S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 6, стр. 191–198 (2009) УДК 519.214.4
MSC 60F10

ОЦЕНКИ ТИПА БЕРРИ - ЭССЕЕНА ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ПРИ НАРУШЕНИИ УСЛОВИЯ КРАМЕРА

А. И. САХАНЕНКО

Abstract. Two-sided estimates for probabilities of large deviations for sums of independent random variables with finite variances are obtained. All asymptotics of the probabilities are described in terms of deviation function $\Lambda(x, y)$ of a sum of truncated random variables. All error terms are explicitly estimated by a modified Lyapunov ratio $L(H(x), y)$.

Keywords: probabilities of large deviations, deviation function, Lyapunov ratio.

1. Введение и основные результаты

Пусть нам дана последовательность $X_1, ..., X_n$, состоящая из независимых случайных величин, причем

$$\forall j \quad \mathbf{E}X_j = 0, \qquad 0 < B^2 = \sum \mathbf{D}X_j < \infty, \qquad S = \sum X_j. \tag{1}$$

Подчеркнем, что в (1) и далее символ $\sum$ без индексов означает, что суммирование ведется по переменной j, пробегающей значения от 1 до n. Введем в рассмотрение еще срезанные случайные величины

$$X_j(y) = \min\{X_j, y\}, \qquad S(y) = \sum X_j(y) \tag{2}$$

и определим функцию уклонений сумм срезанных величин

$$\Lambda(x, y) = \sup_h [xh - \ln \mathbf{E}e^{hS(y)}]. \tag{3}$$

Sakhanenko, A.I., Estimates of Berry - Esseen type for probabilities of large deviations under violation of Cramér condition.

Работа поддержана РФФИ (грант 07-01-00595).

Поступила 20 декабря 2008 г., опубликована 15 июля 2009 г.

При $h \ge 0$ положим

$$L(h,y) = \sum L_j(h,y), \quad \text{где} \quad L_j(h,y) = \mathbf{E}\big[|X_j(y)|^3 e^{hX_j(y)^+}\big]. \tag{4}$$

Наша цель — получить достаточно точные оценки для $\mathbf{P}(S \ge x)$, которыми было бы удобно пользоваться при больших значениях x. При выполнении условия Крамера такого рода результаты получены целым рядом авторов (см., ссылки, например в [1] и [2]).

Если же условие Крамера не выполнено, то представляется естественным ввести срезки и получить сначала оценки для $\mathbf{P}(S(y) \ge x)$, а уже потом из них извлечь оценки для $\mathbf{P}(S \ge x)$. Однако введение срезок приводит к необходимости проверять большое число дополнительных условий, что всегда хлопотно, а зачастую и трудно. В данной же работе предлагаются такие оценки для вероятностей $\mathbf{P}(S(y) \ge x)$, в которых все условия и все оценки для погрешностей явно и просто выражаются в терминах ровно одной числовой характеристики — $L(h,y)$, а асимптотика этих вероятностей зависит только от функции $\Lambda(x,y)$. Отметим, что величина $L(h,\infty)$ появилась в работе автора [3], как естественная мажоранта отношения Ляпунова для случайных величин, появляющихся при использовании классического преобразования Крамера.

Сформулируем теперь основной результат работы. Нам потребуются следующие характеристики нормального распределения

$$\varphi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}, \qquad \bar{\Phi}(x) = \int_x^\infty \varphi(t)dt.$$

Теорема. *Предположим, что числа x и y удовлетворяют следующему условию*

$$y \ge B, \quad x \ge 0, \quad 4(B+8x)L(H,y) \le B^4, \tag{5}$$

где $H = H(x) = (2x+B)/B^2$. Тогда

$$\mathbf{P}(S(y) \ge x) = \bar{\Phi}\big(\sqrt{2\Lambda(x,y)}\big) + \delta_0(x,y)\varphi\big(\sqrt{2\Lambda(x,y)}\big), \tag{6}$$

$$\mathbf{P}(S(y) \ge x) = e^{\gamma(x,y)}\big[\bar{\Phi}(x/B) + \delta(x,y)\varphi(x/B)\big], \tag{7}$$

где

$$|\delta_0(x,y)| \le 41L(H,y)/B^3, \quad |\delta(x,y)| \le 46L(H,y)/B^3, \tag{8}$$

$$\gamma(x,y) = (x/B)^2/2 - \Lambda(x,y), \quad |\gamma(x,y)| \le 2(x+B)^3 L(H,y)/B^6. \tag{9}$$

Отметим еще, что формулу (7) можно записать в следующем эквивалентном виде ([2])

$$\mathbf{P}(S(y) \ge x) = e^{-\Lambda(x,y)}\big[\psi(x)) + \delta(x,y)\big]/\sqrt{2\pi}, \tag{10}$$

где

$$\psi(x) := \bar{\Phi}(x)/\varphi(x) = \int_0^\infty e^{-t^2/2 - xt}dt. \tag{11}$$

Отметим, что в теореме существенно используется тот факт, что срезки не произвольны, а имеют вполне определенный вид (2). По этой же причине в нашем случае справедливо следующее соотношение

$$\forall x\ \forall y \ \ \mathbf{P}(S(y) \ge x) \le \mathbf{P}(S \ge x) \le \mathbf{P}(S(y) \ge x) + \sum \mathbf{P}(X_j > y). \tag{12}$$

В частности, теорема автоматически дает достаточно удобную оценку снизу для $\mathbf{P}(S \ge x)$.

Приведем теперь пример, показывающий как при помощи этой теоремы можно получать точную асимптотику для вероятностей больших уклонений в случае произвольной схемы серий с достаточно легко проверяемыми условиями. Предположим, что при каждом натуральном n нам даны независимые случайные величины $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$, причем

$$\forall j \;\; \mathbf{E}X_{n,j} = 0, \quad 0 < B_n^2 = \mathbf{D}S_n < \infty, \quad S_n = X_{n,1} + ... + X_{n,n}.$$

Положим

$$V_n(y) := \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(X_{n,j} > y), \qquad h_n(x) = (2x+1)/B_n,$$

$$L_n(x,y) = B_n^{-3} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\big[\min\{|X_{n,j}|^3,\, yX_{n,j}^2\} e^{h_n(x)\min\{X_{n,j}^+,\, y\}}\big].$$

Условимся, что ниже все пределы берутся при $n \to \infty$ и что числа y_n могут зависеть как от n, так и от x_n.

Следствие 1. *Пусть числовая последовательность $x_n \to \infty$ такова, что для некоторых чисел $y_n \geq B_n$ справедливы следующие условия*

$$x_n^3\, L_n(x_n, y_n) \to 0 \qquad \text{и} \qquad x_n e^{x_n^2/2} V_n(y_n) \to 0. \tag{13}$$

Тогда

$$\mathbf{P}\big(S_n \geq x_n B_n\big) \sim x_n^{-1} e^{-x_n^2/2}/\sqrt{2\pi}. \tag{14}$$

Первое условие в (13) можно существенно ослабить, если чуть усложнить формулировку. Введем в рассмотрение функции уклонений для сумм срезанных случайных величин:

$$\Lambda_n(x,y) = \sup_h \Big\{hxB_n - \sum_{j=1}^{n} \ln \mathbf{E}e^{h\min\{X_{n,j},\, y\}}\Big\}.$$

Следствие 2. *Пусть числовые последовательности $x_n \to \infty$ и $y_n \geq B_n$ удовлетворяют следующим условиям*

$$x_n\, L_n(x_n, y_n) \to 0 \qquad \text{и} \qquad x_n e^{\Lambda_n(x_n, y_n)} V_n(y_n) \to 0. \tag{15}$$

Тогда $\quad \Lambda_n(x_n, y_n) \sim x_n^2/2 \quad$ *и*

$$\mathbf{P}\big(S_n \geq x_n B_n\big) \sim x_n^{-1} e^{-\Lambda_n(x_n, y_n)}/\sqrt{2\pi}. \tag{16}$$

В одной из следующих работ автор планирует показать, что все интегральные теоремы, полученные в [4, главы VI–XIV] для всех классов моментных предположений могут быть получены как частные случаи следствия 2. Более того, могут быть одновременно получены и односторонние аналоги таких утверждений, что невозможно сделать методами работы [4], так как в ней существенно используются отрезки ряда Крамера растущей длины. В нашем же случае все коэффициенты ряда Крамера могут обращаться в бесконечность, в то время как асимптотика для вероятностей больших уклонений остается правильной.

Отметим, что в следствиях 1 и 2, в отличие от аналогичных результатов в ряде других работ (см., например, [5] и ссылки там), не накладывается предположений на поведение хвостов распределений случайных величин на всей оси, то есть при $y > y_n$. Тем самым мы, с одной стороны, существенно расширяем класс распределений, для которых верны наши результаты. С другой же стороны, мы с необходимостью одновременно сужаем зону возможных значений x_n до внутренности крамеровской зоны в терминологии работы [5].

Пользуясь случаем, автор хотел бы поблагодарить Рецензента за полезные замечания.

Остальная часть работы посвящена доказательствам приведенных выше результатов.

2. Доказательства

Пусть последовательность $\xi_1, ..., \xi_n$ состоит из независимых случайных величин и

$$\forall j \quad \mathbf{E}\xi_j = 0, \quad 0 < b^2 = \sum \mathbf{D}\xi_j < \infty, \qquad Z = \sum \xi_j.$$

Положим

$$L(h) = \sum \mathbf{E}\big[|\xi_j|^3 e^{h\xi_j^+}\big] \qquad \text{при} \qquad h \geq 0. \tag{17}$$

Если теперь число z удовлетворяет условию

$$z \geq 0 \qquad \text{и} \qquad 16zL(2z/b^2) \leq b^4, \tag{18}$$

то, как вытекает из следствия 5 в [3], определена и конечна функция уклонений

$$\Lambda(z) = \sup_h [zh - \ln \mathbf{E}e^{hZ}]. \tag{19}$$

Следующее утверждение также является частным случаем следствия 5, доказанного в работе автора [3].

Лемма 1. *Если верно условие* (18), *то*

$$\mathbf{P}(Z \geq z) = \bar{\Phi}\big(\sqrt{2\Lambda(z)}\big) + \delta_0(z)\varphi\big(\sqrt{2\Lambda(z)}\big), \tag{20}$$

$$\mathbf{P}(Z \geq z) = e^{\gamma(z)}\big[\bar{\Phi}(z/b)) + \delta(z)\varphi(z/b)\big], \tag{21}$$

где

$$|\delta_0(z)| \leq 29L(2z/b^2)/b^3, \quad |\delta(z)| \leq 32L(2z/b^2)/z^3, \tag{22}$$

$$\gamma(z) = (z/b)^2/2 - \Lambda(z), \quad |\gamma(z)| \leq z^3 L(2z/b^2)/b^6. \tag{23}$$

Доказательство теоремы будет основано на применении леммы 1 при

$$\xi_j = X_j(y) - \mathbf{E}X_j(y), \quad Z = S(y) - \mathbf{E}S(y), \quad z = x - \mathbf{E}S(y). \tag{24}$$

Положим

$$h = 1 + 2x, \quad L = L(h, y), \quad \beta_j := \mathbf{E}\{X_j^2 : X_j > y\}. \tag{25}$$

Случай, когда $y = \infty$ уже разобран в [3]. Поэтому далее предполагаем, что $y < \infty$. А поскольку вместо случайных величин $\{X_j\}$ всегда можно изучать величины $\{X_j/B\}$, то далее в этом параграфе мы всюду считаем, что $B = 1$. При сделанных предположениях, с учетом обозначений (25), условие (5) можно переписать в следующем виде

$$\infty > y \geq B = 1, \quad x \geq 0, \quad (1 + 8x)L \leq 1/4. \tag{26}$$

Лемма 2. *Справедливо соотношение*

$$\beta := \sum \beta_j \leq L/e^{hy} \leq e^{-1}L/(1 + 2x) \leq 1/(4e). \tag{27}$$

Доказательство. Из определения (4) следует, что $L_j(h,y) \geq e^{hy} y \beta_j$. Но из этого факта немедленно находим (27), если только заметим еще, что $y \geq 1$, $e^{hy} y \geq e^{1+2x}$ и $e^{2x} \geq 1+2x$. $\square$

Далее нам потребуется несколько элементарных неравенств.

Лемма 3. *Имеют место следующие утверждения*

$$\forall y > 0 \ \ \forall X \quad X - y \leq X^2/(4y), \tag{28}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall X \geq 0 \ \ \forall \alpha \geq 0 \quad (X+\alpha)^3 \leq (1+\varepsilon)^2 (X^3 + \alpha^3/\varepsilon^2), \tag{29}$$

$$\forall u > 0 \ \ \forall v > 0 \quad |\psi(u) - \psi(v)| \leq |u - v|. \tag{30}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$f_1(X) := X - y - X^2/(4y), \quad f_2(X) := (X+\alpha)^3 - (1+\varepsilon)^2 (X^3 + \alpha^3/\varepsilon^2).$$

Нетрудно проверить, что $f_k(0) \leq 0$ и $f_k(\infty) = -\infty$ при $k = 1,2$. А из явного вида производных нетрудно найти точку максимума этих функций и получить, что

$$\max_{0 \leq X < \infty} f_1(X) = f_1(2y) = 0, \qquad \max_{0 \leq X < \infty} f_2(X) = f_2(\alpha/\varepsilon) = 0.$$

Тем самым мы доказали неравенства (28) и (29). Заметим, теперь, что из (11) имеем:

$$\forall x \geq 0 \quad |\psi'(x)| := \int_0^\infty x e^{-t^2/2 - xt} dt \leq \int_0^\infty x e^{-t^2/2} dt = 1.$$

Но из полученной оценки для производной $|\psi'(x)|$ очевидно следует неравенство (30). $\square$

Положим

$$a_j := -\mathbf{E} X_j(y), \quad a := \sum a_j = -\mathbf{E} S(y).$$

Лемма 4. *Пусть верны условия* (1) *и* (26). *Тогда*

$$0 \leq a \leq \beta/4, \qquad 0 \leq 1 - b^2 \leq 2\beta, \qquad 1 \geq b^2 \geq 9/10. \tag{31}$$

Кроме того, в этом случае

$$\forall j \ \ 0 \leq a_j \leq h a_j \leq c := (16e)^{-1}, \quad e^{hy} \sum a_j^3 \leq c^2 L/4. \tag{32}$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{E} X_j = 0$, то из определения (2) нетрудно извлечь, что

$$a_j := \mathbf{E} X_j - \mathbf{E} X_j(y) = \mathbf{E}[X_j - y]^+ \geq 0.$$

Из этого представления и из неравенства (28) при $X = X_j$ имеем:

$$0 \leq a_j = \mathbf{E}[X_j - y] \leq \mathbf{E}\{X_j^2/(4y) : X_j > y\} = \beta_j/(4y).$$

Просуммировав полученные неравенства по j, мы найдем первое неравенство в (31), если только заметим, что $y \geq 1$.

Поскольку $0 \leq a_j \leq a \leq \beta/4$, то применяя последовательно (25), (27) и (26), имеем

$$0 \leq a_j \leq h a_j \leq (1+2x)\beta/4 \leq e^{-1} L/4 \leq e^{-1}/4^2 = c.$$

Тем самым доказано первое соотношение в (32). А из него и (31) мы получаем, что

$$\sum a_j^3 \leq c^2 \sum a_j = c^2 a \leq c^2 \beta/4 \leq (c^2/4) L/e^{hy}.$$

При выводе последнего неравенства мы опять использовали оценку (27) для величины β. Таким образом, мы доказали оба соотношения в (32).

Используя опять определение (2), нетрудно понять, что

$$\mathbf{E}X_j^2 - \mathbf{E}X_j^2(y) = \mathbf{E}\{X_j - y^2 : X_j > y\} \le \beta_j.$$

Следовательно, с учетом первого неравенства в (32), имеем

$$0 \le \mathbf{E}X_j^2 - \mathbf{D}X_j(y) \le \beta_j + a_j^2 \le \beta_j + ca_j.$$

Суммируя эти неравенства, получаем

$$0 \le 1 - b^2 \le \beta + ca \le (1 + c/4)\beta \le (1 + c/4)/(4e) < 1/10. \tag{33}$$

При выводе (33) были использованы уже доказанные оценки для величин a и β из (31) и (27). Поскольку $1 + c/4 < 2$, то из (33) следуют второе и третье соотношения в (31). □

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* (1) *и* (26). *Тогда*

$$z \le z/b \le z/b^2 \le x + L/2 \le x + 1/8 < h/2. \tag{34}$$

В частности,

$$z^2/b^2 - x^2 \le (x + 1/8)L, \quad |\psi(z/b) - \psi(x)| \le L/2. \tag{35}$$

Доказательство. Используя (31) и (27), имеем

$$\frac{z}{b^2} - x = \frac{x + a - xb^2}{b^2} \le \frac{\beta/4 + x(1 - b^2)}{0.9} \le \frac{\beta + 2x\beta}{0.9} \le \frac{L}{0.9e}. \tag{36}$$

Поскольку $0.9e > 2$ и $L \le 1/4$ ввиду (27), то из (36) вытекает (34).

Чтобы из (34) извлечь (35), надо воспользоваться соотношениями

$$z^2/b^2 - x^2 = (z/b + x)(z/b - x) \quad \text{и} \quad |\psi(z/b) - \psi(x)| \le |z/b - x|.$$

Последнее верно в силу (30). □

Лемма 6. *Если справедливы условия* (1) *и* (26), *то*

$$L(2z/b^2) \le CL \qquad \textit{при} \qquad C = e^c\big(1 + (c/2)^{2/3}\big)^3 < 6/5. \tag{37}$$

Доказательство. Поскольку $|\xi_j| \le |X_j(y)| + a_j$ в силу определений (17) и (4), то из неравенства (29) при $X = |X_j(y)|$ и $\alpha = a_j$ имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad |\xi_j|^3 \le (1 + \varepsilon)^2\big(|X_j(y)|^3 + a_j^3/\varepsilon^2\big). \tag{38}$$

Кроме того, ввиду (17), (4) и (32)

$$h\xi_j^+ \le hX_j(y)^+ + ha_j \le hX_j(y)^+ + c \le hy + c.$$

Из последнего соотношения и (38) немедленно следует, что

$$|\xi_j|^3 e^{h\xi_j^+} \le (1 + \varepsilon)^2 e^c\big(|X_j(y)|^3 e^{hX_j(y)^+} + e^{hy}a_j^3/\varepsilon^2\big).$$

Суммируя эти неравенства по j и учитывая (4) и (32), находим, что

$$L(h) \le (1 + \varepsilon)^2 e^c\big(L + (c^2/4)L/\varepsilon^2\big). \tag{39}$$

Так как $2z/b^2 \le h$ ввиду (34), то из (39) при $\varepsilon := (c/2)^{2/3}$ получаем требуемое неравенство $L(2z/b^2) \le L(h) \le CL$ с константой C, указанной в (37). □

Лемма 7. *Если верны условия* (1) *и* (26), *то выполнено и предположение* (18).

Доказательство. Так как $8z \le 8(x+1/8) = 1+8x$ в силу (34), то применяя последовательно неравенства (37), (26) и (31), имеем

$$16zL(2z/b^2) \le 2(1+8x)CL \le 2C/4 \le (0.9)^2 \le b^4.$$

Здесь мы еще использовали оценку $C/2 < 3/5 < (0.9)^2$. □

Лемма 8. *Пусть выполнены все условия теоремы при* $B=1$. *В этом случае справедливы все равенства в формулах* (6), (7), (9) *и, кроме того, имеют место следующие соотношения:*

$$\Lambda(x,y) = \Lambda(z), \quad \gamma(x,y) = \gamma(z) + x^2/2 - (z/b)^2/2, \tag{40}$$

$$\delta_0(x,y) = \delta_0(z), \quad \delta(x,y) = \delta(z) + \psi(z/b) - \psi(x), \tag{41}$$

где функция $\psi(x)$ *введена в* (11).

Доказательство. Подчеркнем еще раз, что переменные в теореме и лемме 1 связаны равенствами (24). По этой причине из определений (3) и (19) вытекает, что имеют место равенства (40). Напомним, что при $B=1$ условие (5) совпадает с (26) и, в силу леммы 7, выполнено условие (18) леммы 1. Значит, верны и все утверждения этой леммы. Но утверждение (20) леммы 1 совпадает с утверждением (6) теоремы при $\delta_0(x,y)$ введенном в (41).

Далее, ввиду определения (11) формулу (21) можно переписать следующим образом

$$\mathbf{P}(Z \ge z) = e^{-\Lambda(z)}\big[\psi(z/b) + \delta(z)\big]/\sqrt{2\pi}.$$

Подставляя в это равенство функцию $\delta(x,y)$ из (41) и величины Z и z из (24), мы получим, что верна формула (10). Но, как уже отмечалось, получившееся соотношение (10) совпадает с требуемой формулой (7). □

Лемма 9. *Если справедливы условия* (1) *и* (26), *то верны все неравенства в формулах* (8) *и* (9).

Доказательство. Из (22), (35), (37) и (41) вытекает, что

$$|\delta(x,y)| \le |\delta(z)| + |\psi(z/b) - \psi(x)| \le 32CL/b^3 + L/2.$$

Отсюда следует второе неравенство в (8), поскольку $b^3 \ge (0.9)^{3/2}$ в силу (31). Аналогично, из (22), (37) и (41) получается первое неравенство в (8), так как $29C/(0.9)^{3/2} < 41$.

Далее, поскольку $z/b^2 \le x + 1/8$ в силу (34), то из (23), (35), (37) и (40) следует, что

$$|\gamma(x,y)| \le |\gamma(z)| + |x^2/2 - (z/b)^2/2| \le (x+1/8)^3CL + (x+1/8)L/2.$$

Отсюда вытекает второе соотношение в (9), так как $C < 2$. □

Таким образом, в леммах 8 и 9 доказаны все утверждения теоремы при $B=1$.

Лемма 10. *Если* $p_n \sim q_n$ *и* $\delta_n/q_n \to 0$, *то* $p_n + \delta_n \sim q_n$.

Для доказательства этого утверждения надо последовательно применить следующие элементарные факты:

$$\delta_n/p_n \sim \delta_n/q_n \to 0 \quad \text{и} \quad \delta_n + p_n = p_n(1+\delta_n/p_n) \sim p_n \sim q_n.$$

При доказательстве следствий мы будем использовать теорему и соотношения (10) и (12) при $X_j = X_{n,j}$, $x = x_n B_n$ и $y = y_n$. В этом случае при выполнении условий (15) из утверждений (10) и (8) теоремы вытекает, что

$$p_n := \mathbf{P}\big(S_n(y_n) \geq x_n B_n\big) \sim q_n := x_n^{-1} e^{-\Lambda_n(x_n,y_n)}/\sqrt{2\pi}, \tag{42}$$

поскольку $\psi(x_n) \sim x_n^{-1}$. А из неравенства (12) следует, что

$$p_n \leq \mathbf{P}\big(S_n \geq x_n B_n\big) \leq p_n + \delta_n \qquad \text{при} \qquad \delta_n := V_n(y_n). \tag{43}$$

Таким образом, из (42), (43) и леммы 10 немедленно получается утверждение (16) следствия 2, так как $\delta_n/q_n \to 0$ в силу условия (15).

Утверждение (14) следствия 1 является частным случаем (16), поскольку из условия (13) и из соотношений (9) следует, что $e^{-\Lambda_n(x_n,y_n)+x_n^2/2} \to 0$.

Таким образом, все утверждения работы доказаны.

Список литературы

[1] В.В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, Наука, Москва, 1972.

[2] Л.В. Розовский, *Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона*, Теория вероятностей и ее применения, **34**: 4 (1989), 686–705.

[3] А.И. Саханенко, *Оценки типа Берри - Эссеена для вероятностей больших уклонений*, Сиб. мат. журнал, **32**: 4 (1991), 133–142.

[4] И.А. Ибрагимов, Ю.В.Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, Москва, 1965.

[5] А.А. Боровков, А.А. Могульский, *Интегро-локальные и интегральные теоремы для сумм случайных величин с семиэкспоненциальными распределениями*, Сиб. мат. журнал, **47**: 6 (2006), 1219–1257.

Александр Иванович Саханенко
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16,
628012, Ханты-Мансийск, Россия
E-mail address: aisakh@mail.ru