IJMMS 31:4 (2002) 229–249
PII. S0161171202005501
http://ijmms.hindawi.com

NON-UNICITÉ DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS QUASI-HOMOGÈNES

KHALGUI-OUNAÏES HELLA

Reçu le 19 juin 2000

Nous démontrons que si P est un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$, à coefficients de classe C^∞, tel que la m-partie principale est à coefficients réels ; et que $x_0 \in \Omega$, $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ est une hypersurface non caractéristique en x_0 et strictement non pseudoconvexe avec $\{\{p_m,\phi\},\phi\}(x_0,\xi_0) \neq 0$ et $d_q p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$, alors P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S.

Classification 2000 des Sujets Mathématiques: 35A07.

1. Introduction. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et S une hypersurface de Ω, passant par un point x_0, définie par

$$S = \{x \in \Omega : \phi(x) - \phi(x_0) = 0\}, \tag{1.1}$$

où ϕ est une fonction réelle de classe C^∞ vérifiant $d\phi(x_0) \neq 0$.

Définition 1.1. Soit P un opérateur différentiel défini sur Ω, on dit que P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S s'il existe un voisinage V de x_0 dans Ω, des fonctions a et $u \neq 0$, de classe C^∞ sur V tel que $\operatorname{supp} a \subset \{x \in \Omega : \phi(x) \leq \phi(x_0)\}$,

$$\begin{gathered} V \cap \operatorname{supp} u = \{x \in \Omega : \phi(x) \leq \phi(x_0)\} \cap V, \\ Pu + au = 0 \quad \text{dans } V. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Alinhac [1] a donné des résultats de non-unicité pour des opérateurs du type

$$p(x,t,\sigma^q\xi,\sigma\tau) = \sigma^m p_m(x,t,\xi,\tau) + \sigma^{m-k} p_{m-k}(x,t,\xi,\tau) + \cdots, \tag{1.3}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$.

Dans ce papier, nous donnons des conditions suffisantes de non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs différentiels quasi-homogènes, réels, à coefficients de classe C^∞.

Les techniques utilisées dans ce travail sont rattachées aux constructions de l'optique géométrique qui sont développées dans les travaux de Plis [4], Hörmander [2] et Alinhac [1].

2. Notation et définitions. Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ et soit $(x,\xi) \in T^*(\Omega)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$.

Soit $m = (m_1,\dots,m_n)$ un multi-indice tel que

$$0 < m_1 \le \cdots \le m_{q-1} < m_q = \cdots = m_n, \tag{2.1}$$

et $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

On note

$$\begin{gathered} |\alpha : m| = \alpha_1 m_1^{-1} + \alpha_2 m_2^{-1} + \cdots + \alpha_n m_n^{-1}, \\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} \quad \text{avec } D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \nabla_q = \Big(0,\dots,0,\frac{\partial}{\partial x_q},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Définition 2.1. On dit que P est un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m sur Ω si

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha:m| \le 1} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{2.3}$$

La m-partie principale de P est l'opérateur

$$P_m(x,D) = \sum_{|\alpha:m| = 1} a_\alpha(x) D^\alpha. \tag{2.4}$$

Définition 2.2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur $T^*\Omega$. On désigne par $\{f,g\}$ le crochet de Poisson quasi-homogène de f, g défini par

$$\{f,g\} = \sum_{j=q}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial \xi_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial \xi_j}\Big). \tag{2.5}$$

Définition 2.3. Soit $x_0 \in \Omega$ et ϕ une fonction de classe C^∞ dans Ω telle que $\nabla_q \phi(x_0) \neq 0$. L'hypersurface $S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\}$ est dite strictement non pseudoconvexe au sens quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de P issues de x_0, si elle est non caractéristique et vérifie la condition suivante :

$$\exists \xi_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\} : p_m(x_0,\xi_0) = H_{p_m}\phi(x_0,\xi_0) = 0, \qquad H_{p_m}^2 \phi(x_0,\xi_0) < 0, \tag{2.6}$$

avec $H_{p_m}\phi = \{p_m,\phi\}$ et $H_{p_m}^2\phi = \{p_m,\{p_m,\phi\}\}$.

3. Énoncé du théorème

Théorème 3.1. *Soit P un opérateur différentiel quasi-homogène d'ordre m, à coefficients de classe C^∞ sur une partie ouverte Ω de $\mathbb{R}^n$, tel que la m-partie principale est à coefficients réels. Soit $x_0 \in \Omega$ et*

$$S = \{x \in \Omega : \phi(x) = \phi(x_0)\} \tag{3.1}$$

une hypersurface non caractéristique en x_0 et strictement non pseudoconvexe au sens quasi-homogène par rapport aux bicaractéristiques de P issues de x_0. Pour ξ_0 vérifiant (2.6), on suppose que

(i) $\{\{p_m,\phi\},\phi\}(x_0,\xi_0) \neq 0$;

(ii) $d_q p_m(x_0,\xi_0) \neq 0$ *où* $d_q p_m = (0,\dots,0,d_{\xi_q}p_m,\dots,d_{\xi_n}p_m)$.

Alors il existe un voisinage W *de* x_0 *et deux fonctions* a *et* $u \neq 0$, *de classe* C^∞ *sur* W, *s'annulant dans*

$$\{x \in W : \phi(x) > \phi(x_0)\} \tag{3.2}$$

et vérifiant

$$Pu + au = 0, \qquad x_0 \in \operatorname{supp} u. \tag{3.3}$$

Exemple 3.2. Soit P l'opérateur différentiel quasi-homogène défini sur $\mathbb{R}^5$, d'ordre $m = (1,2,4,4,4)$, de symbole

$$\begin{aligned} &p(y_1,y_2,x_1,x_2,t,\eta_1,\eta_2,\xi_1,\xi_2,\tau) \\ &\quad = \tau^4 + \tau^2[(1+t)\xi_2^2+\xi_1^2] + (1+t)[(1+t)\eta_2^2 - \xi_1^2\xi_2^2 + t^3\eta_1] + x_1\xi_2^3. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour $x_0 = (0,0,0) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$, $S = \{(y,x,t) \in \mathbb{R}^5 : t = 0\}$ et $\xi_0 = (2,1,1,1,0)$, l'opérateur P vérifie les hypothèses du théorème 3.1, il en résulte que P n'a pas l'unicité de Cauchy par rapport à S.

4. Preuve du théorème 3.1. Toutes les hypothèses étant invariantes par changement de coordonnées respectant les coordonnées quasi-homogènes, on peut donc se ramener aux variables $(y,x,t) \in \mathbb{R}^{q-1}\times\mathbb{R}^{n-q}\times\mathbb{R}$, dans un voisinage V de $x_0 = (0,0,0)$, avec

$$S = \{(y,x,t) \in V : t = 0\}, \qquad P = P(y,x,t,D_y,D_x,D_t). \tag{4.1}$$

On pose $s = \lambda(t-\delta)$ avec $\lambda = \delta^{-\theta}$, $\delta > 0$ et $\theta > 1$. L'opérateur P s'écrit alors dans les coordonnèes (y,x,s),

$$P(y,x,t,D_y,D_x,D_t) = P\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},D_y,D_x,\lambda D_s\Big). \tag{4.2}$$

Prenons la solution u sous la forme

$$\begin{aligned} u\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda}\Big) &= e^{i(\sum_{j=1}^{q-1}\sigma^{1/m_j}\eta_j y_j + \sigma^{1/m_n}(\xi(y,x,\delta)+(s/\lambda)\tau(y,x,\delta)))} \\ &\quad \times e^{\nu\varphi(y,x,\delta,s)}e^{-\gamma(y,x,\delta)}w(y,x,\delta,s). \end{aligned} \tag{4.3}$$

On définit un opérateur $\tilde P$ par $Pu/u = \tilde P w/w$ avec

$$\begin{aligned} &\tilde P(y,x,\delta,s,D_y,D_x,D_s) \\ &\quad = P\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\Big(\sigma^{1/mj}\eta_j+\sigma^{1/m_n}\xi+\sigma^{1/m_n}\frac{s}{\lambda}\nabla_j\tau+\frac{\nu}{i}\nabla_j\varphi-\frac{1}{i}\nabla_j\gamma+D_{y_j}\Big)_{1\le j\le q-1}, \\ &\qquad \sigma^{1/m_n}\nabla_x\xi+\sigma^{1/m_n}\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau+\frac{\nu}{i}\nabla_x\varphi-\frac{1}{i}\nabla_x\gamma+D_x,\sigma^{1/m_n}\tau+\frac{1}{i}\lambda\nu\varphi_s'+\lambda D_s\Big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

où ∇_x désigne le vecteur gradient par rapport à la variable x et ∇_j désigne la dérivée par rapport à la variable y_j.

4.1. Choix de η, $\tilde{\xi}$, τ

Lemme 4.1. *Soit p_m le m-symbole principal de P ; $\zeta_0 = (\eta_0, \xi_0, \tau_0)$ satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1. Alors on peut trouver un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}$, des fonctions $\eta(y,x,t) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{q-1})(y,x,t)$, $\xi(y,x,t) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q-1})(y,x,t)$, $\tau(y,x,t)$ et $\delta_0 > 0$ tels que pour tout $0 < \delta < \delta_0$ et (y,x) près de l'origine dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$ on a*

$$\begin{gathered} p_m(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau) = \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau) = 0, \\ (\eta(0), \nabla_x\xi(0), \tau(0)) = \zeta_0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Preuve. On prend pour tout (y,x,t), $\eta(y,x,t) = \eta_0$ c'est-à-dire $\eta_j = \eta_{0j}$.
D'après les hypothèses (2.6) et le (i) du théorème 3.1, on a

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(0,\zeta_0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 p_m}{\partial \tau^2}(0,\zeta_0) \neq 0, \tag{4.6}$$

il résulte d'après le théorème des fonctions implicites qu'il existe une fonction q de classe C^∞,

$$q : V(0,\eta_0,\xi_0) \longrightarrow V(\tau_0) \subset \mathbb{R}, \qquad (y,x,t,\eta,\xi) \longmapsto q(y,x,t,\eta,\xi), \tag{4.7}$$

vérifiant

$$q(0,\eta_0,\xi_0) = \tau_0, \qquad \frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)) = 0. \tag{4.8}$$

On note

$$F(y,x,t,\eta,\xi) = p_m(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)), \tag{4.9}$$

on a alors $F(0,0,0,\eta_0,\xi_0) = p_m(0,0,0,\eta_0,\xi_0,\tau_0) = 0$ et pour tout $1 \le j \le n-q$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(y,x,t,\eta,\xi) = {} & \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)) \\ & + \frac{\partial q}{\partial \xi_j}(y,x,t,\eta,\xi)\frac{\partial p_m}{\partial \tau}(y,x,t,\eta,\xi,q(y,x,t,\eta,\xi)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ainsi d'après l'hypothèse (ii) du théorème 3.1, on déduit que

$$d_\xi F(0,0,0,\eta_0,\xi_0) = d_\xi p_m(0,0,0,\eta_0,\xi_0,\tau_0) \neq 0. \tag{4.11}$$

Il résulte du théorème d'Hamilton-Jacobi que l'équation

$$F(y,x,t,\eta,\nabla_x\Psi(y,x,t,\eta)) = 0, \qquad \nabla_x\Psi(0,0,0,\eta_0) = \xi_0, \tag{4.12}$$

admet une solution C^∞, $\Psi(y,x,t,\eta)$, (y,x,t) près de l'origine, η voisin de η_0. On pose

$$\xi(y,x,t) = \Psi(y,x,t,\eta_0), \qquad \tau(y,x,t) = q(y,x,t,\eta_0,\nabla_x\xi(y,x,t)). \tag{4.13}$$

On choisit $\delta_0 > 0$ tel que pour tout δ, $0 < \delta < \delta_0$, on a (y,x,δ) voisin de l'origine. Ceci achève la démonstration du lemme 4.1. □

On prend

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0, \\ \tau(y,x,\delta) &= q(y,x,\delta,\eta_0,\nabla_x \xi(y,x,\delta)), \\ \tilde{\xi}(y,x,\delta) &= \xi(y,x,\delta) + \frac{c\cdot x}{\lambda}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

où c est un vecteur constant de $\mathbb{R}^{n-q}$ qu'on fixera ultérieurement.

Lemme 4.2. *Notons $\zeta_0 = (\eta_0,\xi_0,\tau_0)$ et $\phi(y,x,t) = t$, on a la relation*

$$\{p_m,\{p_m,\phi\}\}(0,\zeta_0) = -(p_m)''_{\tau\tau}\left(p'_{mt} + \sum_{j=1}^{n-q}\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\frac{\partial \tau}{\partial x_j}\right)(0,\zeta_0). \tag{4.15}$$

Preuve. Dans toute cette preuve on écrira p à la place de p_m. On a

$$\{p,\phi\} = p'_\tau, \qquad \{p,\{p,\phi\}\} = \sum_{j=1}^{n-q}\left(p'_{\xi_j}p''_{\tau x_j} - p'_{x_j}p''_{\tau\xi_j}\right) + p'_\tau p''_{\tau t} - p'_t p''_{\tau\tau}. \tag{4.16}$$

D'après (4.5) on obtient pour tout $1 \le j \le n-q$

$$p'_{x_j} + \sum_{k=1}^{n-q} p'_{\xi_k}\xi''_{x_j x_k} + p'_\tau \tau'_{x_j} = 0, \tag{4.17}$$

d'où

$$\begin{aligned} p'_{x_j} &= -\sum_{k=1}^{n-q} p'_{\xi_k}\xi''_{x_j x_k} - p'_\tau \tau'_{x_j}, \\ p''_{\tau x_j} &+ \sum_{k=1}^{n-q} p''_{\tau\xi_k}\xi''_{x_j x_k} + p''_{\tau\tau}\tau'_{x_j} = 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

d'où

$$p''_{\tau x_j} = -\sum_{k=1}^{n-q} p''_{\tau\xi_k}\xi''_{x_j x_k} - p''_{\tau\tau}\tau'_{x_j}, \tag{4.19}$$

par suite

$$\begin{aligned} \{p,\{p,\phi\}\} = &-\sum_{j,k=1}^{n-q} p'_{\xi_j}p''_{\tau\xi_k}\xi''_{x_k x_j} - \sum_{j=1}^{n-q} p'_{\xi_j}p''_{\tau\tau}\tau'_{x_j} \\ &+ \sum_{j,k=1}^{n-q} p''_{\tau\xi_j}p'_{\xi_k}\xi''_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n-q} p''_{\tau\xi_j}p'_\tau\tau'_{x_j} + p'_\tau p''_{\tau t} - p'_t p''_{\tau\tau}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

On en déduit que $\{p,\{p,\phi\}\}(0,\zeta_0) = -p''_{\tau\tau}(\sum_{j=1}^{n-q} p'_{\xi_j}\tau'_{x_j} + p'_t)(0,\zeta_0)$. □

4.2. Choix de φ

Lemme 4.3. *Il existe c dans $\mathbb{R}^{n-q}$ tel que*

$$p'_t(0,\zeta_0)+\sum_{j=1}^{n-q}(\tau'_{x_j}-c_j)p'_{\xi_j}(0,\zeta_0)=0 \tag{4.21}$$

et il existe une fonction $\varphi(y,x,\delta,s)$ de classe C^∞ dans $V_0\times]0,\delta_0[\times]-s_0,s_0[$, où V_0 est un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^{q-1}\times\mathbb{R}^{n-q}$ tels que

$$p_m\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\sigma^{-1/m_n}\lambda\nu D_s\varphi\Big)=0, \tag{4.22}$$

avec

$$\operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta,s)=\alpha(y,x,\delta)s+\beta(y,x,\delta,s)s^2, \tag{4.23}$$

où α et β sont des fonctions de classe C^∞ sur $V_0\times]0,\delta_0[\times]-s_0,s_0[$,

$$\alpha(0,0,0)<0,\qquad \beta(0,0,0,0)<0. \tag{4.24}$$

Preuve. Dans cette preuve on écrira p à la place de p_m. Posons

$$G(y,x,\delta,s,z)=\delta^{-\theta}p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}z\Big). \tag{4.25}$$

On a

$$\nabla_x\tilde{\xi}=\nabla_x\xi+\frac{c}{\lambda}=\nabla_x\xi+c\delta^\theta. \tag{4.26}$$

On voudrait trouver $z_0\in\mathbb{C}$ tel que

$$G(0,0,0,0,z_0)=0, \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0,0,z_0)\neq 0. \tag{4.28}$$

Pour cela on pose $X=(y,x,\delta+s\delta^\theta,\eta,\nabla_x\xi+c\delta^\theta+s\delta^\theta\nabla_x\tau,\tau)$ et on applique la formule de Taylor à p au point X jusqu'à l'ordre 2 ; on obtient

$$G(y,x,\delta,s,z)=\delta^{-\theta}p(X)+\delta^{-\theta/2}zp'_\tau(X)+\frac{z^2}{2}p''_{\tau\tau}(X)+O(\delta^{\theta/2}). \tag{4.29}$$

Ensuite, on pose $X_1=(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau)$ et on applique de nouveau la formule de Taylor au point X_1 à l'ordre 1 on aura

$$\begin{aligned}G(y,x,\delta,s,z)&=\delta^{-\theta}p(X_1)+sp'_t(X_1)+\sum_{j=1}^{n-q}\Big(c_j+s\tau'_{x_j}\Big)p'_{\xi_j}(X_1)\\&\quad+\delta^{-\theta/2}zp'_\tau(X_1)+\frac{z^2}{2}p''_{\tau\tau}(X_1)+O(\delta^{\theta/2}).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Or d'après (4.5), $p(X_1) = p'_\tau(X_1) = 0$, d'où

$$G(y,x,\delta,s,z) = s\left[p'_t(X_1) + \sum_{j=1}^{n-q} \tau'_{x_j} p'_{\xi_j}(X_1)\right] + \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(X_1) + \frac{z^2}{2} p''_{\tau\tau}(X_1) + O(\delta^{\theta/2}). \tag{4.31}$$

Ainsi

$$G(0,0,0,0,z_0) = \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(0,\zeta_0) + \frac{z_0^2}{2} p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0). \tag{4.32}$$

On pose

$$A = \sum_{j=1}^{n-q} c_j p'_{\xi_j}(0,\zeta_0), \qquad B = p'_t(0,\zeta_0) + \sum_{j=1}^{n-q} \tau'_{x_j} p'_{\xi_j}(0,\zeta_0). \tag{4.33}$$

Comme

$$d_\xi p(0,\zeta_0) \neq 0, \tag{4.34}$$

on peut donc trouver $c \in \mathbb{R}^{n-q}$ tel que

$$A = B. \tag{4.35}$$

On déduit de (4.27), (4.32) que z_0 est donné par

$$z_0^2 = -\frac{2B}{p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0)}. \tag{4.36}$$

D'après le lemme 4.2 et l'hypothèse de non stricte pseudoconvexité de l'hypersurface on a $z_0^2 < 0$. Ainsi z_0 est imaginaire pur. On choisit z_0 tel que $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Donc d'après l'hypothèse (i) du théorème 3.1 on a

$$\begin{gathered} G(0,0,0,0,z_0) = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial z}(0,0,0,0,z_0) = z_0 p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0) \neq 0, \end{gathered} \tag{4.37}$$

d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de $(0,0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et une fonction

$$g : V \longrightarrow V(z_0) \subset \mathbb{C}, \qquad (y,x,\delta,s) \longmapsto g(y,x,\delta,s) \tag{4.38}$$

vérifiant

$$g(0,0,0,0) = z_0, \tag{4.39}$$

$$G(y,x,\delta,s,g(y,x,\delta,s)) = 0 \quad \text{dans } V. \tag{4.40}$$

On pose

$$D_s\varphi(y,x,\delta,s) = g(y,x,\delta,s) \tag{4.41}$$

avec

$$\varphi_{|s=0} = 0, \tag{4.42}$$

alors

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(y,x,\delta,s)=i\frac{\partial g}{\partial s}(y,x,\delta,s). \tag{4.43}$$

Par ailleurs, d'après (4.25), (4.39) et (4.41) on a

$$p\left(y,x,\delta+\delta^\theta s,\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\delta^\theta s\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi(y,x,\delta,s)\right)=0, \tag{4.44}$$

en dérivant cette expression par rapport à s on obtient

$$\delta^\theta p'_t+\delta^\theta\tau'_x\cdot p'_\xi+\frac{\delta^{\theta/2}}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}p'_\tau=0. \tag{4.45}$$

D'où en prenant $y=0$, $x=0$, $s=0$ et $\eta=\eta_0$ on obtient

$$\begin{aligned}\delta^\theta p'_t&(0,0,\delta,\eta_0,\nabla_x\tilde{\xi},\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)\\&+\delta^\theta\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(0,0,\delta,\eta_0,\xi_0,\tau_0+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)\\&+\frac{\delta^{\theta/2}}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0,\delta,0)p'_\tau(0,0,\delta,\eta_0,\xi_0,\tau_0+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)=0.\end{aligned} \tag{4.46}$$

Appliquons la formule de Taylor à p'_t,p'_ξ et p'_τ à l'ordre 1, au point

$$X=\left(0,0,\delta,\eta_0,\nabla_x\xi(0,0,\delta),\tau(0,0,\delta)\right), \tag{4.47}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}\delta^\theta p'_t(X)+\delta^\theta\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(X)+\frac{\delta^{\theta/2}}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0,\delta,0)p'_\tau(X)&\\+\frac{\delta^\theta}{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}D_s\varphi\right)(0,0,\delta,0)p''_{\tau\tau}(X)+o(\delta^\theta)=0.&\end{aligned} \tag{4.48}$$

D'après le lemme 4.1, nous avons pour $\delta<\delta_0$

$$p'_\tau\left(0,0,\delta,\eta_0,\nabla_x\xi(0,0,\delta),\tau(0,0,\delta)\right)=0, \tag{4.49}$$

d'où (4.48) devient

$$\delta^\theta p'_t(X)+\delta^\theta\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(X)+\frac{\delta^\theta}{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}D_s\varphi\right)(0,0,\delta,0)p''_{\tau\tau}(X)+o(\delta^\theta)=0. \tag{4.50}$$

On en déduit que

$$p'_t(X)+\tau'_x(0,0,\delta)\cdot p'_\xi(X)+\frac{1}{i}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}D_s\varphi\right)(0,0,\delta,0)p''_{\tau\tau}(X)+o(1)=0. \tag{4.51}$$

En faisant tendre δ vers zéro, on obtient

$$B+\frac{1}{i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}z_0p''_{\tau\tau}(0,\zeta_0)=0, \tag{4.52}$$

donc

$$B + g_s'(0,0,0,0) z_0 p_{\tau\tau}''(0,\zeta_0) = 0. \tag{4.53}$$

Par ailleurs, nous avons $z_0^2 = -2B/P_{\tau\tau}''(0,\zeta_0)$, ceci donne

$$Bz_0 - 2Bg_s'(0) = 0, \tag{4.54}$$

d'où $g_s'(0) = z_0/2$. Ainsi

$$\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0) = -\mathrm{Im}\, g_s'(0) = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\, z_0 < 0, \tag{4.55}$$

par suite $\beta(0,0,0,0) < 0$ et

$$\alpha(0,0,0) = \mathrm{Re}\, ig(0,0,0,0) = iz_0 < 0. \tag{4.56}$$

□

Corollaire 4.4. *On a*

$$\begin{aligned} p_m\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big) \\ = \frac{1}{\lambda\nu}[H(y,x,\delta,s)D_s + K(y,x,\delta,s) + \delta^r Q(y,x,\delta,s,D_s)], \end{aligned} \tag{4.57}$$

où H, K et les coefficients de Q sont réguliers, $H(0) \neq 0$, $r > 0$ et Q un opérateur différentiel en D_s.

Preuve. Fixons $\sigma^{1/m_n} = \lambda^{3/2}\nu$. Dans cette preuve on écrira p à la place de p_m. On a

$$\begin{aligned} p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big) \\ = \sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta} \\ \times\Big(\tau+\delta^{\theta/2}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big)^k, \end{aligned} \tag{4.58}$$

où $\alpha' \in \mathbb{N}^{q-1}$, $m' = (m_1,\dots,m_{q-1})$, $\beta \in \mathbb{N}^{n-q-1}$ et $k \in \mathbb{N}$.

Pour montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \Big[\tau+\delta^{\theta/2}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big]^k = (\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^k + k(\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^k\delta^{\theta/2}D_s \\ - a_k\tau^{k-2}\frac{\delta^\theta}{\nu}\varphi_{ss}'' + \delta^r\frac{\delta^\theta}{\nu}R_k(y,x,\delta,s,D_s), \end{aligned} \tag{4.59}$$

il suffit de raisonner par récurrence sur k. De (4.59) on déduit que

$$\begin{aligned}
&p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}\Big(D_s\varphi+\frac{1}{\nu}D_s\Big)\Big)\\
&\quad=\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}(\tau+\delta^{\theta/2}(D_s\varphi))^k\\
&\qquad+\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}k(\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^{k-1}\frac{\delta^{\theta/2}}{\nu}D_s\\
&\qquad-\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}\tau^{k-2}\frac{\delta^{\theta}}{\nu}\varphi''_{ss}\\
&\qquad+\delta^r\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1}\frac{\delta^{\theta}}{\nu}a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}R_k(y,x,\delta,s,D_s).
\end{aligned}\tag{4.60}$$

Or d'après le lemme 4.3 et ce qui précède on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}(\tau+\delta^{\theta/2}(D_s\varphi))^k\\
&\quad=p\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi\Big)=0,\\
&\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}k(\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^{k-1}\frac{\delta^{\theta/2}}{\nu}D_s\\
&\quad=p'_\tau\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi\Big)\frac{\delta^{\theta/2}}{\nu}D_s,\\
&-\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}\tau^{k-2}\frac{\delta^{\theta}}{\nu}\varphi''_{ss}\\
&\quad=\frac{\delta^{\theta}}{\nu}K(y,x,\delta,s),\\
&\delta^r\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1}\frac{\delta^{\theta}}{\nu}a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}\Big(\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\Big)^{\beta}R_k(y,x,\delta,s,D_s)\\
&\quad=\delta^r\frac{\delta^{\theta}}{\nu}Q(y,x,\delta,s,D_s).
\end{aligned}\tag{4.61}$$

Reprenons le terme $\sum_{|\alpha':m'|+|\beta:m_n|+k/m_n=1} a_{\alpha'\beta k}\eta^{\alpha'}(\nabla_x\tilde{\xi}+(s/\lambda)\nabla_x\tau)^{\beta}k(\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi)^{k-1}(\delta^{\theta/2}/\nu)D_s$ et appliquons la formule de Taylor d'abord au point $X=(y,x,\delta+s/\lambda,\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+(s/\lambda)\nabla_x\tau,\tau)$ à l'ordre 2, puis au point $X_1=(y,x,\delta,\eta,\nabla_x\xi,\tau)$ à l'ordre 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
p'_\tau&\Big(y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau,\tau+\delta^{\theta/2}D_s\varphi\Big)\\
&=p'_\tau(X_1)+\delta^{\theta/2}(D_s\varphi)p''_{\tau\tau}(X_1)+O(\delta^{\theta}).
\end{aligned}\tag{4.62}$$

Il en résulte qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{aligned} & p\left(y, x, \delta+\frac{s}{\lambda}, \eta, \nabla_x \tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau, \tau+\delta^{\theta/2}\left(D_s \varphi+\frac{1}{\nu} D_s\right)\right) \\ & \quad =\frac{1}{\lambda \nu}\left[p_{\tau\tau}^{\prime\prime}(y, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau)(D_s \varphi) D_s+K(y, x, \delta, s)+\delta^r Q(y, x, \delta, D_s)\right]. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Nous avons par hypothèse (i) du théorème 3.1 que $p_{\tau\tau}^{\prime\prime}(0,0,0,\zeta_0) \neq 0$. En posant

$$H(y, x, \delta, s)=p_{\tau\tau}^{\prime\prime}(y, x, \delta, \eta, \nabla_x \xi, \tau)(D_s \varphi), \tag{4.64}$$

nous obtenons le résultat cherché. □

4.3. Recollement des solutions asymptotiques. Les constructions précédentes nous donnent une famille de fonctions u_δ dépendant du paramètre $\delta > 0$ qui pour t près de δ vérifient $Pu_\delta = 0$.

Dans la suite, on donne à δ la suite de valeurs $\delta_k = b_k = k^{-\rho}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\rho > 0$. On note $\nu = \nu_k = k^\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et $\sigma = \sigma_k = (\lambda_k^{3/2}\nu_k)^{m_n}$. On notera pour $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$, $t = \delta_k + s/\lambda_k$, la fonction

$$\begin{aligned} u_k\left(y, x, \delta_k+\frac{s}{\lambda_k}\right)= & e^{i(\sum_{j=1}^{q-1} \sigma^{1/m_j} \eta_j y_j+\sigma^{1/m_n}(\tilde{\xi}(y, x, \delta_k)+(s/\lambda_k) \tau(y, x, \delta_k)))} \\ & \times e^{\nu_k \varphi(y, x, \delta_k, s)} e^{-\gamma(y, x, \delta_k)} w(y, x, \delta_k, s). \end{aligned} \tag{4.65}$$

On a pour k assez grand et $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$

$$|s| = \lambda_k |t-\delta_k| \leq \lambda_k |\delta_{k-1}-\delta_k| \simeq \rho k^{\rho(\theta-1)-1}. \tag{4.66}$$

Notons (c.1) la condition suivante :

(c.1) $\rho(\theta-1)-1 < 0$.

Si (c.1) est vérifiée, la fonction u_k est bien définie.

L'opérateur $\tilde{P}$ défini par (4.4) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \tilde{P}= & \sigma P_m\left(y, x, \delta+\frac{s}{\lambda},\left(\eta_j+\sigma^{1/m_n-1/m_j}\left(\nabla_j \tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda} \nabla_j \tau\right)+\frac{\nu}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} \nabla_j \varphi\right.\right. \\ & \left.\left.\quad-\frac{1}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_j}} \nabla_j \gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_j}} D_{y_j}\right)_{j \leq q-1} ; \nabla_x \tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda} \nabla_x \tau\right. \\ & \left.+\frac{\nu}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} \nabla_x \varphi-\frac{1}{i} \frac{1}{\sigma^{1/m_n}} \nabla_x \gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_n}} D_x, \tau+\frac{\lambda \nu}{\sigma^{1/m_n}}(D_s \varphi+D_s)\right) \\ & +\sigma^\kappa(\cdots)+\cdots \end{aligned} \tag{4.67}$$

avec $\kappa < 1$.

On impose que la fonction γ et les paramètres λ, σ, δ vérifient les conditions suivantes :

(c.2) $\sigma^{-1/m_j}\nabla_j\gamma$ bornée pour δ voisin de zéro,

(c.3) $\sigma^{-1/m_n}\nabla_x\gamma$ bornée pour δ voisin de zéro,

(c.4) $\lambda^{-1}\sigma^{1/m_n} - 1/m_j$ bornée pour δ voisin de zéro.

4.3.1. Choix de γ. On va déterminer la fonction $\gamma(y,x,\delta)$ de sorte qu'on puisse "recoller" les fonctions u_k. Pour cela on choisira les fonctions $\gamma(y,x,\delta_k)$ de sorte que $|u_k| \gg |u_{k+1}|$ près de δ_k ; $|u_{k+1}| \gg |u_k|$ près de δ_{k+1} et $|u_k| = |u_{k+1}|$ en un point proche du milieu de $[\delta_k,\delta_{k+1}]$.

Pour obtenir ce résultat on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.5. *Posons pour $t \in [\delta_{k+1},\delta_{k-1}]$*

$$\begin{aligned} G_k(y,x,t) &= \nu_k \operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_k,s_k) \\ &\qquad - \nu_{k+1}\operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1}), \quad s_j = \lambda_j(t-\delta_j). \end{aligned} \tag{4.68}$$

Notons $t_k = \delta_k/3 + (2/3)\delta_{k+1}$ et $I_k(y,x) = G_k(y,x,t_k)$, alors

$$I_k(y,x) \simeq -\alpha(y,x,0)\frac{\rho}{3}k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}, \quad \textit{quand } k \longrightarrow +\infty. \tag{4.69}$$

Preuve. On a $s_k = \lambda_k(t-\delta_k)$. On pose $l_k = (1/3)(\delta_k - \delta_{k+1})$. Alors $l_k \simeq (\rho/3)k^{-\rho-1}$ pour k assez grand. Ainsi pour $t = t_k = \delta_k - 2l_k = \delta_{k+1} + l_k$ on a $s_k = \lambda_k(t_k - \delta_k) = -2\lambda_k l_k$ et $s_{k+1} = \lambda_{k+1} l_k$. On a donc

$$\begin{aligned} &\nu_k \operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_k,s_k) - \nu_{k+1}\operatorname{Re}\varphi(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1}) \\ &\quad = k^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_k)s_k + \beta(y,x,\delta_k,s_k)s_k^2] \\ &\qquad - (k+1)^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_{k+1})\cdot s_{k+1} + \beta(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\cdot s_{k+1}^2] \\ &\quad = k^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_k)(-2k^{\rho\theta}l_k + \beta(y,x,\delta_k,s_k)(4k^{2\rho\theta}l_k^2))] \\ &\qquad - (k+1)^{\varepsilon}[\alpha(y,x,\delta_{k+1})(k+1)^{\rho\theta}l_k + \beta(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})l_k^2(k+1)^{2\rho\theta}] \\ &\quad = -\frac{\rho}{3}[2\alpha(y,x,\delta_k)k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} + \alpha(y,x,\delta_{k+1})(k+1)^{\varepsilon+\rho\theta}k^{-\rho-1}] \\ &\qquad + l_k^2[4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1}(k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}]. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Notons $E_1 = -(\rho/3)[2\alpha(y,x,\delta_k)k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} + \alpha(y,x,\delta_{k+1})(k+1)^{\varepsilon+\rho\theta}k^{-\rho-1}]$ et $E_2 = l_k^2[4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1}(k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}]$.

On commence par calculer E_1. On a pour k assez grand

$$\alpha(y,x,\delta_k) = \alpha(y,x,k^{-\rho}) = \alpha(y,x,0) + O(k^{-\rho}), \tag{4.71}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_1 = k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1}\Big[&-\frac{2\rho}{3}\alpha(y,x,0) + O(k^{-\rho}) \\ &-\frac{\rho}{3}\alpha(y,x,0)\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon+\rho\theta} + O((k+1)^{-\rho})\Big], \end{aligned} \tag{4.72}$$

par suite

$$E_1 \simeq -k^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1}\rho\alpha(y,x,0), \tag{4.73}$$

quand k tend vers l'infini. L'expression E_2 s'écrit aussi sous la forme

$$E_2 = l_k^2[4\beta_k k^{2\rho\theta+\varepsilon} - \beta_{k+1}(k+1)^{2\rho\theta+\varepsilon}] \tag{4.74}$$

or on a

$$l_k^2 \simeq \frac{\rho^2}{9} k^{-2\rho-2} \tag{4.75}$$

quand k tend vers $+\infty$ et

$$\beta(y,x,s_k,\delta_k) = \beta(y,x,s_k,k^{-\rho}) = \beta(y,x,s_k,0) + O(k^{-\rho}). \tag{4.76}$$

On a

$$\begin{aligned} s_k &= \lambda_k(t_k - \delta_k) = \delta_k^{-\theta}\left[\frac{1}{3}\delta_k + \frac{2}{3}\delta_{k+1} - \delta_k\right] \\ &= \frac{2}{3}\delta_k^{-\theta}[\delta_{k+1} - \delta_k] = -2\delta_k^{-\theta} l_k \simeq -\frac{2}{3}\rho k^{\rho\theta-\rho-1}, \quad \text{quand } k \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{4.77}$$

D'où, quand k tend vers l'infini on a

$$s_k \simeq -\frac{2}{3}\rho k^{\rho\theta-\rho-1}, \qquad s_{k+1} \simeq \frac{1}{3}\rho k^{\rho\theta-\rho-1}. \tag{4.78}$$

Ainsi on a

$$\beta_k = \beta(y,x,s_k,\delta_k) = \beta(y,x,0,0) + O(k^{\rho\theta-\rho-1}) + O(k^{-\rho}). \tag{4.79}$$

On en déduit que

$$E_2 \simeq \beta(y,x,0,0)\frac{\rho^2}{3}k^{2(\rho(\theta-1)-1)+\varepsilon}, \tag{4.80}$$

quand $k \to +\infty$. Par suite on a

$$E_1 + E_2 \simeq -\rho\alpha(y,x,0)k^{\varepsilon+\rho(\theta-1)-1}, \quad \text{quand } k \longrightarrow +\infty. \tag{4.81}$$

On obtient ainsi le résultat du lemme 4.5. □

Démontrons maintenant le résultat énoncé au début du paragraphe 4.3.1. On pose pour k_0 assez grand

$$\gamma_k(y,x) = -\sum_{j=k_0}^{k-1} I_j(y,x), \tag{4.82}$$

on a

$$(\gamma_{k+1} - \gamma_k)(y,x) = -I_k(y,x). \tag{4.83}$$

D'après (4.69), on a

$$I_k(y,x) \simeq -\alpha(y,x,0)\rho k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}, \tag{4.84}$$

le signe de l'expression $\rho(\theta-1)+\varepsilon-1$ nous sera imposé ultérieurement par la condition (c.7). Ainsi on a

$$I_k(y,x) \simeq -\int_k^{k+1} \alpha(y,x,0)\rho u^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} du. \tag{4.85}$$

On peut donc écrire

$$y_k(y,x) \simeq \int_{k_0}^{k} \alpha(y,x,0)\rho u^{\varepsilon+\rho\theta-\rho-1} du, \tag{4.86}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_k(y,x) &\simeq \frac{\rho k^{\varepsilon+\rho(\theta-1)}}{(\varepsilon+\rho(\theta-1))}\alpha(y,x,0) \\ &\simeq \frac{\rho \delta^{-(\theta-1+\varepsilon/\rho)}}{(\varepsilon+\rho(\theta-1))}\alpha(y,x,0). \end{aligned} \tag{4.87}$$

Vérifions (c.2), (c.3) et (c.4). On a $\sigma^{1/m_j} = (\lambda_k^{3/2}\nu_k)^{m_n/m_j}$, d'où

$$\sigma = \left(k^{3/2\rho\theta}k^{\varepsilon}\right)^{m_n}, \qquad \sigma^{1/m_j} = \left(k^{\varepsilon+(3/2)\rho\theta}\right)^{m_n/m_j}. \tag{4.88}$$

Posons $\Gamma_j = m_n/m_j > 1$, alors

$$\begin{aligned} \sigma^{-1/m_j}\nabla_y y_k(y,x) &\simeq \frac{\rho}{(\varepsilon+\rho(\theta-1))}\nabla_y \alpha(y,x,0)\delta^{-((\theta-1+\varepsilon/\rho)-\Gamma_j((3/2)\theta+\varepsilon/\rho))}, \\ \theta-1+\frac{\varepsilon}{\rho}-\Gamma_j\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{\varepsilon}{\rho}\right) &= \theta\left(1-\frac{3\Gamma_j}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{\rho}(1-\Gamma_j)-1 < 0. \end{aligned} \tag{4.89}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \sigma^{-1/m_n}\nabla_x y(y,x,\delta_k) &\simeq \nabla_x \alpha(y,x,0)\frac{\rho}{\varepsilon+\rho(\theta-1)}\delta^{-((\theta-1+\varepsilon/\rho)-(3/2)\theta-\varepsilon/\rho)} \\ &\simeq \nabla_x \alpha(y,x,0)\frac{\rho}{\varepsilon+\rho(\theta-1)}\delta^{\theta/2+1}, \\ \lambda_k^{-1}\sigma_k^{1/m_n-1/m_j} &\simeq k^{\rho\theta(-(3/2)\Gamma_j+1/2)}k^{\varepsilon(1-\Gamma_j)}. \end{aligned} \tag{4.90}$$

On remarque que le second membre de cette dernière équivalence tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Ainsi les conditions (c.2), (c.3) et (c.4) sont vérifiées. On choisira θ et ρ de telle sorte que la condition (c.1) est vérifiée.

4.3.2. Équation de transport et choix de w

Lemme 4.6. *On a*

$$\frac{1}{\sigma}\tilde{P} = \frac{1}{\lambda\nu}\left[H(y,x,\delta,s)D_s + K(y,x,\delta,s) + \delta^{\tilde{r}}\tilde{Q}(y,x,\delta,s,D_y,D_x,D_s)\right], \tag{4.91}$$

où H, K et les coefficients de $\tilde{Q}$ sont réguliers, $H(0,0,0,0) \neq 0$, $\tilde{r} > 0$, à condition que l'on ait

(c.5) $\varepsilon[1-m_n(1-\kappa)] < \rho\theta[3m_n(1-\kappa)/2-1]$ *pour tout* κ, $0 \leq \kappa \leq 1-1/m_n$ *et*

(c.6) $\varepsilon < \rho\theta/2$; $\varepsilon < \rho(1-\theta/2)$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\tilde P = P_m\Bigg(&y,x,\delta+\frac{s}{\lambda},\bigg(\eta_j+\sigma^{1/m_n-1/m_j}\Big(\nabla_j\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_j\tau\Big)+\frac{\nu}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}\nabla_j\varphi\\ &-\frac{1}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}\nabla_j\gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_j}}D_{y_j}\bigg)_{j\le q-1};\nabla_x\tilde{\xi}+\frac{s}{\lambda}\nabla_x\tau\\ &+\frac{\nu}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}\nabla_x\varphi-\frac{1}{i}\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}\nabla_x\gamma+\frac{1}{\sigma^{1/m_n}}D_x,\tau+\frac{\lambda\nu}{\sigma^{1/m_n}}(D_s\varphi+D_s)\Bigg)\\ &+\sigma^{\kappa-1}(\cdots)+\cdots\end{aligned}\tag{4.92}$$

avec $\kappa<1$. En utilisant un développement de Taylor de P_m à l'ordre 1 au point $X=(y,x,\delta+s/\lambda,\eta,\nabla_x\tilde{\xi}+(s/\lambda)\nabla_x\tau,\tau+(\lambda\nu/\sigma^{1/m_n})(D_s\varphi+D_s))$, on remarque d'après le corollaire 4.4 que $\sigma^{-1}\tilde P$ s'écrit sous la forme (4.91) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sigma^{\kappa-1}=o(1/\lambda\nu)$,

(ii) $\delta^{-d}\sigma^{-1/m_n}=o(1/\lambda\nu)$, $\delta^{-d}\sigma^{-1/m_j}=o(1/\lambda\nu)$ avec $d=\theta-1+\varepsilon/\rho$,

(iii) $\nu\sigma^{-1/m_n}=o(1/\lambda\nu)$, $\nu\sigma^{-1/m_j}=o(1/\lambda\nu)$.

La condition (i) est vraie d'après (c.5), ainsi les termes de $\sigma^{-1}\tilde P$ provenant des termes d'ordre inférieurs de P sont inclus dans $\delta^{\tilde r}\tilde Q$. La condition (ii) est vraie d'après la deuxième partie de (c.6). La condition (iii) est vraie d'après la première partie de (c.6).

Déterminons la suite de fonctions $w_j(y,x,\delta,s)$, $j\ge 0$, par

$$\begin{aligned}(HD_s+K)w_0&=0, & w_0(y,x,\delta,0)&=1,\\ (HD_s+K)w_j&=-\tilde Q w_{j-1}, & w_j(y,x,\delta,0)&=0,\quad j\ge 1.\end{aligned}\tag{4.93}$$

Ainsi la solution formelle $\tilde w=\sum_{j\ge0}w_j\delta^{j\tilde r}$ sera alors la solution de

$$(HD_s+K+\delta^{\tilde r}\tilde Q)\tilde w=0.\tag{4.94}$$

On prend une fonction de (y,x,δ,s,z), $Z(y,x,\delta,s,z)$, C^∞ près de $(0,0,0,0)$, telle que

$$Z\sim\sum_{j\ge0}w_jz^j,\tag{4.95}$$

quand z tend vers 0, au sens suivant :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^{\,n-q},\ \forall\beta\in\mathbb{N}^{\,q-1},\ \forall N\in\mathbb{N},\quad\exists\, c_{k\alpha\beta N}\ge 0,\tag{4.96}$$

tel que pour (y,x,δ,s,z) près de l'origine on a

$$\left|D_s^kD_x^\alpha D_y^\beta\Big(Z-\sum_{j=0}^{N}w_jz^j\Big)\right|\le c_{k\alpha\beta N}|z|^{N+1}.\tag{4.97}$$

Si on prend $w(y,x,\delta,s)=Z(y,x,\delta,s,\delta^{\tilde r})$, on obtient $(HD_s+K+\delta^{\tilde r}\tilde Q)w=o(\delta^\infty)$. □

Lemme 4.7. *Pour tout $t \in [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$; $(y,x) \in V$ où V est un voisinage de $(0,0)$, soit*

$$\begin{aligned} u_k(y,x,t) &= e^{i\sum_{j=1}^{q-1}\sigma^{1/m_j}\eta_j y_j + \sigma^{1/m_n}(\xi(y,x,\delta_k)+(t-\delta_k)\tau(y,x,\delta_k))} \\ &\quad \times e^{\nu_k \varphi(y,x,\delta_k,s)} e^{-\gamma(y,x,\delta_k)} w(y,x,\delta_k,s) \end{aligned} \tag{4.98}$$

avec $s = \lambda_k(t-\delta_k)$ et soit $f_k = Pu_k/u_k$. Alors il existe $k_0 > 0$ tel qu'on a

$$\begin{aligned} &\forall (\beta,\alpha,l) \in \mathbb{N}^{q-1}\times\mathbb{N}^{n-q}\times\mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ N \text{ assez grand},\quad \exists c_{\alpha\beta lN} > 0;\ \exists\, \Gamma_N > 0 \\ &\qquad\qquad \text{tels que } \left|D_y^\beta D_x^\alpha D_t^l f_k(y,x,t)\right| \le c_{\alpha\beta lN} k^{-\Gamma_N} \end{aligned} \tag{4.99}$$

pour tout k, $k \ge k_0$ et $(y,x,t) \in V \times [\delta_{k+1}, \delta_{k-1}]$.

Preuve. On a $Pu_k/u_k = \tilde{P}w_k/w_k = (\sigma/\lambda\nu)(1/w_k)[(HD_s + K + \delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})w_k]$. Or

$$w_k = \sum_{j=0}^{N-1} (\delta^{\tilde{r}})^j w_j(y,x,s,\delta_k) + (\delta^{\tilde{r}})^N R_N(y,x,s,\delta_k) \tag{4.100}$$

avec R_N fonction de classe C^∞ et bornée dans un voisinage de zéro. D'où

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{\sigma}{\lambda\nu}\frac{1}{w_k}\Bigg[\sum_{j=0}^{N-1}(\delta_k^{\tilde{r}})^j(HD_s+K)w_j \\ &\qquad + (\delta_k^{\tilde{r}})^N(HD_s+K)R_N + \sum_{j=0}^{N-1}(\delta_k^{\tilde{r}})^j\tilde{Q}w_j + (\delta_k^{\tilde{r}})^{N+1}\tilde{Q}R_N\Bigg] \\ &= \frac{\sigma}{\lambda\nu}\frac{1}{w_k}\Big[(HD_s+K)w_0 + \left(\delta_k^{\tilde{r}}\right)^N\tilde{Q}w_{N-1} + (\delta^{\tilde{r}})^N(HD_s+K\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N\Big] \\ &= \frac{(k^{3\rho\theta/2+\varepsilon})^{m_n}}{k^{\rho\theta+\varepsilon}}\frac{1}{w_k}k^{-\rho\tilde{r}N}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N] \\ &= k^{\rho\theta((3/2)m_n-1)+\varepsilon(m_n-1)\rho\tilde{r}N}\frac{1}{w_k}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N] \\ &= k^{\rho[-\tilde{r}N+\theta((3/2)m_n-1)]+\varepsilon(m_n-1)}\frac{1}{w_k}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N] \\ &= k^{-\rho[\tilde{r}N-\theta((3/2)m_n-1)]+\varepsilon(m_n-1)}\frac{1}{w_k}[\tilde{Q}w_{N-1} + (HD_s+K+\delta^{\tilde{r}}\tilde{Q})R_N]. \end{aligned} \tag{4.101}$$

On en déduit que $|f_k| \le C_N k^{-\Gamma_N}$. On procède de même pour les dérivées de f_k. □

4.3.3. Étude de l'ensemble où $|u_k| = |u_{k+1}|$. Pour $(y,x,t) \in V\times[\delta_{k+1},\delta_{k-1}]$, V est un voisinage de $(0,0) \subset \mathbb{R}^{q-1}\times\mathbb{R}^{n-q}$ posons

$$F_k(y,x,t) = \log\left|\frac{u_k}{u_{k+1}}\right|. \tag{4.102}$$

Lemme 4.8. *Il existe des constantes c et η strictement positives telles qu'on ait*

$$\frac{\partial F_k}{\partial t} \ge ck^\eta \tag{4.103}$$

avec

(c.7) $\varepsilon+\rho(\theta-1)-1>0$, $\eta=2\rho\theta-\rho+\varepsilon-1$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_k}{\partial t}&=\Big[\lambda_k\nu_k\frac{\partial\operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_k,\delta_k)-\lambda_{k+1}\nu_{k+1}\frac{\partial\operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\Big]\\&\quad+\Big[\lambda_k\frac{w'_s(y,x,s_k,\delta_k)}{w(y,x,s_k,\delta_k)}-\lambda_{k+1}\frac{w'_s(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})}{w(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})}\Big],\end{aligned}\tag{4.104}$$

On note $E_3=[\lambda_k(w'_s(y,x,s_k,\delta_k)/w(y,x,s_k,\delta_k))-\lambda_{k+1}(w'_s(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})/w(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}))]$.

on écrira

$$\frac{\partial F_k}{\partial t}=\Big[\lambda_k\nu_k\frac{\partial\operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_k,\delta_k)-\lambda_{k+1}\nu_{k+1}\frac{\partial\operatorname{Re}\varphi}{\partial s}(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\Big]+E_3.\tag{4.105}$$

D'après (4.25) on a

$$\operatorname{Re}\varphi(y,x,s,\delta)=\alpha(y,x,\delta)s+\beta(y,x,\delta,s)s^2,\tag{4.106}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial\operatorname{Re}\varphi}{\partial s}&=\alpha(y,x,\delta)+2\beta(y,x,\delta,s)s+\beta'_s(y,x,\delta,s)s^2\\&=\alpha(y,x,\delta)+s(2\beta(y,x,\delta,s)+\beta'_s(y,x,\delta,s)s)\\&=\alpha(y,x,\delta)+\beta_1(y,x,\delta,s)s,\end{aligned}\tag{4.107}$$

où $\beta_1(y,x,\delta,s)=2\beta(y,x,\delta,s)+\beta'_s(y,x,\delta,s)s$, avec $\beta_1(0,0,0,0)<0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_k}{\partial t}&\\&=[(\lambda_k\nu_k-\lambda_{k+1}\nu_{k+1})\alpha(y,x,\delta_k)]\\&\quad+[\lambda_{k+1}\nu_{k+1}(\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1}))]\\&\quad+\Big[-\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\frac{(t-\delta_{k+1})}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\nu_{k+1}+\beta_1(y,x,\delta_k,s_k)\frac{(t-\delta_k)}{\delta_k^{2\theta}}\nu_k\Big]+E_3\\&=[(\lambda_k\nu_k-\lambda_{k+1}\nu_{k+1})\alpha(y,x,\delta_k)]+[\lambda_{k+1}\nu_{k+1}(\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1}))]\\&\quad+\Big[-\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})\Big(\frac{(t-\delta_{k+1})}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\Big)\nu_{k+1}+\beta_1(y,x,\delta_k,s_k)\Big(\frac{(t-\delta_k)}{\delta_k^{2\theta}}\Big)\nu_k\Big]+E_3.\end{aligned}\tag{4.108}$$

Notons $E_4=[(\lambda_k\nu_k-\lambda_{k+1}\nu_{k+1})\alpha(y,x,\delta_k)]$, $E_5=[\lambda_{k+1}\nu_{k+1}(\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1}))]$ et $E_6=[-\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1})((t-\delta_{k+1})/\delta_{k+1}^{2\theta})\nu_{k+1}+\beta_1(y,x,\delta_k,s_k)((t-\delta_k)/\delta_k^{2\theta})\nu_k]$.

Évaluons E_4, nous avons

$$|E_4|\le c_0|\lambda_k-\lambda_{k+1}|\le c_1k^{\rho\theta+\varepsilon-1},\quad \text{avec } c_0>0,\ c_1>0.\tag{4.109}$$

La fonction $\alpha(y,x,\delta)$ étant de classe C^∞ par rapport à (y,x,δ^r) avec $r>0$, alors il existe des constantes $c'>0$ et $c''>0$ telles que

$$|\alpha(y,x,\delta_k)-\alpha(y,x,\delta_{k+1})|\le c'(\delta_k^r-\delta_{k+1}^r)\le c''k^{-\rho r-1}.\tag{4.110}$$

On en déduit qu' il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $|E_5| \leq c_2 k^{\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1}$. Estimons E_6,

$$\begin{aligned}
E_6 &= -\beta_1(y,x,\delta_{k+1},s_{k+1}) \\
&\quad \times \left[\left(\frac{t-\delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{t-\delta_k}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\right)\nu_{k+1} + (t-\delta_k)\left(\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}\right)\right] \\
&\quad - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}(t-\delta_k)[\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)], \\
&= -\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\left[\frac{\delta_k-\delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\nu_{k+1}\right] \\
&\quad -\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\left[\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}\right](t-\delta_k) \\
&\quad - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}(t-\delta_k)[\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)].
\end{aligned} \tag{4.111}$$

Pour k assez grand on a $(\delta_k-\delta_{k+1})/\delta_{k+1}^{2\theta} \simeq \rho k^{2\theta-\rho-1}$ et $\nu_{k+1} \simeq k^{\varepsilon}$. Comme $\beta_1(0,0,0,0) < 0$ il existe donc une constante $\tilde{c}_0 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
-\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\left[\frac{\delta_k-\delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\nu_{k+1}\right] &= -\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\left[\frac{\delta_k-\delta_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}}\nu_{k+1}\right] \\
&\geq \tilde{c}_0 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.112}$$

On a $\nu_k/\delta_k^{2\theta} \simeq k^{2\rho\theta+\varepsilon}$, d'où on a $\nu_{k+1}/\delta_{k+1}^{2\theta} - \nu_k/\delta_k^{2\theta} \simeq (2\rho\theta+\varepsilon)k^{2\rho\theta+\varepsilon-1}$. Comme $t \in [\delta_{k+1},\delta_{k-1}]$, on a $|t-\delta_k| \leq c^{te}\rho k^{-\rho-1}$. On en déduit qu'il existe une constante $\tilde{c}_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\left|-\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\left[\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}\right](t-\delta_k)\right| \\
&\qquad = \left|(t-\delta_k)\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1})\left[\frac{\nu_{k+1}}{\delta_{k+1}^{2\theta}} - \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}\right]\right| \\
&\qquad \leq \tilde{c}_1 k^{2\rho\theta+\varepsilon-2-\rho}.
\end{aligned} \tag{4.113}$$

On a

$$\begin{aligned}
&-\frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}(t-\delta_k)[\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)] \\
&\qquad = \frac{\nu_k}{\delta_k^{2\theta}}(t-\delta_k)[\beta_1(y,x,s_{k+1},\delta_{k+1}) - \beta_1(y,x,s_k,\delta_k)] \\
&\qquad = o(k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Ainsi on déduit qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $E_6 \geq c_3 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}$ On voit facilement qu'il existe une constante $c_4 > 0$ telle que $|E_3| \leq c_4 k^{\rho\theta}$. On a donc obtenu les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
|E_4| &\le c_0|\lambda_k-\lambda_{k+1}| \le c_1 k^{\rho\theta+\varepsilon-1}, \quad \text{avec } c_0>0,\ c_1>0,\\
|E_5| &\le c_2 k^{\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1}, \quad \text{avec } c_2>0,\\
E_6 &\ge c_3 k^{2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon}, \quad \text{avec } c_3>0,\\
|E_3| &\le c_4 k^{\rho\theta}, \quad \text{avec } c_4>0.
\end{aligned} \tag{4.115}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\rho\theta+\varepsilon-1 \le 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \quad (\text{car } \theta>1 \text{ et } \rho>0),\\
&\rho\theta+\varepsilon-\rho r-1 \le 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \quad (\text{car } r>0,\ \rho>0 \text{ et } \theta>1),\\
&\rho\theta<2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \iff \rho(\theta-1)-1+\varepsilon>0 \quad (\text{d' après (c.7)}).
\end{aligned} \tag{4.116}$$

On en déduit qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour k assez grand

$$\frac{\partial F_k}{\partial t}(y,x,t) \ge ck^{\eta}, \quad \text{avec } \eta = 2\rho\theta-\rho-1+\varepsilon \tag{4.117}$$

d'où le lemme 4.8. □

Estimons maintenant la fonction F_k. D'après les expressions (4.68), (4.98) et (4.102) on peut écrire

$$\begin{aligned}
F_k(y,x,t) &= \gamma(y,x,\delta_{k+1})-\gamma(y,x,\delta_k)+G_k(y,x,t)\\
&\quad+\log\left(\left|\frac{w(y,x,\delta_k,\lambda_k(t-\delta_k))}{w(y,x,\delta_{k+1},\lambda_{k+1}(t-\delta_{k+1}))}\right|\right).
\end{aligned} \tag{4.118}$$

En utilisant (4.87) et en prenant $t=t_k=(1/3)\delta_k+(2/3)\delta_{k+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
F_k(y,x,t_k) &= \gamma(y,x,\delta_{k+1})-\gamma(y,x,\delta_k)+I_k(y,x)\\
&\quad+\log\left(\left|\frac{w(y,x,\delta_k,\lambda_k(t_k-\delta_k))}{w(y,x,\delta_{k+1},\lambda_{k+1}(t_k-\delta_{k+1}))}\right|\right)\\
&=\log\left(\left|\frac{w(y,x,\delta_k,\lambda_k(t_k-\delta_k))}{w(y,x,\delta_{k+1},\lambda_{k+1}(t_k-\delta_{k+1}))}\right|\right)\\
&=O(1).
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Ainsi $F_k(y,x,t_k)$ est bornée indépendemment de k. Pour que $k^{\eta}l_k$ tende vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ il faut que

(c.8) $2\rho\theta+\varepsilon-2(\rho+1)>0$.

D'après (4.103), on a $F_k(y,x,t)$ s'annule en un point d'un intervalle contenant t_k. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $t_k(y,x)$ de classe C^{∞} sur un voisinage V_0 de $(0,0)$ à valeurs dans un intervalle ouvert de $[\delta_{k+1},\delta_k]$, telle que $F_k(y,x,t_k(y,x))=0$. Par ailleurs, on vérifie que $t_k(y,x)=t_k+e_k(y,x)$, avec $e_k(y,x)=O(k^{-\eta})$.

Les étapes suivantes étant standard, les démonstrations sont les mêmes que dans [1, 3]. On ne mentionnera que les étapes, laissant le lecteur se rapporter à [3] pour les détails.

4.3.4. Modification des u_k. On va modifier légèrement les fonctions u_k de manière à pouvoir bien définir la perturbation a.

On construit une suite de fonctions, $y_k(y,x,s)$, nulles sur les surfaces $t=t_k(y,x)$ et $t=t_{k-1}(y,x)$, plus petites que toute puissance de $1/k$ pour $t\in[\delta_{k+1},\delta_{k-1}]$, telles que, en notant

$$v_k(y,x,t)=u_k(y,x,t)\big(1+y_k(y,x,s)\big), \tag{4.120}$$

on a

(1) $\tilde{F}_k=\log(|v_k/v_{k+1}|)$ satisfait (4.103) et s'annule pour $t=t_k(y,x)$,
(2) $g_k=Pv_k/v_k$ satisfait (4.99),
(3) g_k est plate sur $\{(y,x,t):\ t=t_k(y,x)\}$ et $\{(y,x,t):t=t_{k-1}(y,x)\}$.

Cette construction utilise uniquement le lemme 4.7 et le fait que les surfaces $t=c^{te}$ sont non caractéristiques pour P.

4.4. Dernière étape. On choisit χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à support compact telle que

$$\chi(s)=1\quad\text{pour } |s|\le\frac{3}{4},\qquad \operatorname{supp}\chi\subset[-1,1],\quad 0\le\chi\le 1. \tag{4.121}$$

On pose $\chi_k(t)=\chi((t-\delta_k)/3l_k)$ et $u(y,x,t)=\sum_{k\ge k_0}\chi_k(t)v_k(y,x,t)$, k_0 est un entier assez grand. On vérifie alors que $a=-Pu/u$ est une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de zéro, plate sur $t=0$.

Il reste à vérifier que u est plate sur $t=0$. Or, ce résultat découle du fait que d'après l'expression (4.87), la fonction $y_k(y,x)$ est $O(k^{\rho(\theta-1)+\varepsilon})$ et $|v_k\operatorname{Re}\varphi(y,x,t)|\le Ck^{\rho(\theta-1)+\varepsilon-1}$.

4.5. Compatibilité des conditions (c.1),...,(c.8) et choix effectif des paramètres. Par hypothèse nous avons $\theta>1$, $\varepsilon>0$, $\rho>0$ et $K\le(1-1/m_n)$. Les conditions sont

(c.1) $\rho(\theta-1)-1<0$,
(c.5) $\varepsilon[1-m_n(1-K)]<\rho\theta[3m_n(1-K)/2-1]$,
(c.6) $\varepsilon<\rho\theta/2$ et $\varepsilon<\rho(1-\theta/2)$,
(c.7) $\varepsilon+\rho(\theta-1)-1>0$,
(c.8) $2\rho\theta+\varepsilon-2(\rho+1)>0$,

fixons $\theta=9/8$, $\varepsilon=3/4$ et choisissons $\rho=6$. Ainsi les conditions (c.1), (c.2), (c.3), (c.4), (c.5), (c.6), (c.7) et (c.8) sont vérifiées. Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

Bibliographie

[1] S. Alinhac, *Non-unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal*, Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, Equations Deriv. Partielles 1980–1981, Exposé no. 16, École Polytechnique, Paris, 1981, pp. 1–8 (French).

[2] L. Hörmander, *Non-uniqueness for the Cauchy problem*, Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations (Colloq. Internat., Université de Nice, Nice, 1974), Lecture Notes in Mathematics, vol. 459, Springer, Berlin, 1975, pp. 36–72.

[3] R. Lascar and C. Zuily, *Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques doubles*, Duke Math. J. **49** (1982), no. 1, 137–162.

[4] A. Pliś, *A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 599–617.

Khalgui-Ounaïes Hella : Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 1060 Tunis, Tunisia
E-mail address: hella.khalgui@fst.rnu.tn

Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences

Special Issue on Intelligent Computational Methods for Financial Engineering

Call for Papers

As a multidisciplinary field, financial engineering is becoming increasingly important in today's economic and financial world, especially in areas such as portfolio management, asset valuation and prediction, fraud detection, and credit risk management. For example, in a credit risk context, the recently approved Basel II guidelines advise financial institutions to build comprehensible credit risk models in order to optimize their capital allocation policy. Computational methods are being intensively studied and applied to improve the quality of the financial decisions that need to be made. Until now, computational methods and models are central to the analysis of economic and financial decisions.

However, more and more researchers have found that the financial environment is not ruled by mathematical distributions or statistical models. In such situations, some attempts have also been made to develop financial engineering models using intelligent computing approaches. For example, an artificial neural network (ANN) is a nonparametric estimation technique which does not make any distributional assumptions regarding the underlying asset. Instead, ANN approach develops a model using sets of unknown parameters and lets the optimization routine seek the best fitting parameters to obtain the desired results. The main aim of this special issue is not to merely illustrate the superior performance of a new intelligent computational method, but also to demonstrate how it can be used effectively in a financial engineering environment to improve and facilitate financial decision making. In this sense, the submissions should especially address how the results of estimated computational models (e.g., ANN, support vector machines, evolutionary algorithm, and fuzzy models) can be used to develop intelligent, easy-to-use, and/or comprehensible computational systems (e.g., decision support systems, agent-based system, and web-based systems)

This special issue will include (but not be limited to) the following topics:

- **Computational methods**: artificial intelligence, neural networks, evolutionary algorithms, fuzzy inference, hybrid learning, ensemble learning, cooperative learning, multiagent learning
- **Application fields**: asset valuation and prediction, asset allocation and portfolio selection, bankruptcy prediction, fraud detection, credit risk management
- **Implementation aspects**: decision support systems, expert systems, information systems, intelligent agents, web service, monitoring, deployment, implementation

Authors should follow the Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences manuscript format described at the journal site http://www.hindawi.com/journals/jamds/. Prospective authors should submit an electronic copy of their complete manuscript through the journal Manuscript Tracking System at http://mts.hindawi.com/, according to the following timetable:

Manuscript Due	December 1, 2008
First Round of Reviews	March 1, 2009
Publication Date	June 1, 2009

Guest Editors

Lean Yu, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; Department of Management Sciences, City University of Hong Kong, Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong; yulean@amss.ac.cn

Shouyang Wang, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; sywang@amss.ac.cn

K. K. Lai, Department of Management Sciences, City University of Hong Kong, Tat Chee Avenue, Kowloon, Hong Kong; mskklai@cityu.edu.hk

Hindawi Publishing Corporation
http://www.hindawi.com