S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 533–536 (2009) УДК 517.43
Краткие сообщения MSC 47E05

О КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ РАНГА 2

А. Е. МИРОНОВ

Abstract. In this work we suggest the method of constructing of commuting ordinary differential operators of rank 2 corresponding to the spectral curve of genus 3 and 4. In the case of genus 4 the operators have polynomial coefficients.

Keywords: commuting differential operators.

1. Введение и основные результаты

Пусть

$$L_1 = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x)\frac{d^i}{dx^i}, \quad L_2 = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x)\frac{d^i}{dx^i}$$

два дифференциальных оператора. Имеет место лемма Берчналла–Чаунди

Лемма 1. *Если $L_1L_2 = L_2L_1$, то существует ненулевой полином Q от двух коммутирующих переменных такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$.*

Спектральной кривой коммутирующих операторов L_1 и L_2 называется гладкое пополнение алгебраической кривой $\Gamma = \{(\lambda,\mu) : Q(\lambda,\mu) = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. В этой работе мы рассматриваем гладкие спектральные кривые. Спектральная кривая параметризует совместные собственные функции операторов L_1 и L_2: если $L_1\psi = \lambda\psi, L_2\psi = \mu\psi$, то $(\lambda,\mu) \in \Gamma$. *Рангом* называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных λ и μ. Коэффициенты операторов ранга 1 выражаются через тэта-функцию многообразия

Mironov, A.E., On commuting differential operators of rank 2.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00598а).

Представлена И. А. Таймановым 21 декабря 2009 г., опубликована 23 декабря 2009 г.

Якоби кривой Γ. Операторы ранга больше 1 в общем случае не найдены. Известны следующие результаты. Диксмье [1] алгебраическими методами нашел примеры операторов ранга 2, отвечающие эллиптической кривой

$$L_1 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^2 - 2x,$$

$$L_2 = \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)^3 - \frac{3}{2}\left(x\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^3 - \alpha\right)x\right).$$

В [2],[3] найдены все операторы ранга 2, отвечающие эллиптической кривой. В [4] среди этих операторов выделены операторы с рациональными коэффициентами. В [5] найдены операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой. В [6], [7] найдены примеры операторов ранга 2, отвечающих кривой рода 2. Среди этих операторов имеются операторы с полиномиальными коэффициентами. Основной результат этой работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Существуют операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, отвечающие гиперэллиптической кривой рода 4.*

2. Метод деформации параметров Тюрина

В случае операторов ранга 2 совместная собственная функция $\psi_j(x,P), j = 1,2, P \in \Gamma$ операторов имеет одну существенно особую точку $q \in \Gamma$ и $2g$ простых полюсов, независящих от x. В явном виде ψ_j не удается найти. Введем две функции $\chi_0(x,P)$ и $\chi_1(x,P)$ из равенства

$$\psi_j'' = \chi_1\psi_j' + \chi_0\psi_j.$$

В отличие от ψ_j функции $\chi_0(x,P)$ и $\chi_1(x,P)$ мероморфны на Γ с простыми полюсами $P_1(x), \dots, P_{2g}(x)$. В окрестности q функции $\chi_0(x,P)$ и $\chi_1(x,P)$ имеют следующие разложения

$$\chi_0(x,P) = k + g_0(x) + O(k^{-1}),\ \chi_1(x,P) = O(k^{-1}),$$

где k^{-1} — локальный параметр около q, а в окрестностях $P_j(x)$ выглядят следующим образом

$$\chi_0(x,P) = \frac{-\alpha_{i0}(x)\gamma_i'(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i0}(x) + O(k - \gamma_i(x)),$$

$$\chi_1(x,P) = \frac{-\gamma_i'(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i1}(x) + O(k - \gamma_i(x)).$$

Имеет место равенство [8]

$$d_{i0}(x) = \alpha_{i0}^2(x) + \alpha_{i0}(x)d_{i1}(x) - \alpha_{i0}'(x). \qquad (1).$$

Коэффициенты операторов восстанавливаются по функциям χ_0, χ_1 (см. [2],[8]).

3. Схема доказательства теоремы 1

В качестве спектральной кривой Γ возьмем гиперэллиптическую кривую, заданную уравнением

$$w^2 = F(z) = z^{2g+2} + c_{2g+1}z^{2g+1} + \dots + c_0,$$

где $c_0 \neq 0$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma : (z, w) \to (z, -w)$. Пусть $q = (0, \sqrt{c_0})$. Следуя [6], [7] будем предполагать, что $\sigma P_k = P_{g+k}, k = 1, \dots, g$, а функции $\chi_0(x, P)$ и $\chi_1(x, P)$ имеют вид

$$\chi_0(x, P) = -\frac{1}{2}\frac{H_1(x)\gamma_1'(x)}{z - \gamma_1(x)} - \dots - \frac{1}{2}\frac{H_g(x)\gamma_g'(x)}{z - \gamma_g(x)} + \frac{1}{2z} + \frac{\kappa(x)}{2} +$$

$$(-1)^g \frac{1}{2}\frac{w\gamma_1(x)\dots\gamma_g(x)}{z(z - \gamma_1(x))\dots(z - \gamma_g(x))},$$

$$\chi_1(x, P) = -\frac{\gamma_1'(x)}{z - \gamma_1(x)} - \dots - \frac{\gamma_g'(x)}{z - \gamma_g(x)} - \frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x)} - \dots - \frac{\gamma_g'(x)}{\gamma_g(x)}.$$

В этом случае по схеме работ [6], [7] уравнения (1) сводятся к $g-1$ нелинейным дифференциальным уравнениям на $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Основное наблюдение данной статьи заключается в следующем. Для того чтобы найти частные решения этих уравнений, в качестве спектральной кривой нужно взять кривую, заданную уравнением

$$w^2 = z^{2g+2} + c_{g+1}z^{g+1} + c_0,$$

и положить

$$\gamma_2 = a_2\gamma_1, \dots, \gamma_g = a_g\gamma_1,\ a_j \in \mathbb{C},$$

где γ_1 удовлетворяет уравнению

$$(\gamma_1')^2 = \gamma_1^{g+2} + c\gamma_1,\ c \in \mathbb{C}.$$

Тогда дифференциальные уравнения на γ_k сводятся к алгебраическим уравнениям на a_k, c, c_{g+1}, c_0.

Из-за громоздкости формул при $g = 3$, мы этот случай здесь опустим.

Пусть $g = 4$,

$$F(z) = z^{10} - 3z^5 + 1.$$

Функции γ_j имеют вид

$$\gamma_1 = \frac{-a}{\sqrt{x}},\ \gamma_2 = \frac{a}{\sqrt{x}},\ \gamma_3 = \frac{b}{\sqrt{x}},\ \gamma_4 = \frac{-b}{\sqrt{x}},$$

$$a = (-1)^{\frac{1}{4}}(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}},\ b = \frac{1}{2}(-1)^{\frac{1}{4}}(1 + i\sqrt{3})^{\frac{5}{4}}.$$

Функции χ_0 и χ_1 имеют вид

$$\chi_0 = -\frac{2\sqrt{2}x^3z - 12\sqrt{2}xz^2 + 2x^4z^3 - 12x^2z^4 + (24 + \sqrt{2}x^5)z^5 - 24(1 + w)}{24z(2 + \sqrt{2}xz^2 + x^2z^4)},$$

$$\chi_1 = \frac{z^2(\sqrt{2} + 2xz^2)}{2 + \sqrt{2}xz^2 + x^2z^4}.$$

Оператор, отвечающий мероморфной функции

$$\lambda = \frac{1}{2z^5} + \frac{w}{2z^5} + \frac{3}{4}$$

на Γ с единственным полюсом пятого порядка в q имеет вид

$$L_1=\partial_x^{10}+\frac{5x^3}{12\sqrt{2}}\partial_x^8+\frac{5x^2}{\sqrt{2}}\partial_x^7+\frac{5}{144}(396\sqrt{2}x+x^6)\partial_x^6+\frac{5}{8}(36\sqrt{2}+x^5)\partial_x^5+$$
$$\frac{5x^4(3528+\sqrt{2}x^5)}{3456}\partial_x^4+\frac{5x^3(760+\sqrt{2}x^5)}{192}\partial_x^3+\frac{5x^2(622080+3384\sqrt{2}x^5+x^{10})}{82944}\partial_x^2+$$
$$\frac{5x(36288+960\sqrt{2}x^5+x^{10})}{6912}\partial_x+\frac{23}{4}+\frac{61x^5}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{10}}{1536}+\frac{x^{15}}{995328\sqrt{2}}.$$

Оператор, коммутирующий с L_1 имеет вид

$$L_2=\partial_x^{12}+\frac{x^3}{2\sqrt{2}}\partial_x^{10}+\frac{15x^2}{2\sqrt{2}}\partial_x^9+\frac{2424\sqrt{2}x+5x^6}{96}\partial_x^8+\left(\frac{109}{\sqrt{2}}+\frac{5x^5}{4}\right)\partial_x^7+$$
$$\left(\frac{109x^4}{8}+\frac{5x^9}{864\sqrt{2}}\right)\partial_x^6+\frac{9680x^3+10\sqrt{2}x^8}{128}\partial_x^5+\frac{x^2(6072192+26064\sqrt{2}x^5+5x^{10}}{27648}\partial_x^4+$$
$$\left(294x+\frac{377x^6}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{11}}{1152}\right)\partial_x^3+\frac{42964992+6535296\sqrt{2}x^5+14736x^{10}+\sqrt{2}x^{15}}{331776}\partial_x^2+$$
$$\frac{28237824\sqrt{2}x^4+181376x^9+40\sqrt{2}x^{14}}{884736}\partial_x+$$
$$\frac{463822848\sqrt{2}x^3+9092736x^8+5832\sqrt{2}x^{13}+x^{18}}{23887872}.$$

Список литературы

[1] J. Dixmier, *Sur les algubres de Weyl*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 209–242.

[2] И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили. 1*, Функц. анализ. и его прилож., **12**: 4 (1978), 41–52.

[3] И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения*, Успехи матем. наук., **35**: 6 (1980), 47–68.

[4] П.Г. Гриневич, *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов*, Функц. анализ. и его прилож., **16**: 1 (1982), 19–24.

[5] О.И. Мохов, *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения.*, Известия АН СССР. Серия матем., **53**: 6 (1989), 1291–1314.

[6] А.Е. Миронов, *Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два*, Матем. сб., **195**: 5 (2004), 103—114

[7] А.Е. Миронов, *Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2*, Функц. анализ и его прил., **39**: 3 (2005), 91—94.

[8] И.М. Кричевер, *Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов*, Функц. анализ. и его прилож. **12**: 3 (1978), 20–31.

Андрей Евгеньевич Миронов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mironov@math.nsc.ru