f)$ i $S_n(z, E, f)$. W szczególności dowodzi się, że jeśli $v(E, 0) > 0$, to:

i) Dla każdej funkcji $g(z)$ ciągłej na E istnieje granica ciągu średnich arytmetycznych (por. [5], str. 164)

$$h_n[g; f] = \frac{1}{n} [g(\xi_1^{(n)}) + g(\xi_2^{(n)}) + \dots + g(\xi_n^{(n)})], \quad h_n^*[g; f] = \frac{1}{n} [g(b_1^{(n)}) + \dots + g(b_n^{(n)})],$$

przy czym

$$h[g; f] = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n[g; f] = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^*[g; f].$$

ii) Jeśli ciąg funkcji ciągłych $\{f_n(z)\}$ zmierza jednostajnie na E do $f(z)$, to dla każdej funkcji ciągłej g mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} h[g; f_n] = h[g; f]$, [1].

iii) Jeśli $f \equiv 0$ i g jest funkcją ciągłą w E , to

$$h[g; 0] = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \text{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda g)} = u(\infty, E, g),$$

gdzie $u(z, E, g)$ jest uogólnieniem w sensie Kelloga-Wienera rozwiązaniem problemu Dirichleta dla D z obłożeniem g , a $\Delta(E, \lambda g)$ dane jest wzorem (7) (dla $f = \lambda g$).

2. Twierdzenia pomocnicze. W dalszym ciągu oprzemy się na następujących twierdzeniach udowodnionych w [3] lub [4]:

1° Liczby $t_n(E, f) = \max_{z \in E} |T_n(z, E, f) e^{-nf(z)}|$ oraz $s_n(E, f) = \max_{z \in E} |S_n(z, E, f) e^{-nf(z)}|$ spełniają nierówności

$$(5) \quad t_{m+n} \leqslant t_m t_n, \quad s_{m+n} \leqslant s_m s_n, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

skąd wynika, że ciągi $\{\sqrt[n]{t_n(E, f)}\}$ i $\{\sqrt[n]{s_n(E, f)}\}$ są zbieżne.

2° Jeśli punkty układu $(\xi_0^{(n)}, \xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)})$ są tak ponumerowane, że

$$(6) \quad \prod_{k=1}^n \{|\xi_0^{(n)} - \xi_k^{(n)}| \exp[-f(\xi_0^{(n)}) - f(\xi_k^{(n)})]\} \leq \\ \leq \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \{|\xi_i^{(n)} - \xi_k^{(n)}| \exp[-f(\xi_i^{(n)}) - f(\xi_k^{(n)})]\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

to ciąg $\Delta_n(E, f) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n |\xi_0^{(n)} - \xi_k^{(n)}| \exp[-f(\xi_0^{(n)})]}$ jest zbieżny, przy czym

$$(7) \quad \Delta = \Delta(E, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n(E, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{t_n(E, f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{s_n(E, f)}.$$

W dalszym ciągu stale przyjmujemy, że dla $\xi^{(n)}$ spełniony jest warunek (6).

3° Jeśli $f_n \Rightarrow f$ w zbiorze E , to $\Delta(E, f_n) \rightarrow \Delta(E, f)$.

4° Ciąg $\Phi_n(z, E, f) = \sqrt[n]{\max_i |L^{(i)}(z, \xi^{(n)}| e^{nf(\xi_i^{(n)})}}$, gdzie $L^{(i)}(z, \xi^{(n)}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{z - \xi_k^{(n)}}{\xi_i^{(n)} - \xi_k^{(n)}}$ jest zbieżny na całej płaszczyźnie do pewnej funkcji dodatniej

$$(8) \quad \Phi(z, E, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(z, E, f),$$

przy czym

$$(9) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z, E, f)}{|z|} = \frac{1}{\Delta(E, f)}$$

oraz $\Phi(z, E, 0) = 1$ dla $z \in E$.

5° Jeśli punkty układu $\xi^{(n)}$ są tak ponumerowane, że zachodzi (6), to ciąg $\{\sqrt[n]{|L^{(0)}(z, \xi^{(n)})| e^{f(\xi_0^{(n)})}}\}$ posiada w każdym punkcie obszaru D granicę równą $\Phi(z, E, f)$.

6° Ciąg $\{\sqrt[n]{T_n(z, E, f)}\}$ jest zbieżny w każdym punkcie dopełnienia powłoki wypukłej zbioru E do granicy $\Delta\Phi(z, E, f)$.

7° Ciąg $\{\sqrt[n]{S_n(z, E, f)}\}$ jest zbieżny w każdym punkcie obszaru D do $\Delta\Phi(z, E, f)$. Ogólniej można udowodnić, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by dla ciągu trójkątnego $\{x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ punktów zbioru E istniała granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(z - x_1^{(n)}) \dots (z - x_n^{(n)})|} = \Delta\Phi(z, E, f)$, $z \in D$,

jest, by $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{z \in E} [|z - x_1^{(n)}| \dots |z - x_n^{(n)}| e^{-nf(z)}]} = \Delta(E, f)$.

8° Niech f jest dowolną funkcją określoną i ograniczoną w zbiorze E , $\underline{f}$ — jej regularyzacją dolną, $\bar{f}$ — jej regularyzacją górną, tzn.

$$\underline{f}(z) = \lim_{z' \rightarrow z, z' \in E} \inf f(z'), \quad \bar{f}(z) = \lim_{z' \rightarrow z, z' \in E} \sup f(z').$$

Oznaczmy przez $u_*(z, E, f)$ kres górny uogólnionych w sensie Kelloga-Wienera rozwiązań problemu Dirichleta dla D z obłożeniem ciągłym $\leq f(z)$. Analogicznie $u^*(z, E, f)$ niech oznacza kres górny rozwiązań problemu Dirichleta dla D z obłożeniem ciągłym $\geq f(z)$. Wtedy zachodzą wzory

$$(10) \quad u_*(z, E, f) = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \frac{\Phi(z, E, \lambda f)}{\Phi(z, E, 0)}, \quad z \in D,$$

$$(11) \quad u^*(z, E, f) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \frac{\Phi(z, E, -\lambda \bar{f})}{\Phi(z, E, 0)}, \quad z \in D,$$

przy czym $u_*(z, E, f) = u^*(z, E, f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda f)} = -\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \operatorname{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, -\lambda \bar{f})}.$$

9° Jeśli $f(z)$ jest funkcją rzeczywistą, określoną i ciągłą w zbiorze E , to istnieje ciąg wielomianów $w_k(z) = b_k(z - d_1^{(k)}) \dots (z - d_{n_k}^{(k)})$ o zerach $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_{n_k}^{(k)}$ leżących w D i modułach jednostajnie zbieżnych na E do $\exp f(z)$,

$$(13) \quad \operatorname{Log} |w_k(z)| \Rightarrow f(z), \quad z \in E.$$

9°° Jeśli $f(z)$ jest określona i ciągła w $\mathcal{C}$, harmoniczna w $\mathcal{C} - E$, to istnieje ciąg wielomianów $\{w_k(z)\}$ o zerach leżących w D i o modułach jednostajnie zbieżnych w $\mathcal{C}$ do $\exp f(z)$.

3. Rozkład graniczny punktów ekstremalnych $\xi_k^{(n)}$ i zer wielomianów $T_n(z, E, f)$ i $S_n(z, E, f)$. Niech $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots$, będzie takim ciągiem trójkątnym punktów (różnych lub nie) zbioru E , że w każdym punkcie obszaru D istnieje granica

$$(14) \quad \Psi(z) \equiv \Psi(z, \{x^{(n)}\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{Log} |(z - x_1^{(n)}) \dots (z - x_n^{(n)})|, \quad z \in D.$$

Lemat. Dla każdej funkcji g ciągłej w $\mathcal{C}$, harmonicznej w $\mathcal{C} - E$ istnieje granica ciągu

$$(15) \quad h[g; \{x^{(n)}\}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [g(x_1^{(n)}) + \dots + g(x_n^{(n)})].$$

Dowód. Niech $\underline{h}$ i $\bar{h}$ oznacza odpowiednio $\liminf$ oraz $\limsup$ ciągu $\left\{ \frac{1}{n} [g(x_1^{(n)}) + \dots + g(x_n^{(n)})] \right\}$. Oczywiście $\bar{h} - \underline{h} \geq 0$. Dzięki 9° do każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki wielomian $w(z) = b(z - d_1) \dots (z - d_k)$, że $d_i \in D$, $i = 1, 2, \dots, k$, oraz

$$(16) \quad -\frac{\varepsilon}{2} + \operatorname{Log} |w(z)| \leq g(z) \leq \operatorname{Log} |w(z)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zauważmy, że dzięki (14) ciąg średnich $\left\{ \frac{1}{n} [g_s(x_1^{(n)}) + \dots + g_s(x_n^{(n)})] \right\}$, gdzie $g_s(z) = \operatorname{Log} |w(z)| + \frac{\varepsilon}{2}$ lub $g_s(z) = \operatorname{Log} |w(z)| - \frac{\varepsilon}{2}$, jest zbieżny, przy czym

$$h[g_s; \{x^{(n)}\}] = \frac{+\varepsilon}{-2} + \operatorname{Log} |b| + \Psi(d_1) + \dots + \Psi(d_k).$$

Zatem dzięki (16) mamy $\bar{h} - \underline{h} \leq \varepsilon$, co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ kończy dowód.

Wnioski. a) Jeśli $\{x^{(n)}\}$ i $\{y^{(n)}\}$ są dwoma trójkątnymi ciągami punktów zbioru $\mathcal{E}$, dla których istnieje granica (14) oraz $\Psi(z, \{x^{(n)}\}) = \Psi(z, \{y^{(n)}\})$, gdy $z \in D$, to dla każdej funkcji g , ciągłej w $\mathcal{E}$, harmonicznej w $\mathcal{E} - E$ mamy $h[g; \{x^{(n)}\}] = h[g; \{y^{(n)}\}]$.

b) Jeśli $\mathcal{E}^*$ jest zbiorem punktów skupienia ciągu trójkątnego $\{x^{(n)}\}$ i ciąg $\left\{ \frac{1}{n} \operatorname{Log} |(z - x_1^{(n)}) \dots (z - x_n^{(n)})| \right\}$ jest zbieżny w D , to ciąg ten jest zbieżny dla każdego $z_0 \in \mathcal{E}\mathcal{C}^*$. Aby to wykazać wystarczy w lemacie przyjąć $g(z) = \operatorname{Log} |z - z_0|$.

Biorąc pod uwagę powyższe wnioski oraz twierdzenia pomocnicze 5° i 7° otrzymamy

Twierdzenie 1. Dla każdej funkcji g ciągłej w E istnieją granice ciągów $h[g; \xi^{(n)}] = \frac{1}{n} [g(\xi_1^{(n)}) + \dots + g(\xi_n^{(n)})]$, $h[g; b^{(n)}] = \frac{1}{n} [g(b_1^{(n)}) + \dots + g(b_n^{(n)})]$ i obie są równe,

$$(17) \quad h[g; f] = \lim_{n \rightarrow \infty} h[g; \xi^{(n)}] = \lim_{n \rightarrow \infty} h[g; b^{(n)}].$$

Wprost z definicji liczby $h[g; f]$ wynika, że przy ustalonym f , jest to funkcjonal liniowy względem g , tzn. dla dowolnych dwu liczb a_1 i a_2 oraz dowolnych dwu funkcji ciągłych g_1 i g_2 mamy $h[a_1 g_1 + a_2 g_2; f] = = a_1 h[g_1; f] + a_2 h[g_2; f]$. Udowodnimy teraz, że przy ustalonym g funkcjonal $h[g; f]$ jest ciągły względem f .

Twierdzenie 2. Jeżeli ciąg funkcji ciągłych $\{f_n(z)\}$ zmierza jednostajnie na E do $f(z)$, to dla każdej ciągłej na E funkcji g mamy

$$(18) \quad h[g; f_n] \rightarrow h[g; f].$$

Dowód. Niech ε będzie dowolną liczbą > 0 . Dzięki twierdzeniu pomocniczemu 9° istnieje taki wielomian $w(z) = b(z - d_1) \dots (z - d_k)$, że $d_i \in D$, $i = 1, 2, \dots, k$ oraz

$$(19) \quad \operatorname{Log} |w(z)| - \frac{\varepsilon}{3} \leq g(z) \leq \operatorname{Log} |w(z)| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wobec założenia, że $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ dla $z \in E$ oraz dzięki twierdzeniu pomocniczemu 3° istnieje taka liczba $N(\varepsilon)$, że

$$(20) \quad f(z) - \frac{\varepsilon}{6k} \leq f_n(z) \leq f(z) + \frac{\varepsilon}{6k}, \quad n \geq N(\varepsilon)$$

oraz

$$(21) \quad \exp\left(-\frac{\varepsilon}{6k}\right) \Delta(E, f) \leq \Delta(E, f_n) \leq \exp\left(\frac{\varepsilon}{6k}\right) \Delta(E, f), \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Ponieważ, co można udowodnić wychodząc z 4°, zachodzą dla dowolnego z nierówności

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon}{6k}\right) \Phi(z, E, f) \leq \Phi(z, E, f_n) \leq \exp\left(\frac{\varepsilon}{6k}\right) \Phi(z, E, f), \quad n \geq N(\varepsilon),$$

więc dzięki (21) dla wszelkich z zachodzą także nierówności

$$(22) \quad \exp\left(-\frac{\varepsilon}{3k}\right) \Delta(E, f) \Phi(z, E, f) \leq \Delta(E, f_n) \Phi(z, E, f_n) \leq \exp\left(\frac{\varepsilon}{3k}\right) \Delta(E, f) \Phi(z, E, f).$$

Przyjmijmy

$$\Psi_n(z) = \text{Log}[\Delta(E, f_n) \Phi(z, E, f_n)] \quad \text{oraz} \quad \Psi_0(z) = \text{Log}[\Delta(E, f) \Phi(z, E, f)].$$

Wtedy dla dowolnego $d \in E$ mamy $h[\text{Log}|z-d|; f_n] = \Psi_n(d)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\text{skąd dzięki (19)} \quad \text{Log}|b| + \Psi_n(d_1) + \dots + \Psi_n(d_k) - \frac{\varepsilon}{3} \leq h[g; f_n] \leq \text{Log}|b| + \dots$$

$+ \Psi_n(d_1) + \dots + \Psi_n(d_k) + \frac{\varepsilon}{3}$. Korzystając następnie z drugiej spośród nierówności (22) otrzymamy

$$h[g; f_n] \leq \text{Log}|b| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \Psi_0(d_1) + \dots + \Psi_0(d_k) \leq \varepsilon + h[g; f], \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Analogicznie korzystając z pierwszej spośród nierówności (22) mamy

$$h[g; f_n] \geq h[g; f] - \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolną liczbą wynika stąd, że $h[g; f_n] \rightarrow h[g; f]$.

4. Związek funkcjonału $h[g; 0]$ z uogólnionym rozwiązaniem problemu Dirichleta dla obszaru D z obłożeniem g .

Niech g będzie obecnie dowolną funkcją rzeczywistą, określoną i ograniczoną na zbiorze E (ciągłą lub nie) i niech $x^{(n)} = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$ będzie n -tym układem ekstremalnym zbioru E odpowiadającym funkcji $f(z) \equiv 0$.

Twierdzenie 3. Jeżeli $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \text{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda g)} = -\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \text{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, -\lambda \bar{g})}$, to istnieje granica ciągu $\left\{ \frac{1}{n} [g(x_1^{(n)}) + g(x_2^{(n)}) + \dots + g(x_n^{(n)})] \right\}$, przy czym

$$h[g; 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [g(x_1^{(n)}) + \dots + g(x_n^{(n)})] = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \text{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda g)}.$$

Dowód. Ponieważ $g(z) \leq g(z) \leq \bar{g}(z)$, więc wystarczy udowodnić, że $h[g; 0] = h[\bar{g}; 0]$. Niech $\lambda > 0$ będzie dowolną ustaloną liczbą rzeczywistą. Oznaczmy przez $y^{(n)} = (y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$ n -ty układ ekstremalny zbioru E względem λg oraz przez $x^{(n)} = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$ n -ty układ ekstremalny zbioru E względem $f \equiv 0$. Niech n będzie dowolną ustaloną liczbą naturalną, natomiast k dowolną liczbą naturalną $> n$. Niech $i_1, i_2, \dots, i_n$ będą takimi wskaźnikami (zależnymi od punktu $y_s^{(n)}$), że $0 \leq i_s \leq k$, $s = 1, 2, \dots, n$ oraz $\Phi_k(y_s^{(n)}, E, 0) = \sqrt[k]{|L^{(i_s)}(y_s^{(n)}, x^{(k)})|}$. Wtedy

$$(23) \quad \prod_{s=1}^n |L^{(i_s)}(y_s^{(n)}, x^{(k)})| \leq \frac{M^{n(n-1)}}{\Delta_k^n(E, 0)} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq i_1, i_2, \dots, i_n}}^k |(y_1^{(n)} - x_i^{(k)}) \dots (y_n^{(n)} - x_i^{(k)})|,$$

gdzie $M = \sup_{z, \zeta \in E} |z - \zeta|$. Ponieważ układ $(y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$ jest ekstremalny względem λg , więc $|(y_1^{(n)} - x_i^{(k)}) \dots (y_n^{(n)} - x_i^{(k)})| \leq \Delta_n(E, \lambda g) e^{n \lambda g(x_i^{(k)})}$. Zatem dzięki (23) mamy

$$\prod_{s=1}^n |L^{(i_s)}(y_s^{(n)}, x^{(k)})| \leq M^{n(n-1)} \frac{\Delta_n^{k+1-n}(E, \lambda g)}{\Delta_k^n(E, 0)} \exp \left[n \lambda \sum_{i=1}^k g(x_i^{(k)}) - n \lambda m \right],$$

gdzie $m = \inf_{z \in E} g(z)$. Wyciągnijmy z ostatniej nierówności pierwiastek stopnia $n k \lambda$ i niech $k \rightarrow \infty$. Wtedy, wobec tego, że $\sqrt[k]{|L^{(i_s)}(y_s^{(n)}, x^{(k)})|} \rightarrow 1$ dla $s = 1, 2, \dots, n$ otrzymamy

$$1 \leq \left[\frac{\Delta_n^{1/n}(E, \lambda g)}{\Delta(E, 0)} \right]^{1/\lambda} \exp \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g(x_i^{(k)}) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Zatem dla dowolnego $\lambda > 0$

$$\left[\frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda g)} \right]^{1/\lambda} \leq \exp \left[\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k g(x_i^{(k)}) \right].$$

Zupełnie analogicznie otrzymamy nierówność

$$\left[\frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, -\lambda \bar{g})} \right]^{1/\lambda} \leq \exp \left[- \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{g}(x_i^{(k)}) \right].$$

Z ostatnich dwu nierówności oraz z założenia, że

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda \underline{g})} = - \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, -\lambda \bar{g})}$$

wynika, że

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \underline{g}(x_i^{(k)}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{g}(x_i^{(k)}),$$

skąd dzięki nierówności $g \leq \bar{g}$ wynika teza twierdzenia 3.

Udowodniliśmy zatem, że jeśli dla funkcji g rozwiązania górne i dolne uogólnionego problemu Dirichleta są w obszarze D równe, to $h[g; 0] = h[\bar{g}; 0] = h[\underline{g}; 0]$.

Wniosek [2]. Jeśli funkcja g jest ciągła na E i

$$\delta(\lambda g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\prod_{0 \leq i < k \leq n} |y_i^{(n)} - y_k^{(n)}| \right]^{\frac{2}{n(n+1)}},$$

gdzie $(y_0^{(n)}, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$ jest n -tym układem ekstremalnym zbioru E względem λg , to

$$(24) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \left[\frac{\Delta(E, 0)}{\delta(\lambda g)} \right]^{1/\lambda} = 1.$$

Rzeczywiście, ponieważ $\delta(\lambda g) = \Delta(E, \lambda g) e^{\lambda h[g; \lambda g]}$, więc $\left[\frac{\Delta(E, 0)}{\delta(E, \lambda g)} \right]^{1/\lambda} = \left[\frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda g)} \right]^{1/\lambda} e^{-h[g; \lambda g]}$. Lecz $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \left[\frac{\Delta(E, 0)}{\Delta(E, \lambda g)} \right]^{1/\lambda} = e^{h[g; 0]}$, oraz $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} h[g; \lambda g] = h[g; 0]$, zatem $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \left[\frac{\Delta(E, 0)}{\delta(E, \lambda g)} \right]^{1/\lambda} = 1$.

5. Uwaga o zwykłych wielomianach Czebyszewa dla lemniskaty.

Nie trudno udowodnić, że jeżeli $w(z) = (z - a_1) \dots (z - a_k)$ i E jest lemniskatą

$$E = \{z \mid |w(z)| = r^k\}, \quad (r > 0),$$

to $[w(z)]^n = T_{nk}(z)$, $n = 1, 2, \dots$, jest $n \cdot k$ -tym wielomianem Czebyszewa zbioru E . Obecnie wykazę, że

$$h[T_{mk} \bar{T}_{nk}; 0] \neq 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n^{-1}$.

¹⁾ Jeden z recenzentów pracy zakomunikował mi, że fakt ten udowodnił już wcześniej p. W. Kleiner.

Rzeczywiście, ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|T_{nk}(z)|} = r\Phi(z, E, 0)$ dla $z \in D$, więc dzięki wnioskowi a) ze str. 4, dla każdej funkcji g ciągłej w $\mathcal{C} = \{z | w(z) | \leq r^k\}$, harmonicznej w $\mathcal{C} - E$ zachodzi równość

$$h[g; 0] = \frac{1}{k} [g(a_1) + \dots + g(a_k)].$$

Zatem jeśli $m = n + s$, to $h[T_{mk}\bar{T}_{nk}; 0] = r^{2kn}h[w^s(z); 0] = r^{2kn}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k w^s(a_i) = 0$.

Jeśli $m = n$, to $h[T_{mk}\bar{T}_{nk}; 0] = r^{2nk} \neq 0$, c. b. d. o.

Wydaje się rzeczą prawdopodobną, że jeśli E jest zbiorem domkniętym i wypukłym, $T_n(z, E, f)$ — n -tym wielomianem Czebyszewa tego zbioru, to $h[T_n\bar{T}_m; 0] \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m = n$. Teza tego twierdzenia na pewno ma miejsce w przypadku, gdy zbiór E jest odcińkiem.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Górski, *Sur certaines propriétés des points extrémaux liés à un domaine plan*, Ann. Pol. Math., 3 (1956), 32—36.
- [2] J. Górski, *O granicy pewnego funkcjonalu związanego z pojemnością zbioru płaskiego*, Zeszyty Naukowe UJ, Z. 5, (1958), 12—22.
- [3] F. Leja, *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.
- [4] J. Siciak, *Pewne zastosowania metody punktów ekstremalnych*, w przygotowaniu do Ann. Pol. Math.
- [5] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation*, New York 1935.

Katedra Funkcji Analitycznych
Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków
7. X. 1959

SUMMARY

On the Distribution of the Zeros of some Extreme Polynomials

Let $x^{(n)} = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)})$ be the n^{th} system of the extreme points of the boundary E of an unbounded region $D(\infty \in D)$ with respect to the generating function $|z - \zeta|e^{-f(\zeta) - f(z)}$, $f(z)$ being bounded real function defined on E . Let $g(z)$ be an arbitrary real continuous function defined on E .

The paper examines by the elementary methods the existence of the limit

$$h[g; f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n g(x_i^{(n)})$$

and some of its properties.

СОДЕРЖАНИЕ

О расположении нулей некоторых экстремальных многочленов

Допустим, что $x^{(n)} = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ является n -ой системой экстремальных точек границы E неограниченной области D ($\infty \in D$) относительно образующей функции $|z - \zeta| e^{-f(z) - f(\bar{\zeta})}$, где $f(z)$ является ограниченной вещественной функцией, определенной на E .

Допустим, что $g(z)$ будет любой непрерывной вещественной функцией, определенной на E .

В работе подвергается исследованию при помощи элементарных методов существование предела

$$h[g; f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i^{(n)}),$$

а также его некоторые свойства.