

M. Rozmus-Chmura

Les solutions convexes de l'équation fonctionnelle $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$

Je voudrais m'occuper ici du problème de l'existence et de l'unicité des solutions convexes dans un intervalle $(a, b]$ de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$$

à savoir que $g(x)$ est la fonction cherchée.

Le problème de l'unicité des solutions convexes de l'équation (1) dans le cas où l'intervalle $(a, b]$ est infini, a été déjà examiné par M. Kuczma dans l'étude [1].

Dans mon étude je me suis occupée si bien du cas où l'intervalle (a, b) est infini que du cas où il est fini.

L'équation présentée ci-dessus est une généralisation de l'équation d'Abe

$$(2) \quad g[\alpha(x)] - g(x) = l$$

dont les solutions convexes ont été présentées dans l'étude de M. Kuczma [2].

Supposons que la fonction $\alpha(x)$ satisfait aux conditions suivantes:

(H₁) $\alpha(x)$ est croissante et concave dans l'intervalle $(a, b]$, $-\infty \leq a < b < \infty$,
 $a < \alpha(x) < x$ dans $(a, b]$ et que $\lim_{x \rightarrow a+} \alpha'(x) = 1$

et supposons que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions:

(H₂) $\varphi(x)$ est croissante et concave dans l'intervalle $(a, b]$ et $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = l$ où
 $|l| < \infty$.

La définition et les propriétés des fonctions convexes et concaves ont été présentées par Bourbaki. En particulier les fonctions concaves et convexes sont presque partout différentiables.

Les itérées naturelles de la fonction $\alpha(x)$ sont définies par les relations:
 $\alpha^1(x) = \alpha(x)$, $\alpha^{n+1}(x) = \alpha[\alpha^n(x)]$.

Pour la fonction $\alpha(x)$ qui satisfait aux conditions (H₁) toutes les itérées $\alpha^n(x)$ sont définies, strictement croissantes et concaves dans l'intervalle $(a, b]$. De plus la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n(x) = a$ pour chaque $x \in (a, b]$.

Pour un $x \in (a(b), b)$ et fixé nous posons: $x_n = \alpha^n(x)$, $b_n = \alpha^n(b)$.

Théorème

Si $\alpha(x)$ satisfait aux conditions (H_1) et si $\varphi(x)$ satisfait aux conditions (H_2) , alors:

$$g(x) = g(b) + \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(b_k) - \varphi(x_k)] + l \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - x_k}{b_k - b_{k+1}}$$

est la solution convexe unique de l'équation (1) à savoir que $g(b)$ est une constante additive.

TRAVAUX CITÉS

- [1] M. Kuczma, *On convex solution of the functional equation $g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x)$* , Publ. Math. Debrecen 6 (1959), 40-47.
 [2] M. Kuczma, *On convex solutions of Abel's functional equation*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 13 (1965), 645-648.