UNIVERSITATIS IAGELLONICAE ACTA MATHEMATICA, FASCICULUS XXVII
1988

Le «lemme du petit arc» pour les ensembles sous-analytiques ouverts

KRYSTYNA WACHTA

Abstract. It is possible to select a semi-algebraic curve in the "curve selecting lemma" for open subanalytic sets. The condition on the set to be open is essential.

Soit A un ensemble sous-analytique ouvert dans R^n. On va démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit $a \in \bar{A}$. Alors a contient un arc semi-algébrique au bout a.*

Démonstration. A contient un arc semi-analytique au bout a [1]. Choisissons des coordonnées dans R^n d'une telle manière que cet arc contienne le graphe d'une fonction f: $(0, \varepsilon) \to R^{n-1}(\varepsilon > 0)$ analytique, semi-analytique, telle que $a = (0, \lim\limits_{t \to 0} f(t))$.

Le théorème de Puiseux nous donne:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i/k}$$

dans $\{0 < x < \eta\}$ où k est un nombre naturel, $\eta > 0$, $a_i \in R^{n-1}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ [3].

Pour chaque m naturel posons:

$$f_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i/k} \quad (x > 0)\,.$$

Évidemment l'ensemble $F_{m\varrho} = \{(x, f_m(x)) \colon 0 < x < \varrho\}$ est semi-algébrique pour chaque m naturel et $\varrho > 0$. Pour terminer la démonstration du théorème il suffit de trouver m, ϱ de sorte que $F_{m\varrho} \subset A$.

Les ensembles $\overline{\{(x, f(x)) \colon 0 < x < \varepsilon/2\}}$, $\bar{A} \setminus A$ satisfont la condition de la séparation regulière [4] *, c'est-à-dire il est possible de choisir deux constantes positives C, α de manière que

$$\varrho(x, f(x)), \bar{A} \setminus A) \geqslant C|(x, f(x)) - a|^{\alpha}$$

pour chaque $x \in (0, \varepsilon/2)$, ϱ étant la distance Euclidienne.

* On peut supposer A borné.

D'autre part pour chaque m naturel on a

$$|f(x)-f_m(x)| \leqslant D_m|x|^{(m+1)/k} \qquad (0 < x < \varepsilon/2)$$

où D_m est une constante positive (dépendente de m).

Alors

$$\varrho\big((x, f_m(x)), \bar{A}\setminus A\big) \geqslant C|(x, f(x)) - a|^{\alpha} - D_m|x|^{(m+1)/k} > 0$$

pourvu que $(m+1)/k > \alpha$, $0 < x < \varrho$ où $\varrho > 0$ est une constante suffisamment petite. La démonstration du théorème est terminée.

Marquons que sans supposer A ouvert notre théorème n'est pas vrai.

Soit φ une fonction réelle analytique, pas algébrique, définie sur un voisinage ouvert de 0 dans R ($\varphi(x) = e^x$ par exemple). Posons

$$A = \{(x, \varphi(x), z) \in R \times R \times R^m \colon |z| < \sqrt{x}, x > 0\}.$$

Supposons qu'il existe un arc semi-algébrique $\lambda \subset A$ au bout $(0, \varphi(0), 0) \in R \times R \times R^m$. Alors par le théorème de Seidenberg–Tarski, l'ensemble

$$\{(x, \varphi(x)) \in R \times R, 0 < x < \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

est semi-algébrique comme l'image de λ par la projection $R \times R \times R^m \ni (x, y, z) \to (x, y) \in R \times R$ ce qui contredit l'hypothèse.

Bibliographie

[1] Z. Denkowska, S. Łojasiewicz, J. Stasica, *Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci: Sér. Sci. Math., 27 (1979), 529—536.

[2] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Bures sur Yvette (1965).

[3] W. Pawłucki, *Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique*, Bull. Acad. Polon. Sci.: Sér. Sci. Math. (to appear).

[4] J. Stasica, *Whitney's condition for subanalytic sets*, Zeszyty Naukowe UJ, Prace Mat., 23 (1982) 211—221.

Received October 4, 1984