

Stanisław Łojasiewicz

Pewne twierdzenie o regularności funkcji wielu zmiennych

Autor dowodzi, że iloraz dwóch funkcji klasy C^n znikających wzdłuż pewnej powierzchni (przy czym pochodne mianownika nie znikają równocześnie) jest klasy C^{n-1} .

Udowodnimy twierdzenie następujące:

Jeżeli funkcje m zmiennych $f(x_1, \dots, x_m)$, $g(x_1, \dots, x_m)$ są klasy C^n ($n \geq 1$) w obszarze G i jeżeli warunek $g(x_1, \dots, x_m) = 0$ pociąga za sobą związki $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ i $\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) \right| > 0$, wówczas funkcja

$$\frac{f(x_1, \dots, x_m)}{g(x_1, \dots, x_m)}$$

(po nadaniu jej wartości granicznych w punktach zerowania się mianownika) jest klasy C^{n-1} w obszarze G .

Klasa regularności tego rodzaju ilorazu na ogół się obniża, gdyż np. funkcje $f(x) = x^{n+1} \operatorname{sign} x$ i $g(x) = x$ są klasy C^n , ich iloraz zaś $\frac{f(x)}{g(x)} = x^n \operatorname{sign} x$ nie jest już klasy C^n tylko C^{n-1} .

Dla prostoty oznaczeń prowadzić będziemy dowody dla funkcji dwóch zmiennych (co jest zresztą bez szkody dla ogólności).

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną w zbiorze $\Omega - \Pi$, gdzie Ω jest obszarem, zaś Π zbiorem punktów tego obszaru położonych na prostej $x = 0$. Jeżeli funkcja f jest ciągła w $\Omega - \Pi$ i posiada granicę w każdym punkcie zbioru Π , wówczas według dobrze znanego twierdzenia funkcja f da się uzupełnić do funkcji

$$(1) \quad \bar{f}(P) = \begin{cases} f(P) & \text{dla } P \in \Omega - \Pi \\ \lim_{Q \rightarrow P} f(Q) & \text{dla } P \in \Pi \end{cases}$$

ciągłej w całym obszarze Ω .

L e m m a t 1. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^1 w $\Omega - \Pi$ i jeżeli istnieją granice tej funkcji i jej pochodnych w każdym punkcie zbioru Π , to funkcja f określona wzorami (1) jest klasy C^1 w całym zbiorze Ω .

D o w ó d. Uzupełnijmy pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ do funkcji ciągłych f_1, f_2 w Ω . Wystarczy dowieść, że

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(P) = f_1(P), \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(P) = f_2(P), \quad \text{gdy } P \in \Pi.$$

Mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(h, y) - \bar{f}(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f_x(\partial_h h, y) = f_1(0, y),$$

czyli

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(0, y) = f_1(0, y)$$

Niech $(0, y) \in \Pi$ i niech $h_v \rightarrow 0$. Można ε_v tak dobrać, aby było $|\varepsilon_v| < \frac{1}{v}$ oraz

$$\left| \frac{\bar{f}(0, y + h_v) - \bar{f}(0, y)}{h_v} - \frac{f(\varepsilon_v, y + h_v) - f(\varepsilon_v, y)}{h_v} \right| < \frac{1}{v}.$$

Ponieważ

$$\frac{f(\varepsilon_v, y + h_v) - f(\varepsilon_v, y)}{h_v} = f_y(\varepsilon_v, y + \partial_v h_v) \rightarrow f_2(0, y),$$

więc

$$\frac{\bar{f}(0, y + h_v) - \bar{f}(0, y)}{h_v} \rightarrow f_2(0, y),$$

czyli

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(0, y) = f_2(0, y), \quad \text{c. b. d. o.}$$

L e m m a t 2. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^n w $\Omega - \Pi$ i jeżeli istnieją granice tej funkcji i wszystkich jej pochodnych aż do rzędu n włącznie w każdym punkcie zbioru Π , to funkcja f określona wzorami (1) jest klasy C^n w całym zbiorze Ω .

D o w ó d. Według lematu 1 funkcja f jest klasy C^1 w Ω . Przyjmijmy, że jest ona klasy C^k ($k < n$). Wówczas każda z jej pochodnych $\frac{\partial^{s+r} f}{\partial x^s \partial y^r}$ ($s + r = k$) spełnia założenia lematu 1, a więc jest funkcją klasy C^1 . Stąd funkcja f jest klasy C^{k+1} .

L e m m a t 3. Jeżeli funkcja $\varphi(x, y)$ jest klasy C^n w Ω i $\varphi(0, y) = 0$ w Π , to funkcja

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi(x, y)}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow 0, \eta \rightarrow y} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\xi} & \text{dla } (0, y) \in \Pi \end{cases}$$

jest klasy C^{n-1} w Ω .

Dowód. Według lematu 2 wystarczy udowodnić istnienie granic

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow b} \frac{\partial^{k+l} \varphi(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} x$$

dla $k \geq 0, l \geq 0, k + l \leq n - 1, (0, b) \in \Pi$.

Położmy $\lambda(x, y) = \frac{1}{x} \frac{\partial^l \varphi}{\partial y^l}$. Funkcja $\frac{\partial^l \varphi}{\partial y^l} = x\lambda(x, y)$ ma pochodne ze względu na x ciągle aż do $k + 1$ -szej włącznie, zatem według twierdzenia Taylora

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^l \varphi}{\partial y^l}(0, y) = \\ &= x\lambda(x, y) + \frac{\partial}{\partial x}(x\lambda(x, y))(-x) + \dots + \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x\lambda(x, y)) \frac{(-x)^k}{k!} + \\ &\quad + \frac{\partial^{k+l+1} \varphi}{\partial x^{k+1} \partial y^l}(x(1-\vartheta), y) \frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(-x)^{k+1}}{(k+1)!} \left[-(k+1) \frac{\partial^k \lambda}{\partial x^k}(x, y) + \frac{\partial^{k+l+1} \varphi}{\partial x^{k+1} \partial y^l}(x(1-\vartheta), y) \right]. \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \left(\frac{\varphi(x, y)}{x} \right) = \frac{\partial^k \lambda}{\partial x^k}(x, y) = \frac{1}{k+1} \frac{\partial^{k+l+1} \varphi}{\partial x^{k+1} \partial y^l}(x(1-\vartheta), y)$$

skąd wynika, że granica (2) istnieje.

Dowód twierdzenia. Wystarczy dowieść, że funkcja $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ (uzupełniona przez wartości graniczne) jest klasy C^n w otoczeniu dowolnego punktu (x_0, y_0) , w którym $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Według założeń jest np.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Transformacja

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= g(x, y) \\ v &= y \end{aligned}$$

jest klasy C^n i ma jacobian różny od zera w punkcie (x_0, y_0) ; jest ona zatem odwracalna w otoczeniu punktu (x_0, y_0) i transformacja odwrotna

jest również klasy C^n . Przez zastosowanie podstawienia (3) funkcja $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ przechodzi w funkcję $\frac{\varphi(u, v)}{u}$, przy czym $\varphi(u, v)$ jest klasy C^n i $\varphi(0, v) = 0$. Według lematu 3 funkcja $\frac{\varphi(u, v)}{u}$ (uzupełniona przez wartości graniczne) jest klasy C^{n-1} , a więc również i funkcja $\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$, która powstaje z poprzedniej przez podstawienie (3), posiada tę własność, c. b. d. o.

Przykład. Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest klasy C^n , to funkcja

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} & \text{dla } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{dla } x = y \end{cases}$$

jest klasy C^{n-1} .

РЕЗЮМЕ

Одна теорема о регулярности функций многих переменных

Автор доказывает, что частное двух функций класса C^n равных 0 некоторой поверхности (в предположении что производные знаменателя не исчезают одновременно) принадлежит классу C^{n-1} .

SUMMARY

A Theorem on the Regularity of Functions of Several Variables

Author proves that the quotient of two functions of C^n class which are equal 0 on a surface (the derivatives of denominator being not simultaneously 0) is of C^{n-1} class.