ZESZYTY NAUKOWE UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO
CCCCLXXV PRACE MATEMATYCZNE, ZESZYT 19 1977

Sur une méthode des différences finies pour l'équation différentielle non linéaire elliptique aux dérivées mixtes et la condition aux limites du type de Neumann

par M. MALEC

1. On considère ici une méthode des différences finies, appelée dans la suite schéma des différences finies, pour l'équation partielle

$$f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0, \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in (0, \sigma)^n \tag{1.1}$$

où $\frac{\partial u}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ avec la condition aux limites du type de Neumann sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \varphi_i(x) \text{ pour } x_i = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \psi_i(x) \text{ pour } x_i = \sigma \\ (i = 1, \dots, n) \end{cases} \tag{1.2}$$

Le schéma des différences finies mentionné s'obtient en remplaçant dans (1.1) les dérivées par rapport à x_i par les quotients centraux des différences finies et les autres dérivées du second ordre par les quotients ayant la forme

$$\frac{1}{2h^2}\left(u^{i(M)} + u^{j(M)} + u^{-i(M)} + u^{-j(M)} - 2u^M - u^{i(-j(M))} - u^{-i(j)M))}\right) \tag{1.3}$$

où

$$\frac{1}{2h^2}\left(-u^{i(M)} - u^{j(M)} - u^{-i(M)} - u^{-j(M)} + 2u^M + u^{i(j(M))} + u^{-i(-j(M))}\right) \qquad (i \neq j) \tag{1.4}$$

On prouve que de tels schémas sont convergents et on propose une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies (théorème 1).

2. Dans le travail entier nous poserons que les hypothèses suivantes sont satisfaites

1) la fonction scalaire $f(x, u, q, w)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ est de la classe C^1 dans l'ensemble

$$D = [0, \sigma]^n \times R^{1+n+n^2} \tag{2.1}$$

et satisfait dans cet ensemble aux conditions

$$\frac{\partial f}{\partial u} \leqslant L < 0, \ \left|\frac{\partial f}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma, \ 0 < g \leqslant \frac{\partial f}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial w_{ij}}\right|, \frac{\partial f}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial w_{ji}} \tag{2.2}$$

$$(i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, n)$$

où L, Γ et g sont des nombres,

2) pour les indices établis i, j $(1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant n)$ la fonction $\frac{\partial f}{\partial w_{ij}}$ est toujours non négative ou toujours non positive,

3) la fonction $u(x)$ est de la classe C^2 dans l'ensemble

$$E = [0, \sigma]^n \tag{2.3}$$

et satisfait à l'équation différentielle partielle (1.1) de même qu'aux conditions aux limites (1.2) où les fonctions φ_i et ψ_i sont de la classe C^2 sur les hyperplans $x_i = 0$ et $x_i = \sigma$ respectivement,

4) le pas h est tel que

$$\frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Remarque. La fonction $u(x)$, $x \in E \subset R^n$ est dite de classe C^r dans l'ensemble fermé E s'il existe une telle fonction $\tilde{u}(x)$ de classe C^r dans R^n que $\tilde{u}(x) = u(x)$ sur E.

3. Supposons que N est un nombre naturel et $m_1, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers et soit

$$\begin{cases} M = (m_1, \ldots, m_n) \\ z_1 = \{M\colon \ 0 \leqslant m_i \leqslant N+1, \ i = 1, \ldots, n\} \\ z_2 = \{M\colon \ -1 \leqslant m_i \leqslant N, \ i = 1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Introduisons les notations suivantes

$$\begin{cases} -i(M) = (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \ (M \in Z_1) \\ i(M) = (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i + 1, m_{i+1}, \ldots, m_n) \ (M \in Z_2) \\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3.2}$$

et soit

$$(3.3)\qquad Z=\{M:\ \text{ils existent } i \text{ et } j\ (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n) \text{ tels que } i(j(M)) \text{ ou } i(-j(M)) \text{ ou } -i(j(M)) \text{ ou } -i(-j(M)) \text{ appartenant à } Z_1\cap Z_2\}$$

On suppose qu'à chaque multi-indice $M\in Z$ correspond un nombre réel v^M et on admet que

$$(3.4)\qquad \begin{cases} v^{Mi}=\dfrac{1}{2h}\left(v^{i(M)}-v^{-i(M)}\right) \\ v^{+Mij}=\dfrac{1}{2h^2}\left(-v^{i(M)}-v^{j(M)}-v^{-i(M)}-v^{-j(M)}+2v^M+v^{i(j(M))}+v^{-i(-j(M))}\right) \\ v^{-Mij}=\dfrac{1}{2h^2}\left(v^{i(M)}+v^{j(M)}+v^{-i(M)}+v^{-j(M)}-2v^M-v^{i(-j(M))}-v^{-i(j(M))}\right) \\ (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n,\ M\in Z_1\cap Z_2) \end{cases}$$

Considérons maintenant dans l'espace euclidien à n-dimensions R^n un ensemble de points nodaux ayant les coordonnées

$$(3.5)\qquad x_i^{m_i}=m_ih \qquad (i=1,\dots,n)$$

où $M=(m_1,\dots,m_n)\in Z$, $0<h=\dfrac{\sigma}{N}$ et désignons le point nodal $(x_1^{m_1},\dots,x_n^{m_n})$ par x^M.

Dans la suite nous supposerons que les nombres v^M satisfont aux conditions

$$(3.6)\qquad \begin{cases} v^{Mi}=\varphi_i(x^M) \text{ pour } m_i=0 \\ v^{Mi}=\psi_i(x^M) \text{ pour } m_i=N \\ v^{i(j(M))}=v^{-i(-j(M))}+2h[\psi_i(x^M)+\psi_j(x^M)] \text{ pour } m_i=m_j=N\ (i\neq j) \\ v^{-i(j(M))}=v^{i(-j(M))}-2h[\varphi_i(x^M)-\psi_j(x^M)] \text{ pour } m_i=0 \text{ et } m_j=N\ (i\neq j) \\ v^{-i(-j(M))}=v^{i(j(M))}-2h[\varphi_i(x^M)+\varphi_j(x^M)] \text{ pour } m_i=m_j=0\ (i\neq j) \\ v^{i(-j(M))}=v^{-i(j(M))}+2h[\psi_i(x^M)-\varphi_j(x^M)] \text{ pour } m_i=N \text{ et } m_j=0\ (i\neq j) \\ (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n,\ M\in Z_1\cap Z_2) \end{cases}$$

et à l'équation aux différences finies

$$(3.7)\qquad f(x^M, v^M, v^{MI}, v^{MIJ})=0 \qquad (M\in Z_1\cap Z_2)$$

où les fonctions φ_i, ψ_i, f sont les mêmes que celles figurant dans (1.2) et (1.1), et

$$(3.8)\qquad \begin{cases} v^{MIJ} = (v^{M11}, \ldots, v^{M1n}, \ldots, v^{Mn1}, \ldots, v^{Mnn}) \\ v^{Mij} = \begin{cases} v^{+Mij} \text{ pour } i \neq j \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial w_{ij}} \geqslant 0 \\ v^{-Mij} \text{ pour } i = j \text{ ou } \dfrac{\partial f}{\partial w_{ij}} \leqslant 0 \end{cases} \\ (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

(voir la condition 2) dans 2).

4. Désignons par u^M la valeur de la solution du problème différentiel (1.1), (1.2) en point nodal x^M engendré par le multi-indice $M \in Z_1 \cap Z_2$ et soit

$$(4.1)\qquad \begin{cases} u^{-i(M)} = u^{i(M)} - 2h\varphi_i(x^M) \text{ pour } m_i = 0 \\ u^{i(M)} = u^{-i(M)} + 2h\psi_i(x^M) \text{ pour } m_i = N \\ u^{i(j(M))} = u^{-i(-j(M))} + 2h[\psi_i(x^M) + \psi_j(x^M) \text{ pour } m_i = m_j = N \ (i \neq j) \\ u^{-i(j(M))} = u^{i(-j(M))} - 2h[\varphi_i(x^M) - \psi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = N \ (i \neq j) \\ u^{-i(-j(M))} = u^{i(j(M))} - 2h[\varphi_i(x^M) + \varphi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = m_j = 0 \ (i \neq j) \\ u^{i(-j(M))} = u^{-i(j(M))} + 2h[\psi_i(x^M) - \varphi_j(x^M)] \text{ pour } m_i = N \text{ et } m_j = 0 \ (i \neq j) \\ (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2) \end{cases}$$

LEMME 1. *Si les hypothèses de 2 sont satisfaites, u^M vérifient les égalités*

$$(4.2)\qquad f(x^M, u^M, u^{MI}, u^{MIJ}) = \eta^M(h) \ \textit{pour} \ M \in Z_1 \cap Z_2$$

(voir (3.8)) *et*

$$(4.3)\qquad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0, \qquad \varepsilon(h) = \max_{M \in Z_1 \cap Z_2} |\eta^M(h)|$$

Démonstration. Comme la solution $u(x)$ du problème différentiel (1.1), (1.2) est de classe C^2 dans l'ensemble E et la fonction f est de classe C^1 dans l'ensemble D, les formules (4.2) et (4.3) sont évidentes pour ceux des points nodaux x^M qui sont générés par les suites $M \in Z_1 \cap Z_2$ où $1 \leqslant m_i \leqslant N-1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Il faut encore démontrer que les formules (4.2) et (4.3) sont valables pour les points nodaux x^M appartenant à la frontière ∂E de l'ensemble E. Pour ce faire il suffit de prouver que pour $x^M \in \partial E$ les quotients des différences finies u^{Mi} et u^{-Mij}, u^{+Mij} tendent à $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x^M)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M)$ respectivement, lorsque $h \to 0$ (ceci résulte de la régularité de la fonction f dans l'ensemble D).

De (4.1), nous avons

$$(4.4)\qquad \begin{cases} u^{Mi} = \varphi_i(x^M) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x^M) \text{ pour } m_i = 0 \\ u^{Mi} = \psi_i(x^M) = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x^M) \text{ pour } m_i = N \\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

Soit ensuite

$$(4.5)\qquad u^+(x) = \begin{cases} u(x) \text{ pour } x \in E \\ u(x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + 2x_i\varphi_i(\check{x}_i) \\ \quad \text{pour } x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i,\ x_i \in [-\sigma, 0] \\ u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 2\sigma - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - 2(\sigma - x_i)\psi_i(\hat{x}_i) \\ \quad \text{pour } x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i,\ x_i \in [\sigma, 2\sigma] \\ (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

où $\check{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$.

La fonction $u^+(x)$ est de classe C^2 dans l'ensemble $E^+ = E \cup (E_1^+ \cup \ldots \cup E_n^+)$ où

$$(4.6)\qquad E_i^+ = \{x \in R^n\colon\ x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i,\ x_i \in [-\sigma, 2\sigma]\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Ses dérivées du second ordre peuvent donc être rapprochées par les quotients des différences finies formés de la même façon que les quotients u^{-Mij} et u^{+Mij} pour la fonction $u(x)$, mais seulement à la condition que tous les points nodaux figurant dans ces quotients appartiennent à l'ensemble E^+.

Comme les valeurs des fonctions u^+ et u sont respectivement égales aux points nodaux générés par les multi-indices M, $-i(M)$, $i(M)$, $j(M)$ $(j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$ lorsque $m_i = 0$ ou $m_i = N$, et les valeurs des dérivées du second ordre de ces deux fonctions sont les mêmes pour $x^M \in \partial E$, alors

$$(4.7)\qquad u^{Mii} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^M) + 0(h^2) \text{ lorsque } m_i = 0$$

et

$$(4.8)\qquad \begin{cases} u^{\mp Mij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + 0(h) \text{ lorsque } m_i = 0,\ m_j \neq 0,\ m_j \neq N, \\ \qquad\qquad j = 1, \ldots, n,\ j = i\ (i \neq j) \\ u^{+Mij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + 0(h) \text{ lorsque } m_i = 0,\ m_j \neq N\ (i \neq j) \\ u^{-Mij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + 0(h) \text{ lorsque } m_i = m_j = 0 \text{ ou } m_i = m_j = N\ (i \neq j) \end{cases}$$

$$(i, j = 1, \ldots, n)$$

Pour démontrer la formule (4.8) il suffit d'appliquer la règle de L'Hospital-Bernoulli.

Il faut encore montrer que

$$(4.9)\quad \begin{aligned} &\lim_{h\to 0} u^{+Mij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) \text{ lorsque } m_i = m_j = 0 \text{ ou } m_i = m_j = N \ (i \neq j) \\ &\lim_{h\to 0} u^{-Mij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) \text{ lorsque } m_i = 0,\ m_j = N \ (i \neq j) \end{aligned}$$

Nous ferons la démonstration de l'égalité (4.9) dans le cas où $m_i = m_j = 0$ $(i \neq j)$. Si $m_i = m_j = N$ $(i \neq j)$ ou $m_i = 0$ et $m_j = N$ $(i \neq j)$, la démonstration est pareille.

Soient donc $x^M \in \partial E$ et $m_i = m_j = 0$ $(i \neq j)$. Nous aurons alors

$$(4.10)\quad u^{i(j(M))} = u^M + h\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^M) + \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^M)\right] + \frac{1}{2}h^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^M) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x^M)\right] + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + 0(h^3)$$

D'où

$$(4.11)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) = \frac{1}{2h^2}\left[u^{i(j(M))} + u^{i(j(M))} - 2u^M - 2h\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^M) + \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^M)\right) - h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^M) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x^M)\right)\right] + 0(h)$$

Mais $u^{i(j(M))} = u^{-i(-j(M))} + 2h[\varphi_i(x^M) + \varphi_j(x^M)] = u^{-i(-j(M))} + 2h\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^M) + \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^M)\right]$ (voir (4.1) et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^M) = \frac{1}{h^2}[u^{i(M)} - 2u^M + u^{-i(M)}]$ (voir (4.7) et (3.4), (3.8), (2.2)), alors

$$(4.12)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) = \frac{1}{2h^2}[u^{i(j(M))} + u^{-i(-j(M))} - 2u^M - u^{i(M)} + 2u^M - u^{-i(M)} - u^{j(M)} + 2u^M - u^{-j(M)}] + 0(h) = u^{+Mij} + 0(h)$$

Ainsi la démonstration du lemma 1 est achevée.

5. Théorème 1. *Supposons que les hypothèses de* 2 *sont satisfaites, les nombres* v^M *et* u^M *sont définis par les formules* (3.7), (3.8) *et* (4.1), (4.2) *respectivement ainsi que*

$$(5.1)\qquad r^M = u^M - v^M \qquad (M \in Z)$$

Sous ces hypothèses,

1) *l'erreur de la méthode des différences finies* (3.7), (3.8) *peut être estimée de la façon suivante*

$$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{-L} \qquad (M \in Z) \tag{5.2}$$

2) *la méthode des différences finies* (3.7), (3.8) *est convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{h\to 0} r^M = 0 \tag{5.3}$$

Démonstration. Comme (5.3) résulte de (5.2) (voir (4.3)) il suffit de montrer (5.2).

De (4.1) et de (4.2), nous avons

$$\begin{cases} r^{-i(M)} = r^{i(M)} \text{ pour } m_i = 0 \\ r^{i(M)} = r^{-i(M)} \text{ pour } m_i = N \\ r^{i(j(M))} = r^{-i(-j(M))} \text{ pour } m_i = m_j = N \ (i \neq j) \\ r^{-i(j(M))} = r^{i(-j(M))} \text{ pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = N \ (i \neq j) \\ r^{-i(-j(M))} = r^{i(j(M))} \text{ pour } m_i = m_j = 0 \ (i \neq j) \\ r^{i(-j(M))} = r^{-i(j(M))} \text{ pour } m_i = N \text{ et } m_j = 0 \ (i \neq j) \\ (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2) \end{cases} \tag{5.4}$$

Il résulte des égalités dérnières que

$$\max_{M \in Z} r^M = r^A, \qquad \min_{M \in Z} r^M = r^B$$
$$\text{où } A \in Z_1 \cap Z_2, \qquad B \in Z_1 \cap Z_2 \tag{5.5}$$

Tenant compte de (4.2), (3.8) et en appliquant le théorème de la moyenne, nous obtenons

$$-\varepsilon(h) \leqslant \eta^A = f(x^A, u^A, u^{AI}, u^{AIJ}) - f(x^A, v^A, v^{AI}, v^{AIJ}) = c^A r^A + \sum_{j=1}^{n} b_j^A r^{Aj} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^A r^{Aij} \tag{5.6}$$

où $c^A = \dfrac{\partial f}{\partial u}(-)$, $b_j^A = \dfrac{\partial f}{\partial q_j}(-)$, $a_{ij}^A = \dfrac{\partial f}{\partial w_{ij}}(-)$ et les dérivées sont prises aux points convenables $(-)$.

Analogiquement on obtient

$$\varepsilon(h) \geqslant \eta^B = f(x^B, u^B, u^{BI}, u^{BIJ}) - f(x^B, v^B, v^{BI}, v^{BIJ}) = c^B r^B + \sum_{j=1}^{n} b_j^B r^{Bj} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^B r^{Bij} \tag{5.7}$$

Montrons maintenant que

$$r^A \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{-L} \tag{5.8}$$

Nous allons faire la démonstration de (5.8) en raisonnant par l'absurde. Admettons que l'inégalité (5.8) n'est pas vérifiée, c'est-à-dire

$$r^A > \frac{\varepsilon(h)}{-L} \tag{5.9}$$

En utilisant la définition (3.4) et en tenant compte de l'égalité $a_{ij}^A = a_{ji}^A$ (voir (2.2)), nous obtenons

$$\begin{aligned}(5.10)\quad & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^A r^{Aij} + \sum_{j=1}^{n} b_j^A r^{Aj} + c^A r^A \\ & = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h}\left(a_{ii}^A - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}^A|\right) + \frac{1}{2} b_i^A\right](r^{i(A)} - r^A) + \\ & + \frac{1}{h}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\frac{1}{h}\left(a_{ii}^A - \sum_{\substack{i=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}^A|\right) - \frac{1}{2} b_i^A\right](r^{-i(A)} - r^A) + \\ & + \frac{1}{2h^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}^A|\left[(r^{i(s(i,j)j(A))} - r^A) + (r^{-i(-s(i,j)j(A))} - r^A)\right] + c^A r^A\end{aligned}$$

où

$$s(i,j) = \begin{cases} +1 & \text{pour} \quad a_{ij}^A \geqslant 0 \\ -1 & \text{pour} \quad a_{ij}^A \leqslant 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

Il résulte des hypothèses (2.2) et (2.6) que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h}\left(a_{ii}^A - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}^A|\right) + \dfrac{1}{2} b_i^A \geqslant \dfrac{g}{h} - \dfrac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{h}\left(a_{ii}^A - \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}^A|\right) - \dfrac{1}{2} b_i^A \geqslant \dfrac{g}{h} - \dfrac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

tandis qu'à partir de (5.5) on arrive à

$$\begin{cases} r^{i(A)} - r^A \leqslant 0, \; r^{-i(A)} - r^A \leqslant 0, \; r^{i(s(i,j)j(A))} - r^A \leqslant 0, \; r^{-i(-s(i,j)j(A))} - r^A \leqslant 0 \\ i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n) \end{cases} \tag{5.13}$$

Notons aussi que de (5.9) et du fait que $c^A \leqslant L < 0$ (voir (2.2)), il s'ensuit

(5.14) $$c^A r^A < -\varepsilon(h)$$

Des (5.10)—(5.14), nous obtenons

(5.15) $$c^A r^A + \sum_{j=1}^{n} b_j^A r^{Aj} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^A r^{Aij} < -\varepsilon(h)$$

ce qui est contraire à (5.6).

De la même façon on peut montrer que l'inégalité (5.7) nous donne

(5.16) $$r^B \geqslant \frac{\varepsilon(h)}{L}$$

De (5.8) et de (5.16) (voir aussi (5.5)) il résulte que

(5.17) $$|r^M| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{-L} \text{ pour } M \in Z$$

La démonstration du théorème 1 est donc terminée.