Éléments de Géométrie Riemannienne Infinitésimale

Cristian N. Costinescu

Résumé

Le but de cette note est de pousser un peu plus loin l'étude fait dans [2] et [3] sur les points infiniment petits situés sur des courbes et des surfaces.

Mathematics Subject Classification: 53A99, 53A04
Key words: limited point, generalized Frenet formulas.

1 Introduction

On va utiliser les métodes infinitésimales de l'analyse non standard pour aborder certains problèmes de géométrie.

L'étude d'un simple point, non situé a priori sur un objet géométrique, est résumé par Michel Goze dans son "théorème de décomposition du point" (voir [2] et [3]). Ce point, supposé non standard et limité, définit un repère standard (i.e. une géométrie) et détermine un développement analytique.

Si le point est situé sur des courbes et surfaces, il est naturel de comparer les deux géométries: celle définie par le point et la géométrie intrinséque des objets en question. Par exemple, le repère orthonormé engendré par un point coïncide avec le repère mobile de Frenet, associé au point considéré à une variété riemannienne.

Dans la section 3 on donne aussi (pour la première fois à ma connaissance) une généralisation - dans le cadre envisagé - des formules classiques de Frenet.

En ce qui concerne le cas des points situés sur des surfaces, l'étude est beaucoup plus compliqué. Dans la section 4 on trouve seulement une approche de problèmes difficiles qui y peuvent paraître.

J'ai eu des nombreuses discussions avec mon ami Viorel Petrehuş sur l'analyse non standard et ses applicarions. Je le remercie vivement pour sa permanente disponibilité.

2 Decomposition d'un point infiniment petit (d'apres Goze [1], [2] et [3])

On se place dans le cadre de la théorie des ensembles internes d'Edward Nelson ([4]). Il est utile à ce sujet de rappeler la terminologie et quelques remarques:

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.6, No.2, 2001, pp. 17-26

- les nombres entiers standard sont les éléments de **N**.

- dans **R** on distinge les nombres limités (i.e. inférieurs en valeur absolue à un nombre standard), les nombres non limités (ou infiniment grands) et les nombres réels infiniment petits (i.e. les réels non standard plus petits en valeur absolue que tout réel standard positif). On va noter:

$$x \simeq y \text{ pour } x \text{ infiniment proche de } y$$

(i.e. $|x-y|$ infiniment petit).

- pour n standard, un vecteur de $\mathbf{R}^n$ est infiniment petit si toutes ses composantes (relatives à une base standard) sont infiniments petites.

- si x est un nombre réel limité il existe un unique réel standard noté ${}^0x$ et appelé **ombre** de x, tel que $x -{}^0 x$ soit infiniment petit.

- l' ombre d'une partie A de $\mathbf{R}$ (ou de $\mathbf{R}^n$) est l'unique ensemble standard noté par ${}^0A$ dont les éléments standard sont infiniment proches des éléments limités de A.

Soit maintenant M un point infiniment proche de l'origine O dans $\mathbf{R}^n$ (ou dans $\mathbf{C}^n$) et soit p la dimension du plus petit sous espace vectoriel standard E_M contenant le point M.

Théorème ([3]). *1) Il existe une base standard $\{v_1, ..., v_p\}$ de E_M telle que le point M admet la décomposition*

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2 + ... + \varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_p v_p \tag{1}$$

avec $\varepsilon_i \simeq 0$ dans $\mathbf{R}$ (on $\mathbf{C}$), $i = 1, ..., p$.

2) La décomposition précédente est unique à équivalence près dans le sens suivant: si $\{v'_1, ..., v'_p\}$ est une autre base standard dans laquelle

$$M = \varepsilon'_1 v'_1 + \varepsilon'_1\varepsilon'_2 v'_2 + ... + \varepsilon'_1\varepsilon'_2...\varepsilon'_p v'_p \quad \textit{avec} \quad \varepsilon'_i \simeq 0$$

alors on a:

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} a_i^j v'_j \text{ avec } a_i^j \text{ standard et } a_i^j \neq 0 \text{ pour } j = 1, ..., i$$

$$\varepsilon'_1\varepsilon'_2...\varepsilon'_i = \sum_{j=1}^{i} a_i^j \varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_j$$

Démonstration. Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ les coordonnées du point M (i.e. le vecteur $(x_1, ..., x_n)$ est infiniment petit dans $\mathbf{R}^n$) et on désigne par ε_1 le plus grand en valeur absolue des $x_1, ..., x_n$. Alors on a

$$M = \varepsilon_1(\frac{x_1}{\varepsilon_1}, ..., \frac{x_{j-1}}{\varepsilon_1}, 1, \frac{x_{j+1}}{\varepsilon_1}, ... \frac{x_n}{\varepsilon_1})$$

Les rapports $\dfrac{x_i}{\varepsilon_1}$ étant limités, le vecteur de ci-dessus admet une ombre (la partie standard) v_1 non nulle et on peut écrire:

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 v'_1 \text{ avec } v'_1 \simeq 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n$$

D'autre part, si $x_k = 0$ il résulte que la k-ième composante (avec $k \neq j$) du vecteur v_1' est aussi nulle et de l'égalité $\varepsilon_1 = x_j$ il vient que la j-ième composante de v_1' est nulle; ces relations montrent que les vecteurs v_1 et v_1' sont linéairement indépendants.

En itérant ce procédé engagé sur le point M au vecteur v_1' on obtient

$$v_1' = \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_2 v_2'$$

d'où s'ensuit:

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_2'$$

L'indépendance linéaire des vecteurs v_1 et v_1' implique l'indépendance linéaire des vecteurs v_1 et v_2; par construction les vecteurs v_1, v_1' et v_2' sont linéairement indépendants d'où il vient que les vecteurs v_1, v_2 et v_2' sont aussi linéairement indépendants.

Par itération on obtient

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_2 + ... + \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_p v_p + \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_p v_p'$$

avec $v_1, ..., v_p$ standard et v_p' infiniment petit; mais il suit que v_p' est nul, au cas contraire il résulte que les vecteurs $v_1, ..., v_p, v_p'$ sont linéairement indépendants. Donc le point M admet justement la décomposition (1).

Pour l'unicité (à équivalence près) de la décomposition, voir [3], p.94.

Remarques 1. L'entier standard p associé à la décomposition du point M est appelé **longueur** de la décomposition ou longueur de M.

2. Si le point M n'est pas infiniment petit mais limité, le théorème reste valable pour le point $M' = M -^0 M$, où ${}^0M$ est la partie standard (l'ombre) de M, puisque M' est un point infiniment petit. Alors on a la décomposition

$$M =^0 M + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_2 + ... + \varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_p v_p$$

3. La k-ième étape de la démonstration précédente donne

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_2 + ... + \varepsilon_1 ... \varepsilon_k v_k + \varepsilon_1 ... \varepsilon_k v_k'$$

avec $v_k' \simeq 0$ dans br^n et $v_1, ..., v_k, v_k'$ linéairement indépendants. Le repère $\{v_1, ..., v_k\}$ peut être complété à une base

$$\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_p\}$$

de E_M et le vecteur v_k' se décompose par rapport à cette base comme suit:

$$v_k' = \varepsilon_{k+1} v_{k+1} + ... + \varepsilon_p v_p$$

avec $\varepsilon_i \simeq 0$.

En portant cette expression dans la décomposition du point M, on obtient une décomposition moins fine où les degrés des monômes en ε_i sont on plus égales à $k+1$. Cette décomposition est appelée **décomposition de degré k**, à savoir:

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 v_2 + ... + \varepsilon_1 ... \varepsilon_k v_k + \varepsilon_1 ... \varepsilon_{k-1} \varepsilon_{k+1} v_{k+1} + ... + \varepsilon_1 ... \varepsilon_{k-1} \varepsilon_p v_p$$

avec $\varepsilon_j \simeq 0$ et $\dfrac{\varepsilon_j}{\varepsilon_r}$ non standard pour $k+1 \leq r \neq j \leq p$.

4. Il existe une unique décomposition orthonormée du point M infiniment proche de l'origine dans $\mathbf{R}^n$ (i.e. la base $\{v_1, ..., v_p\}$ est orthonormée).

Ici on va indiquer la construction pour $n = 3$ mais le résultat se généralise facilement pour n standard quelconque.

Soient deux décompositions du point $M \simeq 0$ dans $\mathbf{R}^3$:

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3 \text{ et } M = \varepsilon_1' v_1' + \varepsilon_1'\varepsilon_2' v_2' + \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3' v_3'$$

avec $v_1' = a_1^1 v_1$, etc.

Dans un premier temps on pose $a_1^1 = \dfrac{\pm 1}{\|v_1\|}$ et puis on choisit le signe de a_1^1 de telle façon que le vecteur unitaire v_1' possède la même orientation que $\overrightarrow{OM}$. Dans un deuxième temps on considère dans le plan engendré par v_1 et v_2,un verseur v_2' tel que le repère $\{v_1', v_2'\}$ soit direct. Le troisième vecteur v_3' sera le produit vectoriel $v_1' \times v_2'$ et ainsi l'orientation du repère orthonormé $\{v_1', v_2', v_3'\}$ est positive.

3 Étude des courbes dans br^n

Soit (C) une courbe régulière standard dans $\mathbf{R}^n$ et pour simplifier la présentation, on suppose que (C) passe par l'origine O.

Proposition 1 [2]. *Pour tout point M infiniment proche de l'origine sur la courbe (C), son repère orthonormé intrinsèque coïncide avec le repère Frenet de la courbe en O.*

Démonstration. Nous allons utiliser la caractérisation géométrique du repère mobile de Frenet par rapport à la construction de l'unique repère orthonormé direct définit par le point M envisagé: le premier vecteur unitaire v_1' (voir remarque 2.4.) est l'ombre de la droite OM et donc il est le vecteur unitaire tangent à la courbe (C) en origine. Quant au plan engendré par les verseurs v_1' et v_2', il est l'ombre du plan engendré par la droite OM et la tangente en O à la courbe - i.e. il est, par définition, le plan osculateur; alors v_2' est le vecteur unitaire de la normale principale. Le troisième verseur du repère de Frenet est le produit vectoriel des premiers deux, c'est-à-dire exactement le vecteur unitaire v_3'. De même pour les autres verseurs $v_4', ..., v_n'$.

Remarques 1. On peut définir un repère associé au point M quelle que soit la nature de l'origine sur la courbe (C), même si O est un point singulier pour (C).

2. Sous les hypothèses précédentes, on suppose en plus que la décomposition du point M est de longueur égale à 2; il résulte que M est contenu dans un plan standard et donc la courbe (C) est localement plane. Pour obtenir une généralization de ce résultat, on utilise la décomposition de degré k du point M (voir remarque 2.3.); alors il existe un k-plan standard contenant M.

3. En comparant le développement limité de la courbe (C) $\subset \mathbf{R}^3$ en origine (obtenu en prenant l'abcisse curviligne comme paramètre) avec la décomposition orthonormée du point M$\in (C)$, M$\simeq O$ dans $\mathbf{R}^3$

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3$$

on montre dans [2] que:

i) le rapport $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ est limité et ${}^0\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = \dfrac{1}{2}k(0)$, où $k(0)$ désigne la courbure de (C) en origine;

ii) le rapport $\varepsilon_3/\varepsilon_1$ est limité et ${}^0\left(\dfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right) = \dfrac{1}{3}\chi(0)$, où χ désigne la torsion de la courbe (C).

Pour la courbe envisagée (C) dans $\mathbf{R}^n$, on considère la paramétrisation $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(s)$ où s est l'abcisse curviligne; on suppose que les vecteurs

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}, \frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2}, ..., \frac{d^{n-1}\overrightarrow{r}}{ds^{n-1}}$$

sont linéairement indépendants.

Pour trouver la base mobile de Frenet, premierèment on applique aux vecteurs précédents le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt en obtenant les vecteurs unitaires $\overrightarrow{\tau_1}(s), \overrightarrow{\tau_2}(s), ..., \overrightarrow{\tau_{n-1}}(s)$. Dans un deuxième temps on choisit le verseur unique $\overrightarrow{\tau_n}(s)$ tel que $\left\{\overrightarrow{\tau_1}(s), ..., \overrightarrow{\tau_n}(s)\right\}$ soit une base orthonormée directe, appelée base du repère mobile de Frenet.

Les relations suivantes (voir [5], p.38):

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{\tau}_1}{ds} = k_1(s)\overrightarrow{\tau_2} \\ \dfrac{d\overrightarrow{\tau_2}}{ds} = -k_1(s)\overrightarrow{\tau_1} + k_2(s)\overrightarrow{\tau_3} \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ \dfrac{d\overrightarrow{\tau}_{n-1}}{ds} = -k_{n-2}(s)\overrightarrow{\tau}_{n-2} + k_{n-1}(s)\overrightarrow{\tau_n} \\ \dfrac{d\overrightarrow{\tau_n}}{ds} = -k_{n-1}(s)\overrightarrow{\tau}_{n-1} \end{cases}$$

sont dites les *formules de Frenet* pour la courbe (C) dans $\mathbf{R}^n$ et les fonctions $k_1 = k_1(s), ..., k_{n-1} = k_{n-1}(s)$ s'appellent *courbures* de (C).

Théorème. *Soit M un point infiniment proche de l'origine sur la courbe $(C) \subset \mathbf{R}^n$, dont la décomposition orthonormée est de la forme*

$$(2) \qquad M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2 + ... + \varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n v_n$$

avec $\varepsilon_j > 0$ pour tout $j = 1, ..., n$.

Sous les hypothèses et notations précédentes, il résulte que le repère orthonormé $\{v_1, ..., v_n\}$ coïncide avec le repère mobile de Frenet et on a les relations

$$\begin{aligned}
k_1(s) &= 2^{\,0}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\\
k_2(s) &= 3^{\,0}\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
k_{n-1}(s) &= n^{\,0}\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\right)
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit le développement limité de la courbe (C) en origine, prenant l'abcisse curviligne s comme paramètre

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}(s) &= s\,\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}(0)+s^2 2\frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2}(0)+\ldots+\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}\overrightarrow{r}}{ds^{n-1}}(0)+\\
&+\frac{s^n}{n!}\left[\frac{d^n\overrightarrow{r}}{ds^n}(0)+sw(s)\right]
\end{aligned}\tag{3}$$

avec $w(s)\simeq 0$ (on a supposé initialement $\overrightarrow{r}(0)=0$).

En utilisant les formules (1), on a dans un premier temps:

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{r}}{ds}(0) &= \overrightarrow{\tau_1},\qquad \frac{d^2\overrightarrow{r}}{ds^2}(0)=\frac{d\overrightarrow{\tau_1}}{ds}=k_1\overrightarrow{\tau_2}\\
\frac{d^3\overrightarrow{r}}{ds^3}(0) &= k_1'\overrightarrow{\tau_2}+k_1(-k_1\overrightarrow{\tau_1}+k_2\overrightarrow{\tau_3})=-k_1\overrightarrow{\tau_1}+k_2'\overrightarrow{\tau_2}+k_1k_2\overrightarrow{\tau_3}
\end{aligned}$$

Par récurrence il vient:

$$\frac{d^p\overrightarrow{r}}{ds^p}(0)=\alpha_{p,1}\overrightarrow{\tau_1}+\alpha_{p,2}\overrightarrow{\tau_2}+\ldots+\alpha_{p,p-1}\overrightarrow{\tau_{p-1}}+k_1k_2\ldots k_{p-1}\overrightarrow{\tau_p}$$

où $p=4,\ldots,n$. En portant ces relations dans le développement limité (3) on obtient:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}(s) &= s\left(1-\frac{1}{3!}k_1^2s^2+\ldots+\frac{1}{p!}\alpha_{p.1}s^{p-1}+\ldots\right)\overrightarrow{\tau_1}+\\
&+ s^2\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2'}{3!}s+\ldots+\alpha_{p.2}s^{p-1}+\ldots\right)\overrightarrow{\tau_2}+\\
&+ \ldots\ldots+\frac{s^n}{n!}k_1k_2\ldots k_n\overrightarrow{\tau_n}+\frac{s^{n+1}}{n!}w(s)
\end{aligned}\tag{4}$$

On décompose à présent le vecteur $w(s)$ par rapport à la base mobile de Frenet: $w(s)=w_1\overrightarrow{\tau_1}+\ldots+w_n\overrightarrow{\tau_n}$ et on va utiliser les notations:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= -\frac{1}{3!}k_1^2s+\ldots+\frac{1}{n!}w_1s^{n-1};\\
\beta_2 &= \frac{k_2'}{3!}s+\ldots+\frac{1}{n!}w_2s^{n-1}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Alors le développement (4) s'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}(s) &= s(1+\beta_1 s)\overrightarrow{\tau_1}+s^2\left(\frac{1}{2}k_1+\beta_2 s\right)\overrightarrow{\tau_2}+s^3\left(\frac{1}{3!}k_1k_2+\beta_3 s\right)\overrightarrow{\tau_3}+\\ &+ \;......+s^n\left(\frac{1}{n!}k_1k_2...k_n+w_n s\right)\overrightarrow{\tau_n}\end{aligned}$$

Tenant compte que le repère orthonormé $\{v_1,...,v_n\}$ coïncide avec la base mobile de Frenet $\left\{\overrightarrow{\tau_1},...,\overrightarrow{\tau_n}\right\}$ associée à la courbe (C) (cf. proposition 1), on compare le développement limité antérieur avec la décomposition (2) du point M situé sur (C); il vient que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= (1+\beta_1 s)s\\ \varepsilon_2 &= \frac{(\frac{1}{2}k_1+\beta_2 s)s}{1+\beta_1 s}\\ \varepsilon_3 &= \frac{(\frac{1}{3!}k_1k_2+\beta_3 s)s}{\frac{1}{2}k_1+\beta_2 s}\\ &\quad ....\\ \varepsilon_p &= \frac{(\frac{1}{p!}k_1k_2...k_{p-1}+\beta_p s)s}{\frac{1}{(p-1)!}k_1...k_{p-2}+\beta_{p-1}s}\end{aligned}$$

avec $p \geq 4$.

Mais le point M est infiniment proche d'origine (c.a.d. que $s \simeq 0$) et alors on a:

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{1}{2}k_1+\beta_2 s}{(1+\beta_1 s)^2} \qquad \text{d'où il vient } {}^0\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) = \frac{1}{2}k_1$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{1}{3!}k_1k_2+\beta_3 s}{(\frac{1}{2}k_1+\beta_2 s)(1+\beta_1 s)} \qquad \text{d'où il résulte que } {}^0\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right) = \frac{k_2}{3}$$

(c'est-à-dire k_1 et k_2 sont la courbure, respectivement la torsion "classiques" - voir remarque 3).

En géneral on a les relations:

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_1} = \frac{\frac{1}{p!}k_1k_2...k_{p-1}+\beta_p s}{[\frac{1}{(p-1)!}k_1k_2...k_{p-2}+\beta_{p-1}s](1+\beta_1 s)} \quad \text{pour } p = 4,5,...,n$$

et donc les ombres des rapports limités de ci-dessus sont

$${}^0\left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_1}\right) = \frac{1}{p}k_{p-1} \qquad \text{pour } p = 4,...,n$$

Remarque 4. Si l'origine est un point singulier de la courbe (C), les courbures $k_1, k_2, ...k_{n-1}$ ne sont plus définies en O; quand même on peut étudier les rapports limités $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, ..., \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}$ ce qui donne justement la notion de courbure généralisée en des points singuliers.

4 Cas des surfaces

Soit (S) une surface standard dans $\mathbf{R}^3$, passant par l'origine et on suppose que dans un voisinage de O, (S) est définie par l'équation $z = f(x,y)$, où f est une fonction de classe C^k $(k \geq 3)$.

Pour un point M infiniment proche de l'origine dans $\mathbf{R}^3$ on a la décomposition orthonormée suivante

$$M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3;$$

si on note par (v_i^1, v_i^2, v_i^3) les composantes des vecteurs v_i (avec $i = 1,2,3$) par rapport à la base canonique, la condition que le point M appartienne à (S) se traduit par

$$\varepsilon_1 v_1^3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2^3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^3 = f(\varepsilon_1 v_1^1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2^1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^1, \varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^2)$$

En utilisant maintenant le développement de la fonction f en série de MacLaurin:

$$f(x,y) = xp + yq + x^2 r + 2xys + y^2 t + ...$$

(avec les notations de Monge: $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\quad q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$,
$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\quad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, etc) on obtient:

$$v_1^3 = pv_1^1 + qv_1^2$$

respectivement:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 v_2^3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^3 &= (\varepsilon_2 v_2^1 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^1)p + (\varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^2)q + \\ &+ \varepsilon_1(v_1^1 + \varepsilon_2 v_2^1 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^1)^2 r + \\ &+ 2\varepsilon_1(v_1^1 + \varepsilon_2 v_2^1 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^1)(v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^2)s + \\ &+ \varepsilon_1(v_1^2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^2)^2 t + ... \end{aligned}$$

Du fait que le vecteur $v_1 = (v_1^1, v_1^2, pv_1^1 + qv_1^2)$ est unitaire, il s'ensuit que:

$$(v_1^1)^2(1+p^2) + (v_1^2)^2(1+q^2) + 2pqv_1^1 v_1^2 = 1$$

Donc on a obtenu (cf.[3]) que pour un vecteur v_1 dont les composantes vérifient la condition précédente ils existent un repère orthonormé direct $\{v_1, v_2, v_3\}$ et un point M infiniment proche de l'origine sur (S) tel que $M = \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3$. C'est une généralisation, dans le cas des surfaces, de la notion de repère Frenet associé à une courbe dans $\mathbf{R}^3$.

Dans ce qui suit nous allons considérer des surfaces du second ordre; analytiquement, choisissons pour l'origine le point O (situé sur (S)), prenons la normale en O à la surface (S) pour l'axe des z et supposons les axes des x, y dans le plan tangent à (S) en origine. Alors l'équation de la surface est:

$$z + ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + gz^2 = 0$$

mais en utilisant un changement de coordonnées on peut la ramener à la forme

$$z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \tag{1}$$

Pour déterminer le plan tangent au point M infiniment proche de l'origine sur la surface (S), on reprend le calcul de ci-dessus dans le cas particulier (1); en considérant seulement la partie linéaire de l'équation transformée on obtient l'équation du plan tangent en M:

$$z = 2x(Ax' + By') + 2y(Bx' + Cy')$$

où par x' et y' on désigne $\varepsilon_1 v_1^1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2^1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^1$, respectivement $\varepsilon_1 v_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 v_3^2$.

La normale menée à ce plan par le point M, a les équations:

$$\frac{x - x'}{Ax' + By'} = \frac{y - y'}{Bx' + Cy'} = -2z$$

Elle rencontre l'axe des z (i.e. la normale originale à la surface) si on a:

$$\frac{x'}{Ax' + By'} = \frac{y'}{Bx' + Cy'}$$

Donc la direction du point M dont la normale rencontre la normale à (S) en origine, est donnée par l'équation:

$$B(x')^2 + (C - A)x'y' - B(y')^2 = 0 \tag{2}$$

Nous allons maintenant examiner la courbure d'une section normale quelconque à (S), c.a.d. de la section par un plan passant par l'axe des z. On peut montrer aisément (voir [6]) que le rayon de courbure est dans ce cas la moitié de l'inverse de

$$A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta \tag{3}$$

où on désigne par θ l'angle formé par le plan de la section avec le plan $y = 0$.

On sait que les valeurs de θ qui correspondent au maximum et au minimum de la quantité (3) sont données par l'équation

$$B\cos^2\theta + (C - A)\cos\theta\sin\theta - B\sin^2\theta = 0$$

et qu'elles déterminent des directions rectangulaires entre elles. Mais l'équation précédente coïncide avec l'équation (2); donc en un point quelconque d'une surface ils existent deux directions perpendiculaires entre elles et telles que la normale en un point infiniment proche pris sur l'une ou sur l'autre rencontre la normale originale à (S). Ces deux directions sont celles des deux sections principales de la surface au point considéré.

Alors on a obtenu le résultat suivant: *une ligne de courbure d'une surface (S) est une courbe située sur (S) telle que les normales en deux points infiniment proches quelconques se rencontrent.*

Exemple. Soit le cas d'une surface de révolution engendrée par la rotation d'une courbe plane autour d'un axe situé dans son plan. En un point M quelconque d'une telle surface, une ligne de courbure est justement la courbe génératrice qui passe par M puisque toutes les normales à cette courbe sont aussi des normales à la surface et, comme elles sont situées dans un même plan, elles se rencontrent. Le rayon principal correspondant en M est évidemment le rayon de courbure de la section plane au point M.

L'autre ligne de courbure (en M) de la surface de révolution est le cercle passant par M, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de la surface (car les normales en tous les points de ce cercle se coupent évidemment au même point de l'axe). Le segment déterminé sur la normale par M et l'axe est exactement le second rayon principal de la section.

La courbe génératrice qui passe par M est une section principale de la surface puisqu'elle contient la normale en M. Mais la section perpendiculaire à l'axe n'est pas, en général, une section principale; la deuxième section principale de la surface (au point M) serait la section plane déterminée par la normale en M et la tangente au cercle décrit par le point M.

Alors on peut vérifier le théorème de Meusnier: le rayon du cercle décrit par M (section oblique de la surface) est la projection sur ce plan du segment de la normale compris entre M et l'axe, et nous venons de prouver que ce segment est justement le rayon de courbure de la section normale correspondante.

Acknowledgements. A version of this paper was presented at the Third Conference of Balkan Society of Geometers, Workshop on Electromagnetic Flows and Dynamics, July 31 - August 3, 2000, University POLITEHNICA of Bucharest, Romania.

Bibliographie

[1] M.Goze, *Étude locale de la variété des lois d'algèbre de Lie*, Thèse Mulhouse (1982).

[2] M.Goze, *Étude d'un point infiniment petit et applications*, dans "Labyrinthe du continu", colloque de Cerisy, Salanski et Sinaceur éditeurs, 402-413, Springer-Verlag (1992).

[3] M.Goze, *Infinitesimal algebra and geometry*, Non standard analysis in Practice, Diener ed. Springer-Verlag, Universitex, 91-108 (1995).

[4] E.Nelson, *Internal Set Theory: A new approach to Non Standard Analysis*, B.A.M.S. 83, 1165-1198 (1977)

[5] M.Postnikov, *Leçons de géométrie. Variétés différentiables*, Ed.Mir, Moscou (1990)

[6] G.Salmon, *Traité de géométrie analytique à trois dimensions*, Gauthier-Villars, Paris (1903)

Département de Mathématiques
Université Technique de Constructions
Bucarest, Roumanie