S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 312–325 (2009) УДК 510.64
MSC 03B44, 03B45

ВРЕМЕННАЯ ЛОГИКА ЛИНЕЙНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ФРЕЙМОВ С АКСИОМОЙ ИНДУКЦИИ

В. Ф. ЮН

Abstract. A class of frames based on a class of frames with discrete linear time with current time point clusters is considered. The temporal calculus **LInd** is found which is complete with respect to this class. It is proved that **LInd** has the finite model property and therefore it is decidable.

Keywords: temporal logic, Kripke frames, axiomatization, finite model property.

Введение

Модальная логика отличается большим разнообразием синтаксиса и семантики: кроме обычных логических связок используются различные модальности типа необходимости и возможности. Этим можно объяснить широкое применение модальных и временных логик, например, в информационных технологиях, теории искусственного интеллекта, математической лингвистике (см., например, [5], [8]).

В последнее время модальные логики также применяются и к изучению геометрических структур ([1], [2], [6]). Так, например, в [6] исследуется полимодальная логика линейных временных моделей с моментами времени, которые являются кластерами состояний. Более точно, рассматриваются фреймы $\langle \bigcup_{i\in N} C(i),\ R\rangle$ с линейно упорядоченными R-кластерами состояний $C(i)$, и

Yun, V.F., Temporal logic of linear time frames with inductions axiom.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00090-а) и при поддержке гранта АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

Поступила 5 июня 2009 г., опубликована 28 октября 2009 г.

исследуется логика таких фреймов в языке с временными модальными операторами $\Box$, $\Box^*$ и слабыми модальностями $\Box_w$, $\Box_w^*$. Такие фреймы вполне естественно возникают в информатике и теории искуственного интеллекта: кластерами могут быть люди с их общим знанием, или все ресурсы в интернете и другие информационные узлы, доступные в данный момент.

Мы введем дополнительное отношение R_1 между элементами соседних кластеров и рассмотрим более широкий класс фреймов вида $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$, которые назовем линейными по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймами. При задании логики посредством моделей важнейшей проблемой является выбор модального языка и проблема аксиоматизации данной логики. Заметим, что слабые модальности не являются нормальными, то есть не верны формулы $\Box_w A \& \Box_w B \longrightarrow \Box_w(A\&B)$, $\Box_w^* A \& \Box_w^* B \longrightarrow \Box_w^*(A\&B)$ [6]. Это существенно усложняет задачу аксиоматизации. Если добавить к языку временные модальности $\Box_1$, $\Box_1^*$, то можно доказать, что слабые модальности $\Box_w$ и $\Box_w^*$ выражаются через другие. Поэтому при аксиоматизации класса линейных по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймов естественно выбрать временной язык с четырьмя модальностями $\Box$, $\Box^*$ и $\Box_1$, $\Box_1^*$.

В этом языке строится исчисление **LInd**, содержащее аксиому, похожую на аксиому индукции [7], полное относительно линейных по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймов. Доказывается, что оно финитно аппроксимируемо и, следовательно, является разрешимым.

1. Исчисление **LInd** и теорема о корректности

Будем рассматривать язык с модальными операторами будущего $\Box$, $\Box_1$ и модальными операторами прошлого $\Box^*$, $\Box_1^*$.

Рассмотрим фреймы $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$ и модели вида $\langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, где X — непустое множество, $R,\ R_1$ — бинарные отношения на множестве X, $\models$ — бинарное отношение истинности между элементами множества X и множеством формул, определяемое стандартным способом [4].

Полагаем для любого $x \in X$:

$$x \models \Box A \iff \forall y(xRy \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box_1 A \iff \forall y(xR_1y \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box^* A \iff \forall y(yRx \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box_1^* A \iff \forall y(yR_1x \Longrightarrow y \models A).$$

Говорим, что формула A *истинна в модели* $M = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, если $x \models A$ для любого $x \in X$. Формула A *общезначима в фрейме*, если она истинна в любой модели, основанной на этом фрейме.

Введем вспомогательное отношение S:

$$xSy \iff (a)\ xR_1y \text{ или} (b)\ \exists z(xR_1z \text{ и } yR_1z) \text{ или } (c)\ \exists z(zR_1x \text{ и } zR_1y).$$

Будем рассматривать фреймы со следующими условиями:

(1) для любых x,$y \in X$ верно: xRy или yRx;

(2) R является транзитивным отношением;

(3) R является рефлексивным отношением;

(4) $xR_1y \Longrightarrow xRy$;

(5) если zR_1x и zR_1y, то yRx и xRy;
(6) если xR_1z и yR_1z, то yRx и xRy;
(7) для каждого $x \in X$ существует $y \in X$ такой, что xR_1y;
(8) $xRy \Longrightarrow (x = y$ или существуют $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что $x = x_1S \dots Sx_nSy)$.

То, что существуют $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что $x = x_1S \dots Sx_nSy$ обозначим более коротко через xS^ny. Таким образом, свойство (8) означает, что выполнено $R \subseteq S^*$, где S^* — рефлексивное, транзитивное замыкание отношения S. Кроме того, из свойств (4)–(6) получаем, что $S \subseteq R$. Отсюда по рефлексивности и танзитивности отношения R имеем: $S^* \subseteq R$. Таким образом, верно следующее

Замечание. *Если фрейм удовлетворяет свойствам (2)–(6), (8), то* $R = S^*$.

Если фрейм $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$ удовлетворяет условиям (1)–(8), будем называть его *линейным по времени* $(S \subseteq R)Ind$*-фреймом.* Модель $\langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, основанную на таком фрейме, будем соответственно называть *линейной по времени* $(S \subseteq R)Ind$*-моделью.*

Введем кроме того понятие линейного по времени $(S \subseteq R)$-фрейма. Тройку $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$ будем называть *линейным по времени* $(S \subseteq R)$*-фреймом*, если она удовлетворяет свойствам (1)–(7). Модель, основанную на линейном по времени $(S \subseteq R)$-фрейме назовем *линейной по времени* $(S \subseteq R)$*-моделью.*

Пусть **LInd** — логическое исчисление, полученное добавлением к минимальной временной логике $K_t(R, R_1)$ [4] следующих аксиом:
(1) $\Box(\Box A_1 \longrightarrow A_2) \vee \Box(A_2 \& \Box A_2 \longrightarrow A_1)$;
(1*) $\Box^*(\Box^* A_1 \longrightarrow A_2) \vee \Box^*(A_2 \& \Box^* A_2 \longrightarrow A_1)$;
(2) $\Box A \longrightarrow \Box\Box A$;
(2*) $\Box^* A \longrightarrow \Box^*\Box^* A$;
(3) $\Box A \longrightarrow A$;
(3*) $\Box^* A \longrightarrow A$;
(4) $\Box A \longrightarrow \Box_1 A$;
(4*) $\Box^* A \longrightarrow \Box_1^* A$;
(5) $\Diamond_1 A \longrightarrow \Box_1(\Diamond A \& \Diamond^* A)$;
(6) $\Diamond_1^* A \longrightarrow \Box_1^*(\Diamond A \& \Diamond^* A)$;
(7) $\Diamond_1 \top$;
(8) $A \& \Box(A \longrightarrow (\Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A)) \longrightarrow \Box A$.

Здесь и далее $\Diamond_F$ — сокращение для $\neg\Box_F\neg$, и $\Diamond_F^*$ — сокращение для $\neg\Box_F^*\neg$ $(F \in \{R,\ R_1\})$.

Заметим, что аксиома (8) похожа на аксиому индукции, а свойство (8) очень похоже на свойство индуктивности [7], [9].

Теорема 1.1 (о корректности). *Для любой формулы A верно: если A выводима в* **LInd**, *то A общезначима в любом линейном по времени* $(S \subseteq R)Ind$*-фрейме.*

Доказательство. Общезначимость аксиом (1)–(3) и (1*)–(3*) следует из свойств линейности, транзитивности и рефлексивности отношения R соответственно. Общезначимость формул (4), (4*) следует из того, что для любых $x, y \in X$ верно: xR_1y влечет xRy.

Общезначимость аксиомы (5) следует из свойства (5): если xR_1y и xR_1z, то yRz и zRy.

Пусть $x \models \Diamond_1 A$, тогда найдется y такой, что xR_1y и $y \models A$. Выберем произвольный z такой, что xR_1z, тогда по свойству (5) выполняется yRz и zRy. Так как $y \models A$, то $z \models \Diamond A \& \Diamond^* A$. Следовательно $x \models \Box_1(\Diamond A \& \Diamond^* A)$.

Общезначимость аксиомы (6) следует из того, что если yR_1x и zR_1x, то yRz и zRy.

Общезначимость формулы (7) следует из того, что для любого x найдется y такой, что xR_1y.

Докажем общезначимость формулы (8). Пусть $x \models A$ и $x \models \Box(A \longrightarrow (\Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A))$. Пусть xRy, тогда по свойству (8) верно: xS^iy для некоторого натурального i. Докажем индукцией по i, что $y \models A$.

$i = 0$. Тогда $x = y$, и так как $x \models A$, то $y \models A$.

$i = k+1$. Пусть для любого $z \in X$ верно: если xS^kz, то $z \models A$. Предположим, что $xS^{k+1}y$, докажем, что $y \models A$. Поскольку $xS^{k+1}y$, то существует z такой, что xS^kzSy. По индукционному предположению тогда $z \models A$. Так как xS^kz и $S^* \subseteq R$, то xRz. Поскольку xRz и $x \models \Box(A \longrightarrow (\Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A))$, то $z \models A \longrightarrow (\Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A)$. Поскольку $z \models A$, то $z \models \Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A$, то есть $z \models \Box_1(A \& \Box_1^* A)$ и $z \models \Box_1^* \Box_1 A$.

Так как zSy, то возможны следующие случаи: (a) zR_1y или (b) $\exists u(zR_1u$ и $yR_1u)$ или (c) $\exists u(uR_1z$ и $uR_1y)$. Докажем, что в любом из этих случаев $y \models A$.

(a) Пусть zR_1y. Так как $z \models \Box_1(A \& \Box_1^* A)$, то $y \models A \& \Box_1^* A$, следовательно $y \models A$.

(b) Пусть существует u такой, что zR_1u и yR_1u. Так как $z \models \Box_1(A \& \Box_1^* A)$, то $u \models A \& \Box_1^* A$, следовательно $u \models \Box_1^* A$. Так как yR_1u, то $y \models A$.

(c) Пусть найдется u такой, что uR_1z и uR_1y. Поскольку $z \models \Box_1^* \Box_1 A$, то $u \models \Box_1 A$. Так как uR_1y, то $y \models A$.

Таким образом, общезначимость формулы (8) в любом линейном по времени $(S \subseteq R)Ind$-фрейме доказана. $\Box$

Пусть X_{LInd} - множество полных **LInd**-непротиворечивых **LInd**-теорий. Определим отношения R, R_1 на множествеX_{LInd} следующим образом

$$x_1 R x_2 \Longleftrightarrow \{A : \ \Box A \in x_1\} \subseteq x_2,$$

$$x_1 R_1 x_2 \Longleftrightarrow \{A : \ \Box_1 A \in x_1\} \subseteq x_2 \ .$$

Замечание [4]. $x_1 R x_2 \Longleftrightarrow \{A : \ \Box_R^* A \in x_2\} \subseteq x_1$.

Определение [4]. Рассмотрим модель $M_{LInd} = \langle X_{LInd}, \ R, \ R_1, \ \models_{LInd} \rangle$, где полагаем $x \models_{LInd} p \Longleftrightarrow p \in x$ для любой переменной p и любого элемента $x \in X_{LInd}$. Назовем M_{LInd} *канонической моделью* исчисления **LInd**.

Теорема 1.2. *Каноническая модель M_{LInd} для* **LInd** *удовлетворяет условиям:*

(M1) если tRx, tRy, то xRy или yRx;
если xRt, yRt, то xRy или yRx;
(M2) R является транзитивным отношением;
(M3) R является рефлексивным отношением;
(M4) $xR_1y \Longrightarrow xRy$;
(M5) если xR_1y и xR_1z, то yRz и zRy;
(M6) если yR_1x и zR_1x, то yRz и zRy;
(M7) для каждого $x \in X_{LInd}$ существует $y \in X_{LInd}$ такой, что xR_1y.

Доказательство. Свойства (M 1)-(M 4) доказываются стандартным образом из соответствующих аксиом исчисления **LInd** [4].

Докажем, что если xR_1y и xR_1z, то yRz и zRy. Предположим противное: пусть xR_1y, xR_1z и не верно, что yRz и zRy.

Если не верно, что yRz, то существует формула C такая, что $\Box^*C \in z$ и $\neg C \in y$. Так как $\neg C \in y$ и xR_1y, то $\Diamond_1\neg C \in x$. Следовательно по аксиоме (5) $\Box_1(\Diamond\neg C \& \Diamond^*\neg C) \in x$. Поскольку xR_1z, то $\Diamond\neg C \& \Diamond^*\neg C \in z$. Но $\Box^*C \in z$, следовательно $\Diamond^*\neg C \notin z$. Таким образом получаем противоречие, и наше предположение не верно.

Если не выполняется, что zRy, то существует формула D такая, что $\Box D \in z$ и $\neg D \in y$. Так как $\neg D \in y$ и xR_1y, то $\Diamond_1\neg D \in x$. Следовательно по аксиоме (5) $\Box_1(\Diamond\neg D \& \Diamond^*\neg D) \in x$. Поскольку xR_1z, то $\Diamond\neg D \& \Diamond^*\neg D \in z$. Но $\Box D \in z$, то есть $\Diamond\neg D \notin z$. Таким образом и в этом случае получаем противоречие, и наше предположение не верно.

Утверждение пункта (M 6) доказывается аналогично, с использованием аксиомы (6).

Докажем, что каноническая модель для **LInd** обладает свойством (M 7). Пусть $x \in X_{LInd}$ и $s = \{A \mid \Box_1 A \in x\}$.

Докажем, что множество s является непротиворечивым. Предположим противное, тогда существуют формулы $A_1, \ldots, A_n$, такие, что $\Box_1 A_i \in x$, $i = 1, \ldots, n$, и в исчислении **LInd** выводится следующая формула:

$$A_1 \& \ldots \& A_n \longrightarrow \neg\top.$$

Следовательно, в **LInd** выводится формула:

$$\Box_1 A_1 \& \ldots \& \Box_1 A_n \longrightarrow \Box_1\neg\top.$$

Так как $\Box_1 A_i \in x$ $(i = 1, \ldots, n)$, то $\Box_1\neg\top \in x$, то есть $\Diamond_1\top \notin x$, что противоречит аксиоме (7). Следовательно множество s является непротиворечивым, и множество s можно расширить до **LInd**-непротиворечивой полной **LInd**-теории $y \in X_{LInd}$. Из определения отношения R_1 в канонической модели следует, что xR_1y.

$\Box$

2. Линейная по времени $(S \subseteq R)$-подмодель.

Цель этого раздела — доказать следующую теорему:

Теорема 2.1. *Если формула A истинна во всех линейных по времени $(S \subseteq R)$-моделях, то A выводима в исчислении* **LInd**.

Доказательство. Заметим, что каноническая модель не является линейной по времени $(S \subseteq R)$-моделью, так как она не удовлетворяет условию (1) определения линейной по времени $(S \subseteq R)$-модели. Выберем специальным образом подмодель M' канонической модели так, чтобы невыводимая в **LInd** формула A_0 опровергалась в выбранной модели M', и модель M' являлась линейной по времени $(S \subseteq R)$-моделью.

Если формула A_0 невыводима в исчислении **LInd**, то существует элемент t канонической модели $M_{LInd} = \langle X, R, R_1, \models\rangle$ такой, что $t \not\models A_0$.

Рассмотрим множество $Sub(A_0)$ подформул формулы A_0. Можем считать, что A_0 содержит модальности только вида $\Diamond$, $\Diamond^*$ и $\Diamond_1$, $\Diamond_1^*$, так как $\Box$, $\Box^*$ и $\Box_1$,

$\Box_1^*$ выражаются через $\Diamond$, $\Diamond^*$ и $\Diamond_1$, $\Diamond_1^*$ соответственно. Выбираем элементы из X следующим образом:

Шаг 0. Сначала проверяем на элементе t истинность всех формул из множества $Sub(A_0)$. Если $t \models \Diamond B_i$, где $\Diamond B_i \in Sub(A_0)$, то существуют $x_i \in X$ такие, что tRx_i и $x_i \models B_i$. Если $t \models \Diamond_1 C_j$, где $\Diamond_1 C_j \in Sub(A_0)$, то существуют $y_j \in X$ такие, что $tR_1 y_j$ и $y_j \models C_j$.

Если $t \models \Diamond^* D_l$, где $\Diamond^* D_l \in Sub(A_0)$, то существуют $x'_l \in X$ такие, что $x'_l Rt$ и $x'_l \models D_l$. Если $t \models \Diamond_1^* F_k$, где $\Diamond_1^* F_k \in Sub(A_0)$, то существуют $y'_k \in X$ такие, что $y'_k R_1 t$ и $y'_k \models F_k$.

Добавляем к t элементы $x_i,\ x'_l,\ y_j,\ y'_k$, и таким образом формируем множество $X^{(0)} \subseteq X$.

Шаг 1. На следующем шаге добавляем к $X^{(0)} \subseteq X$ недостающие элементы. Рассмотрим произвольный $x \in X^{(0)}$. По свойству (M 7) канонической модели существует $y \in X$ такой, что $xR_1 y$. Для каждого $x \in X^{(0)}$ добавляем y к элементам множества $X^{(0)}$, если его там не было.

Таким образом сформируем множество $X^{(1)}$. Заметим, что $X^{(0)} \subseteq X^{(1)}$, и для всех x из $X^{(0)}$ найдется $y \in X^{(1)}$ такой, что $xR_1 y$.

Пусть множество $X^{(i-1)}$ построено, $i = 2k$.

Шаг $i = 2k$. На элементах множества $X^{(i-1)}$ проверяем истинность всех формул из $Sub(A_0)$, начинающихся с $\Diamond$, $\Diamond^*$, $\Diamond_1$, $\Diamond_1^*$. Добавляя к $X^{(i-1)}$ нужные элементы формируем множество $X^{(i)}$.

Шаг $i + 1 = 2k + 1$. На нечетном шаге формируем множество $X^{(i+1)}$, рассматривая все $x \in X^{(i)}$ и добавляя недостающие элементы (как на шаге 1). Заметим, что для любого x из $X^{(i)}$ в $X^{(i+1)}$ найдется y такой, что $xR_1 y$.

Пусть $X' = \bigcup\limits_{i \in N} X^{(i)}$, $R' = R|_{X'}$, $R'_1 = R_1|_{X'}$, $\models'$ – ограничение отношения $\models$ на X'.

Заметим, что X' является не более чем счетным множеством, так как на каждом шаге добавляли не более чем счетное множество элементов из X.

Лемма 2.2 *Для любого* $x \in X'$ *и любой формулы* $B \in Sub(A_0)$ *верно*

$$x \models' B \Longleftrightarrow x \models B.$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по длине формулы B. Базис индукции очевиден.

Пусть $B = \neg B_1$, тогда $x \models B \Longleftrightarrow x \not\models B_1$. По индукционной гипотезе это равносильно $x \not\models' B_1$, т. е. $x \models' B$.

Пусть $B = B_1 \& B_2$, тогда $x \models B_1 \& B_2 \Longleftrightarrow x \models B_1$ и $x \models B_2$. По индукционной гипотезе $x \models' B_1$ и $x \models' B_2$, что равносильно $x \models' B_1 \& B_2$.

Случай, когда $B = B_1 \vee B_2$, доказывается аналогично.

Пусть $B = \Diamond C$ и $\Diamond C \in Sub(A_0)$. Предположим, что $x \models' B$. Тогда существует $y \in X'$ такой, что $xR'y$ и $y \models' C$. По индукционной гипотезе $y \models C$, следовательно $x \models \Diamond C$. Пусть $x \models' \Diamond_1 C$ и $\Diamond_1 C \in Sub(A_0)$. Тогда существует $y \in X'$ такой, что $xR'_1 y$ и $y \models' C$. По индукционной гипотезе $y \models C$, следовательно $x \models \Diamond_1 C$.

Пусть $x \models \Diamond C$ и $\Diamond C \in Sub(A_0)$. Тогда существует некоторое множество $Y \subseteq X$, такое, что xRy и $y \models C$ для любых $y \in Y$.

Так как $x \in X'$, то $x \in X^{(i)}$ для некоторого i. Поскольку $\Diamond C \in Sub(A_0)$ и $x \models \Diamond C$, то в $X^{(i+2)}$ уже найдется $y \in Y$ в случае, если i четное. Если i нечетное, то на $(i+1)$-ом шаге добавили к $X^{(i)}$ элемент $y \in Y$.

Таким образом, существует $y \in X^{(i+2)}$ (или $y \in X^{(i+1)}$), такой, что xRy и $y \models C$. По индукционной гипотезе $y \models' C$. Так как $y \in X^{(i+2)}$ (или $y \in X^{(i+1)}$), то $y \in X'$ и $xR'y$. Следовательно $x \models' \Diamond C$.

Если $x \models \Diamond_1 C$ и $\Diamond_1 C \in Sub(A_0)$, то существует некоторое множество $Y \subseteq X$, такое, что xR_1y и $y \models C$ для любых $y \in Y$.

Поскольку $x \in X'$, то $x \in X^{(i)}$ для некоторого i. Так как $\Diamond_1 C \in Sub(A_0)$ и $x \models \Diamond_1 C$, то в $X^{(i+2)}$ найдется $y \in Y$ в случае, если i четное. Если i нечетное, то на $(i+1)$-ом шаге добавили к $X^{(i)}$ элемент $y \in Y$.

Следовательно существует $y \in X^{(i+2)}$ (или $y \in X^{(i+1)}$), такой, что xR_1y и $y \models C$. По индукционной гипотезе $y \models' C$. Так как $y \in X^{(i+2)}$ (или $y \in X^{(i+1)}$), то $y \in X'$ и xR'_1y. Таким образом $x \models' \Diamond_1 C$.

Случай, когда $B = \Diamond_1^* C$, доказывается аналогично, и лемма доказана. □

Предложение 2.3. *Отношение R' является линейным, то есть выполняется следующее: $xR'y$ или $yR'x$ для любых $x, y \in X'$.*

Доказательство. Докажем индукцией по i, что для любого $i \in N$ верно: если $x, y \in X^{(i)}$, то $xR'y$ или $yR'x$.

Базис. Если $i = 0$, то данное утверждение сразу следует из свойств (M 1)–(M 4) канонической модели. При $i = 1$ утверждение также следует из построения множества $X^{(i)}$ и свойствам (M 1)–(M 4) канонической модели.

Шаг индукции. Предположим, что для любых $x, y \in X^{(i-1)}$ выполняется $xR'y$ или $yR'x$. .

Пусть $x, y \in X^{(i)}$. Если i нечетное, то множество $X^{(i)}$ получено из $X^{(i-1)}$ добавлением для каждого $x \in X^{(i-1)}$ элементов z из X таких, что xR_1z. Следовательно, по построению $X^{(i)}$, свойствам (M 1)–(M 3) отношений R, R_1 и индукционной гипотезе имеем: $xR'y$ или $yR'x$.

Пусть $x, y \in X^{(i)}$ и $i = 0(mod2)$, тогда $X^{(i)}$ получено из $X^{(i-1)}$ следующим образом: на всех элементах $z \in X^{(i-1)}$ проверяем истинность формул из $Sub(A_0)$ и добавляем недостающие элементы. Таким образом формируем множество Y_z и $X^{(i)} = X^{(i-1)} \cup \bigcup\limits_{z \in X^{(i-1)}} Y_z$.

Возможны следующие случаи:

(а) $x, y \in Y_z$ для некоторого $z \in X^{(i-1)}$. Тогда по свойствам (M 1)–(M 3) сразу получаем, что $xR'y$ или $yR'x$.

(б) $x, y \in X^{(i-1)}$. Тогда сразу из индукционного предположения получаем требуемое.

(в) $x \in X^{(i-1)}$, $y \in Y_z$ для некоторого $z \in X^{(i-1)}$. Так как $x, z \in X^{(i-1)}$, то $xR'z$ или $zR'x$ по индукционной гипотезе. Так как $y \in Y_z$, то выполняется:yRz или zRy. Следовательно, по свойствам транзитивности, праволинейности и леволинейности отношения R, имеем $xR'y$ или $yR'x$.

(г) $x \in Y_z,\ y \in Y_t$ для некоторых $z, t \in X^{(i-1)}$. Тогда выполняется: $tR'z$ или $zR't$. Кроме того $xR'z$ или $zR'x$. Аналогично так как $y \in Y_t$, то $tR'y$ или $yR't$. Следовательно $xR'y$ или $yR'x$, и предложение доказано. □

Теорема 2.4. *Выбранный фрейм $\langle X',\ R',\ R_1'\rangle$ является линейным по времени $(S \subseteq R)$-фреймом, то есть выполнены следующие свойства:*

(M1′) для любых $x,\ y \in X'$ верно, что $xR'y$ или $yR'x$;

(M2) R' является транзитивным отношением;

(M3) R' является рефлексивным отношением;

(M4) $xR_1'y \Longrightarrow xR'y$;

(M5) если $xR_1'y$ и $xR_1'z$, то $yR'z$ и $zR'y$;

(M6) если $yR_1'x$ и $zR_1'x$, то $yR'z$ и $zR'y$;

(M7) для каждого $x \in X'$ существует $y \in X'$ такой, что $xR_1'y$.

Доказательство. Свойство (M1′) следует из предложения 2.3. Свойства (M2)–(M6) следуют из определения отношений $R',\ R_1'$ и соответствующих свойств отношений $R,\ R_1$ в канонической модели.

Докажем, что выбранный фрейм удовлетворяет свойству (M7). Пусть $x \in X'$, следовательно $x \in X^{(i)}$ для некоторого i. Можно считать, что $x \notin X^{(i-1)}$, то есть элемент x добавлен на i-ом шаге.

Если i четное, то на шаге $i+1$ был добавлен элемент y такой, что xR_1y. Если i — нечетно, то на шаге $i+2$ был добавлен элемент y такой, что xR_1y.

Таким образом существует $y \in X'$ такой, что $xR_1'y$, и теорема доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 2.1. По лемме 2.2 невыводимая в исчислении **LInd** формула A_0 опровергается в построенной выше модели M'. По теореме 2.4 модель M' является линейной по времени $(S \subseteq R)$-моделью. Таким образом, теорема 2.1 доказана. □

3. Финитная аппроксимируемость

Цель этого раздела доказать, что исчисление **LInd** финитно аппроксимируемо конечными линеными по времени $(S \subseteq R)Ind$-моделями:

Теорема 3.1. *Для любой формулы A верно: формула A выводима в* **LInd** *тогда и только тогда, когда A истинна в любой конечной линейной по времени $(S \subseteq R)Ind$-модели.*

Необходимость следует из теоремы о корректности. Докажем обратное утверждение методом фильтраций.

Определение. Пусть $M = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$ — модель, Ψ — конечное множество формул, замкнутое относительно подформул. Определим на X отношение эквивалентности $\equiv_\Psi$: $x \equiv_\Psi y \Longleftrightarrow \forall B \in \Psi(x \models B \Longleftrightarrow y \models B)$. Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности, содержащий x, то есть $[x] = \{y \mid y \in X,\ x \equiv_\Psi y\}$. Пусть $X' = \{[x] \mid x \in X\}$ и $[x] \models' p \Longleftrightarrow x \models p$ для любой пропозициональной переменной p.

Пусть R' и R_1' —- бинарные отношения на X'. Тогда модель $M' = \langle X',\ R',\ R_1',\ \models'\rangle$ называется *фильтрацией M через* Ψ, если выполнено следующее:

(FRi) $xRy \Longrightarrow [x]R'[y]$;

$(FRii)$ $[x]R'[y] \Longrightarrow \forall B((\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box^* B \in \Psi$ и $y \models \Box^* B \Longrightarrow x \models B))$;

(FR_1i) $xR_1y \Longrightarrow [x]R_1'[y]$;

(FR_1ii) $[x]R_1'[y] \Longrightarrow \forall B((\Box_1 B \in \Psi$ и $x \models \Box_1 B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box_1^* B \in \Psi$ и $y \models \Box_1^* B \Longrightarrow x \models B))$.

Известны следующие факты:

Лемма о фильтрации.[3] *Пусть M' является фильтрацией M через Ψ. Тогда для любой формулы $B \in \Psi$ и любого $x \in X$ верно:*

$$[x] \models' B \Longleftrightarrow x \models B.$$

Предложение 3.2. *Пусть M' является фильтрацией M через Ψ. Тогда для любого множества $Y \subseteq X'$ существует формула A такая, что для любого $x \in X$ верно:*

$$x \models A \iff [x] \in Y.$$

Доказательство. Так как Ψ — конечное множество, то X' является конечным. Пусть $Y = \{[x_1], \dots, [x_n]\}$, сопоставим каждому x_i формулу $\&\{B_j \mid B_j \in \Psi$ и $x_i \models B_j\}\&\{\neg B_l \mid B_l \in \Psi$ и $x_i \not\models B_l\}$. Обозначим эту формулу через A_i, и пусть $A = \vee_{1 \le i \le n} A_i$.

Пусть $x \in X$ и $x \models A$, тогда $x \models A_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Докажем, что $x \equiv_\Psi x_i$ (тогда $[x] = [x_i]$, и следовательно $[x] \in Y$). Пусть $B \in \Psi$ и $x_i \models B$, тогда $x \models B$, так как $x \models A_i$. Пусть $B \in \Psi$ и $x_i \not\models B$, тогда $x \models \neg B$, поскольку $x \models A_i$, то есть $x \not\models B$. Таким образом $\forall B \in \Psi(x \models B \iff x_i \models B)$, то есть $x \equiv_\Psi x_i$.

Пусть $[x] \in Y$, тогда $[x] = [x_i]$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$, следовательно $x \equiv_\Psi x_i$. Поскольку $\forall B \in \Psi(x \models B \iff x_i \models B)$, то $x \models A_i$, следовательно $x \models A$. $\Box$

Доказательство теоремы 3.1 Пусть формула A_0 невыводима в исчислении **LInd**. Тогда она опровергается в некотором мире t канонической модели для **LInd**, следовательно в выбранной линейной по времени $(S \subseteq R)$-модели $M = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models \rangle$. Пусть Ψ — конечное множество формул, содержащее $Sub(A_0)$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1_Ψ) если $\Box A \in \Psi$, то $\Box_1 \Box A \in \Psi$ и $\Box_1^* \Box A \in \Psi$,

(2_Ψ) если $\Box^* A \in \Psi$, то $\Box_1 \Box^* A \in \Psi$ и $\Box_1^* \Box^* A \in \Psi$,

и замкнутое относительно подформул.

Построим фильтрацию M через Ψ.

Определим на множестве X' отношения R_1', R' и вспомогательные отношения R'', S следующим образом:

$[x]R_1'[y] \Longleftrightarrow \exists x' \exists y'(x \equiv_\Psi x'$ и $y \equiv_\Psi y'$ и $x' R_1 y')$,

$[x]R''[y] \Longleftrightarrow \forall \Box B \in \Psi(x \models \Box B \Longrightarrow y \models \Box B)$ и $\forall \Box^* B \in \Psi(y \models \Box^* B \Longrightarrow x \models \Box^* B)$.

$[x]R'[y] \Longleftrightarrow([x] = [y]$ или существуют $[x_1], \dots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]S \dots S[x_n]S[y])$, где отношение S определяется следующим образом: $[x_i]S[x_{i+1}] \iff (a)$ $[x_i]R_1'[x_{i+1}]$ или (b) $\exists [z]([x_i]R_1'[z]$ и $[x_{i+1}]R_1'[z])$ или (c) $\exists [z]([z]R_1'[x_i]$ и $[z]R_1'[x_{i+1}])$.

Предложение 3.3. (1) R'' является транзитивным отношением;

(2) R'' является рефлексивным отношением;

(3) $[x]R_1'[y] \Longrightarrow [x]R''[y]$;

(4) если $[z]R'_1[x]$ и $[z]R'_1[y]$, то $[x]R''[y]$ и $[y]R''[x]$;
(5) если $[x]R'_1[z]$ и $[y]R'_1[z]$, то $[x]R''[y]$ и $[y]R''[x]$.

Доказательство. (1) Докажем, что R'' является транзитивным отношением.

Пусть $[x]R''[y]$ и $[y]R''[z]$, докажем, что $[x]R''[z]$. Для этого необходимо показать, что для любой формулы $\Box B \in \Psi$ ($x \models \Box B \Longrightarrow z \models \Box B$) и для любой $\Box^* B \in \Psi(z \models \Box^* B \Longrightarrow x \models \Box^* B)$. Пусть $\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B$. Так как $[x]R''[y]$, то $y \models \Box A$. Отсюда, поскольку $[y]R''[z]$, имеем $z \models \Box A$. Для формулы $\Box^* B \in \Psi$ доказательство аналогичное. Таким образом $[x]R''[z]$.

(2) Рефлексивность отношения R'' следует из рефлексивности отношения R и аксиом $(2), (2^*)$, $(3), (3^*)$.

(3) Докажем, что если $[x]R'_1[y]$, то $[x]R''[y]$. Пусть $\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B$, докажем, что $y \models \Box A$. Так как $[x]R'_1[y]$, то существуют x', y' такие, что $x \equiv_\Psi x'$, $y \equiv_\Psi y'$ и $x'R_1y'$. По пункту (M 4) теоремы 2.4 тогда $x'Ry'$. Так как $\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B$, то $x' \models \Box B$. Тогда по аксиоме (2) $x' \models \Box\Box B$, следовательно $y' \models \Box B$. Таким образом $y \models \Box B$. Для формулы $\Box^* B \in \Psi$ доказательство аналогичное, с помощью аксиомы (2^*).

(4) Докажем, что если $[z]R'_1[x]$ и $[z]R'_1[y]$, то $[x]R''[y]$ и $[y]R''[x]$. Пусть $\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B$, докажем, что $y \models \Box B$. Так как $[z]R'_1[x]$, то $\exists z' \exists x'(z \equiv_\Psi z'$ и $x \equiv_\Psi x'$ и $z'R_1x')$. Так как $\Box B \in \Psi$, то $x' \models \Box B$, следовательно по аксиоме (2) имеем: $x' \models \Box\Box B$. Поскольку $z'R_1x'$, то $z' \models \Diamond_1\Box\Box B$. Заметим, что формула $\Diamond_1\Box A \longrightarrow \Box_1 A$ выводима в исчислении **LInd** из аксиомы (5), следовательно $z' \models \Box_1\Box B$. Так как $[z]R'_1[y]$, то $\exists z'' \exists y'(z \equiv_\Psi z''$ и $y \equiv_\Psi y'$ и $z''R_1y')$. По условию (1_Ψ) на множество Ψ имеем, что $\Box_1\Box B \in \Psi$. Отсюда получаем, что $z'' \models \Box_1\Box B$, так как $z \equiv_\Psi z''$. Поскольку $z''R_1y'$, то $y' \models \Box B$, следовательно $y \models \Box B$.

Пусть $\Box^* B \in \Psi$ и $y \models \Box B$, докажем, что $x \models \Box^* B$. Так как $[z]R'_1[y]$, то $\exists z' \exists y'(z \equiv_\Psi z'$ и $y \equiv_\Psi y'$ и $z'R_1y')$. Так как $\Box^* B \in \Psi$, то $y' \models \Box^* B$, следовательно по аксиоме (2^*) имеем: $y' \models \Box^*\Box^* B$. Поскольку $z'R_1y'$, то $z' \models \Diamond_1\Box^*\Box^* B$. Заметим, что формула $\Diamond_1\Box^* A \longrightarrow \Box_1 A$ выводима в исчислении **LInd** из аксиомы (5), следовательно $z' \models \Box_1\Box^* B$. Так как $[z]R'_1[x]$, то $\exists z'' \exists x'(z \equiv_\Psi z''$ и $x \equiv_\Psi x'$ и $z''R_1x')$. По условию (2_Ψ) на множество Ψ имеем, что $\Box_1\Box^* B \in \Psi$. Отсюда получаем, что $z'' \models \Box_1\Box^* B$, так как $z \equiv_\Psi z''$. Поскольку $z''R_1x'$, то $x' \models \Box^* B$, следовательно $x \models \Box^* B$.

Таким образом получили, что для любой формулы $\Box B \in \Psi$ верно: если $x \models \Box B$, то $y \models \Box$. Кроме того, для любой формулы $\Box^* B \in \Psi$: если $y \models \Box^* B$, то $x \models \Box^* B$. Следовательно $[x]R''[y]$. Доказательство того, что $[y]R''[x]$ проводится аналогично, заменяя x на y, y на x. Таким образом, если $[z]R'_1[x]$ и $[z]R'_1[y]$, то $[x]R''[y]$ и $[y]R''[x]$.

(5) Пусть $[x]R'_1[z]$ и $[y]R'_1[z]$, докажем, что $[x]R''[y]$ и $[y]R''[x]$.

Пусть $\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B$, докажем, что $y \models \Box B$. Так как $[x]R'_1[z]$, то $\exists z' \exists x'(z \equiv_\Psi z'$ и $x \equiv_\Psi x'$ и $x'R_1z')$. Так как $\Box B \in \Psi$, то $x' \models \Box B$, следовательно по аксиоме транзитивности (2) имеем: $x' \models \Box\Box B$. Поскольку $x'R_1z'$, то $z' \models \Diamond_1^*\Box\Box B$. Заметим, что формула $\Diamond_1^*\Box A \longrightarrow \Box_1^* A$ выводима в исчислении **LInd** из аксиомы (6), следовательно $z' \models \Box_1^*\Box B$. Так как $[y]R'_1[z]$, то $\exists z'' \exists y'(z \equiv_\Psi z''$ и $y \equiv_\Psi y'$ и $y'R_1z'')$. По условию (1_Ψ) на множество Ψ имеем, что $\Box_1^*\Box B \in \Psi$. Отсюда получаем, что $z'' \models \Box_1^*\Box B$, так как $z \equiv_\Psi z''$. Поскольку $y'R_1z''$, то $y' \models \Box B$, следовательно $y \models \Box B$.

Пусть $\Box^* B \in \Psi$ и $y \models \Box^* B$, докажем, что $x \models \Box^* B$. Так как $[y]R'_1[z]$, то $\exists z' \exists y'(z \equiv_\Psi z'$ и $y \equiv_\Psi y'$ и $y'R_1z')$. Так как $\Box^* B \in \Psi$, то $y' \models \Box^* B$, следовательно по аксиоме (2^*) имеем: $y' \models \Box^*\Box^* B$. Поскольку $y'R_1z'$, то $z' \models \Diamond_1^*\Box^*\Box^* B$. Заметим, что формула $\Diamond_1^*\Box^* A \longrightarrow \Box_1^* A$ выводима в исчислении **LInd** из аксиомы (6), следовательно $z' \models \Box_1^*\Box^* B$. Так как $[x]R_1'[z]$, то $\exists z''\exists x'(z \equiv_\Psi z''$ и $x \equiv_\Psi x'$ и $x'R_1z'')$. По условию (2_Ψ) на множество Ψ имеем, что $\Box_1^*\Box^* B \in \Psi$. Отсюда получаем, что $z'' \models \Box_1^*\Box^* B$, так как $z \equiv_\Psi z''$. Поскольку $x'R_1z''$, то $x' \models \Box^* B$, следовательно $x \models \Box^* B$.

Следовательно $[x]R''[y]$. Доказательство того, что $[y]R''[x]$ проводится аналогично, заменяя x на y, и y на x.

Таким образом, если $[x]R_1'[z]$ и $[y]R_1'[z]$, то $[x]R''[y]$ и $[y]R''[x]$.

$\Box$

Заметим, что из пунктов (3)–(5) предложения 3.3 получаем, что $S \subseteq R''$. Из транзитивности и рефлексивности отношения R'' тогда следует, что если $[x]S^n[y]$, то $[x]R''[y]$. Таким образом из определения отношения R' можно получить следующее следствие:

Следствие. Если $[x]R'[y]$, то $[x]R''[y]$.

Предложение 3.4. *Модель $M' = \langle X',\ R',\ R_1',\ \models' \rangle$ является фильтрацией M через Ψ.*

Доказательство. Проверим свойства фильтрации:

(FRi) $xRy \Longrightarrow [x]R'[y]$;

$(FRii)$ $[x]R'[y] \Longrightarrow \forall B((\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box^* B \in \Psi$ и $y \models \Box^* B \Longrightarrow x \models B))$;

(FR_1i) $xR_1y \Longrightarrow [x]R_1'[y]$;

(FR_1ii) $[x]R_1'[y] \Longrightarrow \forall B((\Box_1 B \in \Psi$ и $x \models \Box_1 B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box_1^* B \in \Psi$ и $y \models \Box_1^* B \Longrightarrow x \models B))$.

Заметим, что отношения R_1' и R'' удовлетворяют соответствующим свойствам [4].

Докажем, что выполняется свойство $(FRii)$. Пусть $[x]R'[y]$, тогда из следствия имеем: $[x]R''[y]$. Так как отношение R'' удовлетворяет свойству $(FRii)$, то требуемое доказано.

Докажем, что модель M' удовлетворяет свойству (FRi). Пусть xRy, докажем, что $[x]R'[y]$. Необходимо доказать, что $[x] = [y]$ или существуют $[x_1], \ldots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]S \ldots S[x_n]S[y]$. Пусть $Y = \{[t] \mid [x]S^*[t]\}$, докажем $[y] \in Y$.

По предложению 3.2 существует формула A такая, что для любого $t \in X$ верно: $t \models A \iff [t] \in Y$. Таким образом достаточно доказать, что $y \models A$.

Замечание. $x \models A$ *и* $x \models \Box(A \longrightarrow (\Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A))$.

Доказательство. Имеем $x \models A$, так как $[x] \in Y$.

Докажем, что $x \models \Box(A \longrightarrow (\Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A))$. Пусть t такой, что xRt и $t \models A$. Требуется доказать, что $t \models \Box_1(A \& \Box_1^* A) \& \Box_1^* \Box_1 A$. Докажем сначала, что $t \models \Box_1(A \& \Box_1^* A)$. Пусть $u,\ v \in X$ такие, что tR_1u и vR_1u, докажем, что $u \models A$ и $v \models A$. Так как $t \models A$, то $[t] \in Y$, следовательно $[x]S^m[t]$ для некоторого m, то есть $[x] = [t]$ или существуют $[x_1], \ldots, [x_m] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]S \ldots S[x_m]S[t]$. Поскольку tR_1u, то $[t]R_1'[u]$, следовательно $[t]S[u]$. Таким образом из $[x]S^m[t]$ и $[t]S[u]$ имеем, что, $[x]S^{m+1}[u]$, следовательно $[x]S^*[u]$, то есть $[u] \in Y$. Таким образом $u \models A$.

Так как vR_1u, то $[v]R_1'[u]$. Вместе с $[t]R_1'[u]$ это дает, что $[t]S[v]$. Таким образом из $[x]S^m[t]$, $[t]S[v]$ имеем, что, $[x]S^{m+1}[v]$, следовательно $[v] \in Y$. Таким образом $v \models A$.

Докажем теперь, что $t \models \Box_1^*\Box_1 A$. Пусть $z,\ w \in X$ такие, что zR_1t и zR_1w. Докажем, что $w \models A$, то есть $[w] \in Y$. Так как zR_1t и zR_1w, то $[z]R_1'[t]$ и $[z]R_1'[w]$, следовательно $[t]S[w]$. Отсюда, поскольку $[x]S^m[t]$, имеем $[x]S^{m+1}[w]$. Таким образом $[w] \in Y$, и замечание доказано. $\Box$

Продолжим доказательство свойства (FRi). По замечанию $x \models A$ и $x \models \Box(A \longrightarrow (\Box_1(A\&\Box_1^*A)\&\Box_1^*\Box_1 A))$, следовательно по аксиоме (8) имеем $x \models \Box A$. Так как xRy, то $y \models A$, что и требовалось. $\Box$

Таким образом, из предложения 3.4 и леммы о фильтрации получаем, что невыводимая в исчислении **LInd** формула A_0 опровергается в построенной выше фильрации $M' = \langle X',\ R_1',\ R',\ \models' \rangle$. Для доказательства теоремы 3.1 осталось доказать следующее утверждение:

Теорема 3.5. *Модель* $M' = \langle X',\ R_1',\ R',\ \models' \rangle$ *является линейной по времени* $(S \subseteq R)Ind$*-моделью.*

Доказательство. Проверим, что фрейм $\langle X',\ R_1',\ R',\ \models' \rangle$ удовлетворяет всем свойствам определения линейного по времени $(S \subseteq R)Ind$-фрейма.

(1) Так как M' является фильтрацией линейной по времени $(S \subseteq R)$-модели $M = \langle X,\ R_1,\ R,\ \models \rangle$, то для любых $x,\ y \in X$ верно: xRy или yRx. Следовательно по свойству (FRi) имеем, что для любых $[x],\ [y] \in X'$ верно: $[x]R'[y]$ или $[y]R'[x]$.

(2) Докажем, что R' является транзитивным отношением. Пусть $[x]R'[y]$ и $[y]R'[z]$. Тогда $[x]S^n[y]$ и $[y]S^m[z]$ для некоторых $n,\ m$. Следовательно $[x]S^{n+m}[y]$. Таким образом верно, что $[x]R'[z]$.

(3) Отношение R' является рефлексивным по определению.

(4) Из определения отношения R' сразу следует, что если $[x]R_1'[y]$, то $[x]R'[y]$.

(5) Пусть $[z]R_1'[x]$ и $[z]R_1'[y]$, докажем, что $[x]R'[y]$ и $[y]R'[x]$.

Заметим, что если $[z]R_1'[x]$ и $[z]R_1'[y]$, то $[x]S[y]$ и $[y]S[x]$. По определению отношения R' это дает $[x]R'[y]$ и $[y]R'[x]$.

(6) Пусть $[x]R_1'[z]$ и $[y]R_1'[z]$, докажем, что $[x]R'[y]$ и $[y]R'[x]$.

Пусть $[x]R_1'[z]$ и $[y]R_1'[z]$, тогда $[x]S[y]$ и $[y]S[x]$. Тогда по определению отношения R' получаем, что $[x]R'[y]$ и $[y]R'[x]$.

(7) Свойство (7) сразу следует из пункта (M 7) теоремы 2.4 и (FR_1i).

Свойство (8) линейной по времени $(S \subseteq R)Ind$-фрейма сразу следует из определения отношения R'. $\Box$

В заключение заметим, что поскольку исчисление **LInd** финитно аппроксимируемо (конечными линейными по времени $(S \subseteq R)Ind$-моделями) и конечно аксиоматизируемо, то оно разрешимо.

4. Слабая модальность

Рассмотрим фреймы вида $\langle X,\ R,\ R_1 \rangle$, где $X = \bigcup_{i \in N} C(i)$ [6]. Здесь N — множество натуральных чисел, каждое $C(i)$ — непустое множество элементов ("все возможные состояния в момент времени i ".) Отношения $R,\ R_1$ — бинарные отношения на множестве X такие, что для любых $x,\ y \in X$ верно:

$$xRy \iff x \in C(i), y \in C(j) \text{ и } i \leq j;$$

$$xR_1y \iff x \in C(i) \text{ и } y \in C(i+1).$$

Таким образом каждое множество $C(i)$ является R-кластером, то есть для $x \in C(i)$: $C(i) = \{y \mid xRy \text{ и } yRx\}$. Заметим, что фреймы $\langle \bigcup_{i \in N} C(i),\ R,\ R_1 \rangle$ являются линейными по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймами.

В [6] В.В. Рыбаковым рассматривается полимодальный язык с временными модальными операторами $\Box$, $\Box^*$, связанными с отношение R, и слабыми модальностями $\Box_w$, $\Box_w^*$:

$$x \models \Box A \iff \forall y(xRy \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box^* A \iff \forall y(yRx \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box_w A \iff \forall i[x \in C(i) \Longrightarrow (\forall j \geq i \exists y \in C(j)(y \models A))],$$

$$x \models \Box_w^* A \iff \forall i[x \in C(i) \Longrightarrow (\forall j \leq i \exists y \in C(j)(y \models A))].$$

Добавим в язык модальные операторы $\Box_1$, $\Box_1^*$, связанные с отношением R_1. Тогда можно доказать, что слабые модальности выражаются через другие:

Предложение 4.1. *Следующие формулы общезначимы в рассматриваемых фреймах:*

$$\Box_w A \longleftrightarrow \Diamond_1 \Diamond_1^* A \& \Box \Diamond_1 A;$$

$$\Box_w^* A \longleftrightarrow \Diamond_1 \Diamond_1^* A \& \Box^* (\Diamond_1^* A \vee \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A).$$

Доказательство. Пусть $x \in C(i)$ и $x \models \Box_w A$, тогда $(\forall j \geq i \exists y \in C(j)(y \models A))$. Докажем, что $x \models \Box \Diamond_1 A$. Пусть $z \in X$ и xRz. Тогда по определению отношения R имеем, что $z \in C(j)$ для некоторого $j \geq i$. Так как $i \leq j$, то $y \in C(j+1)$ такой, что $y \models A$. То есть существует $y \in X$ такой, что zR_1y и $y \models A$. Следовательно $z \models \Diamond_1 A$. Таким образом $x \models \Box \Diamond_1 A$.

Докажем, что $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A \vee A$. Так как найдется $y \in C(i)$ такой, что $y \models A$, то существует $z \in C(i+1)$ такой, что $z \models \Diamond_1^* A$. Поскольку $x \in C(i)$ и $z \in C(i+1)$, то xR_1z. Таким образом $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A$.

Докажем теперь, что $\Diamond_1 \Diamond_1^* A \& \Box \Diamond_1 A \longrightarrow \Box_w A$. Пусть $x \in C(i)$ и $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A \& \Box \Diamond_1 A$. Докажем, что $(\forall j \geq i) \exists y \in C(j)(y \models A)$.

По предположению имеем $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A$. Тогда существуют $z \in C(i+1)$ и y такие, что yR_1z и $y \models A$. Следовательно, найдется y такой, что $y \in C(i)$ и $y \models A$.

Так как $x \models \Box \Diamond_1 A$, то для любого z: если xRz, то $z \models \Diamond_1 A$. То есть существует y такой, что zR_1y и $y \models A$. По определению отношений R, R_1 имеем, что если xRz, то $z \in C(j)$ для некоторого $j \geq i$, и $y \in C(j+1)$. Поскольку такой y найдется для любого z такого, что xRz, то $(\forall j > i+1) \exists y \in C(j)(y \models A)$.

Таким образом, суммируя вышедоказанное, получаем $(\forall j \geq i) \exists y \in C(j)(y \models A)$, то есть $x \models \Box_w A$.

Докажем, что $\Box_w^* A \longrightarrow \Diamond_1 \Diamond_1^* A \& \Box^* (\Diamond_1^* A \vee \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A)$.

Пусть $x \in C(i)$ и $x \models \Box_w^* A$, тогда $(\forall j \leq i) \exists y \in C(j)(y \models A)$. Так как существует $y \in C(i)$ такой, что $y \models A$, то $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A$. Докажем, что $x \models \Box^* (\Diamond_1^* A \vee \Box_1^* \bot \& A)$. Пусть zRx, тогда $z \in C(k)$ для некоторого $k \leq i$.

Рассмотрим случай, когда $k > 0$. Так как найдется $y \in C(k-1)$ такой, что $y \models A$, то $z \models \Diamond_1^* A$.

Пусть $k = 0$, то есть $z \in C(0)$. Следовательно $z \models \Box_1^* \bot$ (иначе, если $z \not\models \Box_1^* \bot$, то $z \models \Diamond_1^* \top$, следовательно существует $z' R_1 z$). Так как найдется $y \in C(0)$ такой, что $y \models A$, то $z \models \Diamond^* A$. В итоге получаем, что $z \models \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A$.

Докажем теперь обратную импликацию. Пусть $x \in C(i)$ и $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A \& \& \Box^* (\Diamond_1^* A \vee \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A)$. Докажем, что $x \models \Box_w^* A$.

Возможны два случая: $i = 0$ или $i > 0$.

Пусть $i = 0$. Так как $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A$, то существуют $y,\ z$ такие, что $x R_1 z$, $y R_1 z$ и $y \models A$. Следовательно, найдется $y \in C(0)$ такой, что $y \models A$.

Пусть $i > 0$. Возьмем произвольный j такой, что $0 \leq j \leq i$. Существование $y \in C(i)$ такого, что $y \models A$ следует из $x \models \Diamond_1 \Diamond_1^* A$. Пусть $z \in C(j)$. Так как для любого $z \in C(j)$ верно, что zRx, то $z \models \Diamond_1^* A \vee \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A$, поскольку $x \models \Box^* (\Diamond_1^* A \vee \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A)$. Если $z \models \Diamond_1^* A$, то существует $y \in C(j-1)$ такой, что $y \models A$. Пусть $z \models \Box_1^* \bot \& \Diamond^* A$. Тогда $z \in C(0)$ (иначе существует z' такой, что $z' R_1 z$, следовательно $z \models \Diamond_1^* \top$, что противоречит $z \models \Box_1^* \bot$). Так как $z \models \Diamond^* A$, то существует yRz такой, что $y \models A$. Поскольку $z \in C(0)$, то $y \in C(0)$. Таким образом показали, что $(\forall j (0 \leq j \leq i \Longrightarrow \exists y \in C(j)(y \models A.))$

$\square$

Список литературы

[1] А.В. Кудинов, *Топологические модальные логики с модальностью неравенства: Дис. к-та физ.-мат. наук.* М., 2008.

[2] В.Б. Шехтман, *Модальные логики топологических пространств: Дис. д-ра физ.-мат. наук.* М., 1999.

[3] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal logics*, Oxford Logic Guides **35**, Oxford, Clarendon Press, 1977.

[4] D. Gabbay, I. Hodkinson, M.Reynolds, *Temporal logic*, Oxford University Press, 1994.

[5] F. Kröger, *Temporal logic of programs*, Springer, 1987.

[6] V.Rybakov,*Discrete linear temporal logic with current time point clasters, deciding algorithms*, Logic and Logic Philosophy, **17**: 1–2, 2008.

[7] K. Segerberg, *The Logic of Deliberate Action*, Journal of Philosophical Logic **11**: 2, 1982.

[8] D.Vakarelov, *Modal logics for Knowledge Representation Systems*, Preprint №7, Sofia Univ., 1988.

[9] D.Vakarelov, *Inductive Modal Logics*, Fundamenta Informaticae **16**(1992), 383-405.

Вета Федоровна Юн
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: veta_v@mail.ru