

Jerzy Górski

O pewnym warunku regularności punktów brzegowych w zagadnieniu Dirichleta na płaszczyźnie

W oparciu o metodę punktów ekstremalnych, wprowadzoną przez prof. F. Leję, autor podaje pewien wystarczający warunek regularności punktu brzegowego w zagadnieniu Dirichleta na płaszczyźnie. Otrzymany wynik jest przeniesieniem warunku podanego przez O. Frostmana dla przestrzeni.

Wstęp

Założmy, że E jest brzegiem obszaru płaskiego D_∞ zawierającego wewnątrz punkt $z = \infty$. Zakładam, że średnica pozaskończona¹⁾ (czyli tzw. pojemność) zbioru E , którą oznaczam przez $d(E)$, jest dodatnia. Niech

$$\eta^{(n)} = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\} \quad (1)$$

będzie n -tym układem ekstremalnym punktów zbioru E , tj. takim układem $n+1$ punktów zbioru E , że dla każdego układu $n+1$ punktów $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} = \xi^{(n)}$ zbioru E zachodzi nierówność

$$\prod_{0 \leq j < k \leq n} |\eta_j - \eta_k| \geq \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\xi_j - \xi_k|.$$

Oznaczmy przez $\Delta_n^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$ iloczyn postaci $\Delta_n^{(j)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n |\eta_j - \eta_k|$ i niech $\Delta_n^{(0)}$ będzie najmniejszym z iloczynów $\Delta_n^{(j)}$. Wiadomo, że:

1° — dla każdego punktu z nie leżącego w zbiorze E istnieje granica²⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n |z - \eta_j|} : \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} \right\} = L(z, E), \quad (2)$$

przy czym $\log L(z, E)$ jest uogólnioną funkcją Greena dla obszaru D_∞ z biegunem w punkcie $z = \infty$,

2° — istnieje granica³⁾ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Delta_n^{(0)}} = d(E)$.

¹⁾ Definicja średnicy pozaskończonej zbioru płaskiego podana jest np. w pracy F. Lei [2].

²⁾ Por. pracę F. Lei [2], str. 69.

³⁾ Tamże.

Warunek wystarczający O. Frostmána

W pracy doktorskiej O. Frostman¹ podał następujący warunek na regularność punktu brzegowego obszaru przestrzennego ([1], str. 57):

Niech K_r będzie kulą o promieniu r i o środku w punkcie P należącym do brzegu E danego obszaru przestrzennego D i niech $d(EK_r)$ oznacza średnicę pozaskończoną przestrzenną zbioru $^1) EK_r$. Jeżeli

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d(EK_r)}{r} > 0,$$

to punkt P jest regularny ze względu na problem Dirichleta dla obszaru D .

Wykażę, że analogiczny warunek jest warunkiem wystarczającym regularności punktu brzegowego z_0 obszaru płaskiego D_∞ ze względu na problem Dirichleta.

Lemat 1. Niech $K_r = K(z_0, r)$ oznacza koło o środku w punkcie $z_0 \in E$ i o promieniu r . Jeżeli $d(E) > 0$, to istnieje taki punkt $z_0 \in E$, że pojemność zbioru EK_r jest dodatnia dla każdego $r > 0$.

Dowód. Gdyby nie istniał w zbiorze E żaden punkt z_0 o powyższej własności, to każdy punkt zbioru E można by pokryć tak małym kołem, że pojemność części zbioru E zawartej w tym kole byłaby równa 0. Z twierdzenia Lebesgue'a-Borela o pokryciu wynika, że z tak otrzymanej rodziny kół można wybrać skończoną ich liczbę pokrywającą cały zbiór E . Oznaczmy koła te przez $K_1, K_2, \dots, K_p$. Ponieważ $d(EK_i) = 0$, $i = 1, \dots, p$ oraz $\sum_{i=1}^p d(EK_i) \supset E$, więc wobec tego, że $d(\sum_{i=1}^p EK_i) \geq d(E)$, pojemność zaś zbioru, który jest sumą skończonej liczby zbiorów o pojemności 0, jest równa zeru, wynika, że $d(E) = 0$ wbrew założeniu.

Lemat 2. Niech punkt z_0 posiada własność podaną w lemmacie 1. Wówczas do każdego $r > 0$ można dobrać taką liczbę $N(r)$, że w zbiorze $EK_r = EK(z_0, r)$ leży co najmniej jeden punkt n -tego układu ekstremalnego zbioru E , gdy $n > N(r)$.

Dowód. W przeciwnym razie istniałoby takie koło $K_{r_0} = K(z_0, r_0)$ i taki ciąg rosnący liczb naturalnych $n_1, n_2, \dots$, że w kole K_{r_0} nie leżałby żaden punkt układów ekstremalnych o numerach $n_1, n_2, \dots$. Odrzucając ze zbioru E zbiór EK_{r_0} nie zmienilibyśmy jego pojemności, bo

$$d(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\Delta_{n_k}^{(0)}}.$$

Pozostawałoby to w sprzeczności z założeniem

$$d(EK_{r_0}) > 0$$

¹⁾ Definicja średnicy pozaskończonej przestrzennej podana jest np. w pracy O. Frostmana [1], str. 45.

i następującym twierdzeniem¹⁾: Jeżeli do zbioru E dołączyć zbiór o pojemności dodatniej położony w D_∞ , to pojemność otrzymanego zbioru jest większa od $d(E)$.

Lemat 3. Niech $\nu_n(r)$ oznacza ilość punktów n -tego układu ekstremalnego zbioru E zawartych w kole $K_r = K(z_0, r)$, $z_0 \in E$. Oznaczymy przez $\nu(r)$ wyrażenie następujące:

$$\nu(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(r)}{n}. \quad (3)$$

Gdy $r \rightarrow 0$, to $\nu(r) \rightarrow 0$.

Dowód. Z określenia średnicy pozaskończonej $d(E)$ wynika

$$d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\eta_j - \eta_k| \right\}^{\frac{2}{n(n+1)}}.$$

Oznaczając przez $\eta_1, \dots, \eta_\nu$ te punkty n -tego układu ekstremalnego, które leżą w zbiorze EK_r , a przez D średnicę zbioru E , otrzymamy nierówność następującą:

$$\left\{ \prod_{0 \leq j < k \leq n} |\eta_j - \eta_k| \right\}^{\frac{2}{n(n+1)}} \leq \left\{ \prod_{1 \leq j < k \leq \nu} |\eta_j - \eta_k| \right\}^{\frac{2}{n(n+1)}} \cdot D^{1 - \frac{\nu(\nu-1)}{n(n+1)}} \\ \leq \left\{ \max_{\zeta^{(\nu)} \in EK_r} \prod_{1 \leq j < k \leq \nu} |\zeta_j - \zeta_k| \right\}^{\frac{2}{n(n+1)}} \cdot D.$$

Przechodząc do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$ otrzymamy stąd

$$d(E) \leq [d(EK_r)]^{\nu(r)} \cdot D. \quad (4)$$

Niech $r \rightarrow 0$. Ponieważ $d(EK_r) < d(K_r) = r$, więc $d(EK_r) \rightarrow 0$, gdy $r \rightarrow 0$. Gdyby $\nu(r)$ nie zdążyło do 0 wraz z r , to otrzymalibyśmy stąd oraz z nierówności (4) $d(E) \leq 0$ wbrew założeniu, że $d(E) > 0$.

Twierdzenie. Warunkiem wystarczającym regularności punktu brzegowego $z_0 \in E$ jest warunek następujący:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d(EK_r)}{r} > 0. \quad (5)$$

Dowód

1°. Zakładamy, że z_0 jest punktem zbioru E posiadającym własność podaną w lemmacie 1. Niech punkty²⁾ $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{\nu-1}$ n -tego układu ekstremalnego zbioru E leżą w zbiorze $EK_r = EK(z_0, r)$, pozostałe zaś punkty $\eta_\nu, \dots, \eta_n$ — w zbiorze $E - EK_r$. Niech $\nu = \nu_n(r)$ oznacza ilość punktów $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{\nu-1}$, ε zaś dowolną liczbę dodatnią < 1 . Wobec powyższych założeń można do ε dobrać taką liczbę dodatnią δ , że dla każdego punktu

¹⁾ Por. pracę F. Lei [3], str. 10.

²⁾ Jeżeli punkt η_0 leży w zbiorze $E - EK_r$, to dowód przebiega zupełnie podobnie.

$\zeta \in E - EK$, i dla każdych dwóch punktów z, z_1 należących do koła $K_\delta = K(z_0, \delta)$ zachodzi nierówność

$$1 - \varepsilon < \left| \frac{z - \zeta}{z_1 - \zeta} \right| < 1 + \varepsilon.$$

Stąd wobec lematu 2 wynika, że jeżeli $z \in K_\delta$ i $n > N(\delta)$, to istnieje co najmniej jeden punkt n -tego układu ekstremalnego, np. punkt η_{v-1} taki, że $\eta_{v-1} \in EK_\delta$ i zachodzą nierówności

$$1 - \varepsilon < \left| \frac{z - \eta_j}{\eta_{v-1} - \eta_j} \right| < 1 + \varepsilon \text{ dla } j = v, \dots, n. \quad (6)$$

Stąd dla $z \in K_\delta$ i $n > N(\delta)$ zachodzi nierówność następująca:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left| \frac{z - \eta_k}{\eta_0 - \eta_k} \right|} < (1 + \varepsilon)^{\frac{n-v-1}{n}} \cdot \left[\frac{|z - \eta_1| \dots |z - \eta_{v-1}| |\eta_{v-1} - \eta_v| \dots |\eta_{v-1} - \eta_n|}{\Delta_n^{(0)}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (7)$$

Wielomian $v-1$ -go stopnia

$$W_{v-1}(z) = \frac{(z - \eta_1) \dots (z - \eta_{v-1}) (\eta_{v-1} - \eta_v) \dots (\eta_{v-1} - \eta_n)}{\Delta_n^{(0)}}$$

jest wobec (6) ograniczony w zbiorze EK przez następujące wyrażenie:

$$|W_{v-1}(z)| < \frac{|z - \eta_1| \dots |z - \eta_n|}{\Delta_n^{(0)} (1 - \varepsilon)^{n-v-1}},$$

a ponieważ¹⁾ zachodzi nierówność $\prod_{j=1}^n \left| \frac{z - \eta_j}{\eta_0 - \eta_j} \right| < 1$ dla $z \in E$, więc w zbiorze EK_δ zachodzi nierówność

$$|W_{v-1}(z)| < \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{n-v-1}}. \quad (8)$$

Oznaczmy przez $\zeta^{(v-1)} = \{\zeta_0, \dots, \zeta_{v-1}\}$ $v-1$ -ty układ ekstremalny punktów dla zbioru EK_δ i wprowadźmy następujące oznaczenia: $L_{v-1}^{(j)}(z, \zeta^{(v-1)}) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{v-1} \frac{(z - \zeta_k)}{(\zeta_j - \zeta_k)}$, $j = 0, 1, \dots, v-1$. Stosując do wielomianu $W_{v-1}(z)$ wzór interpolacyjny Lagrange'a otrzymamy wobec (8) nierówność

$$|W_{v-1}(z)| < \frac{v}{(1 - \varepsilon)^{n-v-1}} \max_{(j)} |L_{v-1}^{(j)}(z, \zeta^{(v-1)})| = \frac{v}{(1 - \varepsilon)^{n-v-1}} |L_{v-1}^{(0)}(z, \zeta^{(v-1)})|. \quad (9)$$

¹⁾ Por. pracę F. Lei [2], str. 64.

Wobec (7) i (9) otrzymamy dla $z \in K_\delta$, $z \in E$ i $n > N(\delta)$ nierówność

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left| \frac{z - \eta_k}{\eta_0 - \eta_k} \right|} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{n-\nu-1}} \sqrt[n]{\left\{ \sqrt[n]{|L_{\nu-1}^{(0)}(z, \zeta^{(\nu-1)})|} \right\}^{\nu-1}} \cdot \sqrt[n]{\frac{|z - \zeta_0|}{|z - \zeta_s|}},$$

zatem przechodząc do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$, otrzymamy

$$L(z, E) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} [L(z, EK_\delta)]^{r(r)}, \quad (10)$$

gdzie

$$r(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n(r)}{n}.$$

Z określenia funkcji $L(z, EK_\delta)$ wynika nierówność

$$L(z, EK_\delta) \leq \frac{\max_{\zeta \in EK_\delta} |z - \zeta|}{d(EK_\delta)}. \quad (11)$$

Wobec (10) i (11) otrzymamy przechodząc do granicy, gdy $z \rightarrow z_0$, $z \in E$, nierówność

$$\lim_{z \rightarrow z_0} L(z, E) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \left[\frac{\delta}{d(EK_\delta)} \right]^{r(r)}. \quad (12)$$

Niech $\delta \rightarrow 0$, wówczas z (12) otrzymamy nierówność

$$\lim_{z \rightarrow z_0} L(z, E) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\delta}{d(EK_\delta)} \right]^{r(r)},$$

a ponieważ ε jest dowolną liczbą dodatnią, zatem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} L(z, E) \leq \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{d(EK_\delta)} \right]^{r(r)}.$$

Jeżeli

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{d(EK_\delta)} = a < \infty^1), \quad (13)$$

to

$$\lim_{z \rightarrow z_0} L(z, E) \leq a^{r(r)}.$$

Wobec lematu 3, gdy $r \rightarrow 0$, otrzymamy nierówność

$$\lim_{z \rightarrow z_0} L(z, E) \leq 1. \quad (14)$$

¹⁾ $d(EK_\delta) < d(K_\delta) = \delta$, zatem $a \geq 1$.

Ponieważ jak wiadomo¹⁾ $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{L}(z, E) \geq 1$, więc wobec (14) w punkcie z_0 istnieje granica $\lim_{z \rightarrow z_0} L(z, E) = 1$. Z faktu, że $\log L(z, E)$ jest funkcją Greena dla obszaru D_∞ i wobec twierdzenia G. Bouliganda²⁾, że warunkiem koniecznym i dostatecznym regularności punktu brzegowego z_0 jest, aby funkcja Greena posiadała w z_0 granicę równą 0, wynika, że punkt z_0 jest punktem regularnym ze względu na problem Dirichleta.

Warunek (13) można zapisać w postaci (5).

2°. Jeżeli punkt $z_0 \in E$ nie posiada własności wymienionej w lemma-cie 1, to istnieje takie koło $K_r = K(z_0, r)$, że $d(EK_r) = 0$, zatem $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d(EK_r)}{r} = 0$.

Warunek (5) nie zachodzi w punkcie z_0 .

Katedra Funkcji Analitycznych Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie.
Otrzymano dnia 10 grudnia 1954 r.

BIBLIOGRAFIA

- [1] O. Frostman, Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, *Meddel. f. Lunds. Univ. Mat. Seminar.*, 3 (1935), str. 1–118.
- [2] F. Leja, Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green, *Ann. de la Soc. Polon. de Math.*, t. XII (1933), str. 57–71.
- [3] F. Leja, Sur les suites de polynômes et la fonction de Green généralisée, *Ann. de la Soc. Polon. de Math.*, t. XVIII (1935), str. 4–11.
- [4] G. Bouligand, Sur le problème de Dirichlet, *Ann. de la Soc. Polon. de Math.*, t. IV (1926), str. 59–112.

РЕЗЮМЕ

Об известном условии регулярности граничных точек в проблеме Дирихле на плоскости

Пусть E есть крайняя точка неограниченной области на плоскости, содержащей в себе точку $z = \infty$.

Положим, что ёмкость $d(E)$ совокупности E положительная.

В настоящем сообщении приведены доказательства нескольких известных в литературе [3] достаточных условий регулярности граничной точки $z_0 \in E$ в проблеме Дирихле, применяя метод экстремальных точек проф. Ф. Леи [1], [2].

Если нп. K , представляет собой окружность с центром в точке Z_0 и радиусом r , то одним из достаточных условий регулярности данной граничной

¹⁾ Por. pracę F. Lei [2], str. 62.

²⁾ Por. pracę tego autora [4], str. 88.

Точки будут следующие условие

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{d(EK_r)}{r} > 0.$$

SUMMARY

On a Condition of Regularity of Boundary Points in the Dirichlet Problem

Let E be the boundary of a plan domain which contains a point $z = \infty$ in its interior.

We suppose that the logarithmical capacity $d(E)$ of E is 0. Using the extremal points method of F. Leja (1), (2) we prove in this note some known sufficient conditions (3) for the regularity of a boundary point z_0 in the Dirichlet problem.

E. g.: if K_r is a circle with the centre at z_0 and radius r and if

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{d(EK_r)}{r} > 0,$$

then the point z_0 is regular.