Посвящается 75-летию Ю.Г. РЕШЕТНЯКА

S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 2, стр. 264–290 (2005) УДК 517.55

MSC 32SXX

$\overline{\partial}$-ЗАМКНУТОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ CR-ФОРМ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА ПОРОЖДАЮЩЕМ МНОГООБРАЗИИ

Т.Н.НИКИТИНА

Abstract. Let Γ be a smooth generic manifold with nonzero Levi form in a domain of holomorphy $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$. Let $\Omega_\Gamma \subset \Omega$ be the domain adjacent to Γ to which all CR-forms defined on Γ extend $\overline{\partial}$-closely. Let $K = \hat{K}_\Omega \subset \Omega$ be a holomorphically convex compact set. We show that every CR-form on $\Gamma \setminus K$ of bidegree (l, r) with coefficients in $C^1(\Gamma \setminus K)$ extends $\overline{\partial}$-closely to $\Omega_\Gamma \setminus K$. When $n = 2$ and $r = 0$ the manifold Γ must be closed ($\partial\Gamma = 0$). The proof uses an integral representation, obtained from the integral representation of Airapetyan and Khenkin, in which the integration is carried out over the CR-manifold Γ only (but not over its complement).

In this paper we also consider the problem of $\overline{\partial}$-closed continuation of CR-forms given on $\Gamma \setminus K$, where Γ is a generic manifold with nondegenerate Levi form, and K is a meromorphically p-convex compactum. We derive some conditions on Γ, relative to p-convexity and q-concavity, under which every CR-form with smooth coefficients given on $\Gamma \setminus K$ extends $\overline{\partial}$-closely in some domain $\Omega_\Gamma \setminus K$, where Ω_Γ is a wedge domain with edge Γ. Our results are local.

1. Основные результаты

Наша статья посвящена $\overline{\partial}$-замкнутому продолжению CR-форм, заданных на порождающих многообразиях. Сначала мы опишем класс многообразий, с которыми мы будем работать, а также класс компактных множеств.

Nikitina, T.N., $\overline{\partial}$-closed extension of CR-forms with singularities on a generic manifold.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-1212.2003.1.)

Поступила 30 июня 2005 г., опубликована 16 декабря 2005 г.

Пусть Γ — гладкое (класса C^2) многообразие в области голоморфности $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ вида

$$\Gamma = \{z \in \Omega : \varrho_1(z) = \ldots = \varrho_k(z) = 0\},\ 1 \leq k < n, \tag{1}$$

где ϱ_j — действительнозначные функции класса $C^2(\Omega)$, $j = 1, \ldots, k$ и $d\varrho_1 \wedge \ldots \wedge d\varrho_k \neq 0$ на Γ.

В дальнейшем будем предполагать, что Γ порождающее, т.е. $\overline{\partial}\varrho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial}\varrho_k \neq 0$ на Γ.

Мы исключаем случай, когда $k = n$ (т.е. когда Γ есть вполне вещественное многообразие), поскольку нам нужно рассмотреть форму Леви на Γ.

Пусть K — голоморфно выпуклый компакт в Ω (т.е. $K = \hat{K}_\Omega$), а форма $f \in C^1_{l,r}(\Gamma \setminus K)$, $0 \leq r \leq n-k$, $0 \leq l \leq n$, т.е. пространству дифференциальных форм типа (l, r) на $\Gamma \setminus K$, коэффициенты которых принадлежат пространству гладких функций $C^1(\Gamma \setminus K)$. Точнее $f \in C^s_{l,r}(\Gamma)$, $s \geq 0$, [2] тогда и только тогда, когда

$$f = {\sum_{I,J}}' f_{I,J} d\overline{z}_J \wedge dz_I, \tag{2}$$

где $f_{I,J} \in C^s(\Gamma)$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_l}$; $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_r}$ и суммирование $\sum'$ распространяется на мультииндексы со строго возрастающими компонентами .

При этом две формы f и $g \in C^s_{l,r}(\Gamma)$, будем считать равными [13] тогда и только тогда, когда для любой финитной формы $\varphi \in C^\infty_{n-l,n-k-r}(\Omega)$ имеем $\int_\Gamma f \wedge \varphi = \int_\Gamma g \wedge \varphi$.

Если f — гладкая форма вида (2) на Γ, то ее можно продолжить до гладкой формы $\tilde{f}$ в Ω. Тогда

$$\overline{\partial}\tilde{f} = {\sum_{I,J}}' \overline{\partial}\tilde{f}_{I,J} d\overline{z}_J \wedge dz_I.$$

По определению, касательный оператор Коши — Римана (см., например, [13]), $\overline{\partial}_\Gamma f$ — форма типа $(l, r+1)$ на Γ, полученная ограничением формы $\overline{\partial}\tilde{f}$ на Γ. Если учесть условие равенства форм на Γ, то приведенное определение не зависит от способа продолжения формы f с многообразия Γ в область Ω. Пусть форма f является CR-формой на $\Gamma \setminus K$, т.е. f удовлетворяет касательному уравнению Коши — Римана: $\overline{\partial}_\Gamma f = 0$ на $\Gamma \setminus K$.

Мы покажем, что если Γ (вида (1)) имеет ненулевую форму Леви, то f $\overline{\partial}$-замкнуто продолжается в некоторую область $\Omega_\Gamma \setminus K$, примыкающую к Γ (где Ω_Γ — область, в которую $\overline{\partial}$-замкнуто продолжается всякая CR-форма на Γ [2]).

При доказательстве нашего результата мы воспользуемся схемой Г. Лупаччиолу [15], восходящей еще к Е. Мартинелли. При этом возникают значительные дополнительные трудности.

В работе [4] для случая, когда Γ является гиперповерхностью в Ω, использовалась теорема об аналитическом представлении [11]. При $k > 1$ пример Ж.Трепро [12] показывает, что такой результат для произвольных порождающих многообразий невозможен.

Пусть $T_z(\Gamma)$, $T^c_z(\Gamma)$ и $N_z(\Gamma)$ — соответственно касательное, комплексное касательное и нормальное пространства к Γ в точке $z \in \Gamma$. Тогда $dim_R T_z(\Gamma) = 2n-k$, $dim_C T^c_z(\Gamma) = n-k$ и $dim_R N_z(\Gamma) = k$. Предположим, что функции ϱ_j

выбраны так, что векторы $grad\varrho_j$ образуют ортогональный базис в $N_z(\Gamma)$ ($j = 1,\ldots,k$). Векторной формой Леви $L_z(w)$ для Γ в точке z называют выражение

$$L_z(w) = -\sum_{j,l=1}^{n}\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^2\varrho_s(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_l}w_j\overline{w}_l grad\varrho_s(z),$$

где $w \in T_z^c(\Gamma)$ (см., например, [2],[10]). Тогда $L_z : (T_z^c(\Gamma)) \to N_z(\Gamma)$. Форма Леви многообразия Γ в точке $z \in \Gamma$ по направлению вектора $x \in R^k$ определяется так (см., например, обзоры [2], [10]):

$$L_{z,x}(w) = -\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial^2\varrho_x(z)}{\partial z_j\partial\overline{z}_l}w_j\overline{w}_l, \tag{3}$$

где $w \in T_z^c(\Gamma)$, а $\varrho_x = \varrho_1x_1 + \ldots + \varrho_kx_k$.

Пусть $S_{q,z}$ — замкнутое множество тех точек x из единичной сферы $S \subset R^k$ (с центром в нуле), для которых форма Леви $L_{z,x}$ имеет менее q отрицательных собственных значений на T_z^c.

Фиксируем точку $z^0 \in \Gamma$ и множество U, которое есть стягиваемая окрестность множества S_{q,z^0} в S.

Многообразие Γ называется (согласно [2]) q-вогнутым в точке $z \in \Gamma$ в направлении $x \in R^k$, если форма Леви $L_{z,x}$ имеет по крайней мере q отрицательных собственных значений на $T_z^c(\Gamma)$. Если многообразие Γ является q-вогнутым в направлении x, тогда оно является q-выпуклым в направлении $-x$ (т.е. форма $L_{z,-x}$ имеет по крайней мере q положительных собственных значений). Позже мы предположим, что множество $S\setminus S_{q,z}$ не пусто, т.е. многообразие Γ является q-вогнутым в z в направлениях $x \in S \setminus S_{q,z}$.

В статье [2, Лемма 3.1.1] было дано следующее обобщение леммы Кона.

Лемма 1. *Пусть гладкое (класса C^2) многообразие Γ вида (1) является q-вогнутым (соответственно, q-выпуклым) в точке $\zeta \in \Gamma$ по всем направлениям $x \in Q \subset S$ (S есть единичная сфера с центром в нуле в $\mathbb{R}^k$). Тогда существует такая константа A, что для всех $x \in Q$ форма Леви (3) для функции*

$$\tilde{\varrho}_x = \varrho_x + A(\varrho_1^2 + \ldots + \varrho_k^2) \tag{4}$$

(соответственно,

$$\tilde{\varrho}_x = \varrho_x - A(\varrho_1^2 + \ldots + \varrho_k^2)) \tag{5}$$

имеет по крайней мере $q + k$ отрицательных (соответственно, $q + k$ положительных) собственных значений.

По теореме Росштейна [17] в любой точке z многообразия $\{z \in \Omega : \tilde{\varrho}_x = 0\}$ локально существует комплексное многообразие размерности $q + k - 1$, пересекающее множество $\{z \in \Omega : \tilde{\varrho}_x \leq 0\}$ только в точке z.

В дальнейшем мы будем предполагать, что область голоморфности Ω выбрана так, что: лемма 1 выполняется в Ω, множество $S \setminus S_{q,z} \neq \emptyset$ для всех $z \in \Gamma$, а также для каждой точки $z \in \Gamma$ существует аналитическое множество $L_z(h) = \{\zeta \in \Omega : h_1(\zeta) = h_1(z), \ldots, h_{n+1-q-k}(\zeta) = h_{n+1-q-k}(z)\}$, где $h_1, \ldots,$ $h_{n+1-q-k} \in \mathcal{O}(\Omega)$, такое что $L_z(h) \cap \overline{\Omega}_\Gamma = \{z\}$ (при условии, что $q + k \leq n$).

Теорема 1. *(*[10, предложение 7.11]; [2, §3.3]*). Пусть гладкое (класса C^2) CR-многообразие Γ вида (1) является q-вогнутым (соответственно q-выпуклым)* *в точке* $z^0 \in \Gamma$ *по всем направлениям* x *из* $S \setminus \pm U$. *Тогда существует окрестность* Ω^0 *точки* z^0 *такая, что для любого* $x \in S$ *существует сильно регулярная барьерная вектор-функция* $P_x = P_1(\zeta, z, x)$ *к уровням функции* $\tilde{\varrho}_x$ *вида (4) (соответственно, (5)) в области* Ω^0, *гладко (класса* C^1*) зависящая от* x, *со свойством*

$$< \overline{\partial}_\zeta P_1(\zeta, z, x) \wedge d\zeta >^{n-q-k+1} = 0 \tag{6}$$

для всех $\zeta, z \in \Omega^0$ *и* $x \in S \setminus U$ *(соответственно,*

$$< \overline{\partial}_z P_1(\zeta, z, x) \wedge dz >^{n-q-k+1} = 0 \tag{7}$$

для всех $\zeta, z \in \Omega^0$ *и* $x \in S \setminus -U$*).*

Вектор-функция $P(\zeta, z)$ является *сильно регулярным барьером* к уровням функции ϱ, если для некоторой положительной константы γ

$$2Re\ \Phi(\zeta, z) = 2Re < P(\zeta, z), \zeta - z > \geq \varrho(\zeta) - \varrho(z) + \gamma|\zeta - z|^2 \tag{8}$$

для всех $(\zeta, z) \in \Omega^0 \times \Omega^0$(см. [2], [10]).

В дальнейшем будем считать, что наша первоначальная область голоморфности Ω есть Ω^0.

Пусть $f \in C^1_{l,r}(\Gamma)$ и $f - CR$-форма на Γ, выберем последовательность строго псевдовыпуклых областей $\Omega_s \subset\subset \Omega$ так, чтобы $\bigcup_s \Omega_s = \Omega$, $\Omega_s \subset\subset \Omega_{s+1}$, $\partial\Omega_s$ пересекаются с Γ трансверсально и для любой формы λ типа $(n-l, n-k-r-1)$ с коэффициентами из $C^1_0(\Omega)$

$$\int_{\Gamma \cap \Omega_s} f \wedge \overline{\partial}\lambda = (-1)^{l+r} \int_{\Gamma \cap \partial\Omega_s} f \wedge \lambda. \tag{9}$$

Для гладкой вектор-функции $\eta = \eta(\zeta, z, x) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ форма

$$K_{l,r}(\zeta - z, \eta, \zeta, z) =$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!} \binom{n-1}{r} \binom{n}{l} D_{1,r,n-r-1}(\eta, \overline{\partial}_z\eta, (\overline{\partial}_\zeta + d_x)\eta) \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial\zeta)$$

для $0 \leq r \leq n-1$, и $K_{l,-1} \equiv K_{l,n} \equiv 0$. Столбцами этих определителей служат вектор-функции η и вектор-формы

$$\overline{\partial}_z\eta = (\overline{\partial}_z\eta_1, \dots, \overline{\partial}_z\eta_n),\ (d_x + \overline{\partial}_\zeta)\eta = ((d_x + \overline{\partial}_\zeta)\eta_1, \dots, (d_x + \overline{\partial}_\zeta)\eta_n).$$

Определители раскрываются по обычным правилам, учитывая свойства внешнего произведения. Здесь знаки z и ζ у символа $\overline{\partial}$ показывают, по какой группе переменных надо брать $\overline{\partial}$. Формы $K_{l,r}$ понимаются как двойные дифференциальные формы (см. [9, §7]), т.е. формы по z, коэффициенты которых есть (обычные) формы по ζ и x, или формы по ζ и x, коэффициенты которых — формы по z. Позже мы будем использовать однородность форм $K_{l,r}(\eta)$, т.е. равенство $K_{l,r}(\psi\eta) = \psi^n K_{l,r}(\eta)$, где ψ есть гладкая скалярная функция (см. [2, §1.1]).

Если $\eta = \eta(\zeta, z, x, t)$, тогда

$$K_{l,r}(\eta) =$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!} \binom{n-1}{r} \binom{n}{l} D_{1,r,n-r-1}(\eta, \overline{\partial}_z\eta, (\overline{\partial}_\zeta + d_x + d_t)\eta) \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial\zeta).$$

Теорема 2. *Пусть* Γ *— гладкое (класса* C^∞*)* CR*-многообразие вида (1) и пусть* $U(S_{q,z^0})$ *— стягиваемая окрестность множества* S_{q,z^0}*, целиком содержащаяся в некотором сферическом сегменте* $S(a,\sigma)=\{x\in S:(a,x)>\sigma\}$*, где* $a\in R^k$*,* $\sigma>0$*. Пусть* Ω^0 *— достаточно малая окрестность точки* z^0 *вида*

$$\Omega^0=\{\zeta\in\Omega:\varrho_0<0\},\ \varrho_0\in C^\infty(\Omega), \tag{10}$$

на которой (см. теорему 1) существует сильно регулярная барьерная вектор-функция $P_x=P_1(\zeta,z,x)$ *к уровням функции* $\tilde\varrho_x$ *вида (4) (соответственно, (5)) класса* C^∞ *по* $\zeta,z\in\Omega^0$*, класса* C^1 *по* x *и со свойством (6) (соответственно, (7)) для всех* $x\in S\backslash\pm U$*. Тогда любая* CR*-форма* $f\in C^\infty_{l,r}(\Gamma\cap\Omega^0)$ *на многообразии* $\Gamma\cap\Omega^0$*, причем,* $r<q$*, либо* $r>n-k-q$*, представима в виде*

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}f=F, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}F=K_{\pm U}f+K_0f-\int_{(\Gamma\cap\Omega^0)\times\pm U}f(\zeta)\wedge\overline\partial_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1(\zeta,z,x))\\ -\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega^0)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge\overline\partial_z\Phi^1_{r-1}(s^h,t_0\eta_0(\zeta,z)+(1-t_0)\eta_1(\zeta,z,x))\\ -\overline\partial\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta}\tilde f(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*(\zeta,z))-\overline\partial\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta}\overline\partial\tilde f(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*(\zeta,z));\end{aligned}$$

$$K_{\pm U}f(z)=\int_{(\Gamma\cap\Omega^0)\times\pm U}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta,z,x)), \tag{12}$$

$$K_0f(z)=\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega^0)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(t_0\eta_0(\zeta,z)+(1-t_0)\eta_1(\zeta,z,x)), \tag{13}$$

где

$$\eta_1(\zeta,z,x)=\frac{P_1(\zeta,z,x)}{<P_1(\zeta,z,x),\zeta-z>},\ \eta_0(\zeta,z)=\frac{P_0(\zeta,z)}{<P_0(\zeta,z),\zeta-z>},$$

$$P_0(\zeta,z)=(\partial/\partial\zeta)\varrho_0(\zeta),\ P_*(\zeta,z)=\frac{\overline\zeta-\overline z}{|\zeta-z|^2};$$

$$\tilde S=\{(t_0,(1-t_0)x),\ 0\le t_0\le1,\ x\in S\}.$$

При этом форма F $\overline\partial$*-замкнута в области* $\Omega_{\pm U}=\{\zeta\in\Omega:\tilde\varrho_x>0,x\in\pm U\}\cap\tilde\Omega$*, где* $\tilde\Omega$ *— некоторая окрестность многообразия* $\Gamma\cap\Omega^0$ *и принадлежит классу* $C^\infty_{l,r}(\Omega_{\pm U}\cup(\Gamma\cap\Omega^0))$.

Если $f \in C^1_{l,r}(\Gamma)$ является CR-формой на Γ, то $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение F этой формы в область $\Omega_\Gamma \cap \Omega_s$ дается формулой

(14)
$$\begin{aligned}
F(z) = &\int_{(\Gamma\cap\Omega_s)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta,z,x))\\
&-\int_{(\Gamma\cap\Omega_s)\times\pm U} f(\zeta)\wedge \overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1(\zeta,z,x))\\
&+\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_s)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(t_s\eta_0(\zeta,z)+(1-t_0)\eta_1(\zeta,z,x))\\
&-\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_s)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge \overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,t_0\eta_s(\zeta,z)+(1-t_0)\eta_1(\zeta,z,x))\\
&-\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*(\zeta,z))-\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta}\tilde{f}(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*(\zeta,z)),
\end{aligned}$$

где $\Omega^\delta=\{\zeta\in\Omega:\varrho_0<\delta\}$, $G^\delta=\{\zeta\in\Omega:|\varrho|<\delta\}$, $\delta>0$ достаточно мала, форма $\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)$ определена формулой

$$\begin{aligned}
\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)=\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}\sum_{m=0}^{n-1-r}\sum_{j=m}^{r-1+m}\\
C^m_{n-1-r}C^{j-m}_r(r+m-j)/C^j_{n-2}(n-1)\times\\
D_{1,1,j-m,r-1+m-j,m,n-1-r-m}(s^h,\eta_1,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_z\eta_1,\overline{\partial}_\zeta s^h,\overline{d}\eta_1)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta).
\end{aligned}$$

Формула (14) будет постоянно использоваться в нашей статье.

Теорема 3. *Пусть компакт $K=\hat{K}_\Omega\subset\overline{\Omega}_\Gamma$ и $\Gamma\setminus K$ связно, существуют точки $\zeta^0\in\Gamma\setminus K$ и $x^0\in\pm U$ такие, что сильно регулярный барьер $P(\zeta^0,z,x^0)$ является голоморфной функцией в Ω. Если $n\geq 3$ и f — CR-форма на $\Gamma\setminus K$ класса $C^1_{l,r}(\Gamma\setminus K)$ ($r<q$, либо $r>n-k-q$), то f $\overline{\partial}$-замкнуто продолжается в $\Omega_\Gamma\setminus K$. В случае $n=2$ при $r=0$ теорема верна для замкнутых многообразий Γ (т.е. $\partial\Gamma=0$). Если в каждой точке $\zeta^0\in\Gamma\setminus K$ существует сильно регулярный голоморфный по $z\in\Omega$ барьер, то теорема верна без условия связности $\Gamma\setminus K$.*

При доказательстве теоремы 3 используется более простое и естественное интегральное представление (14), полученное из интегрального представления Р.А. Айрапетяна и Г.М. Хенкина, в котором интегрирование производится лишь только по CR-многообразию Γ (а не по его дополнению).

Мы можем теорему 3 переформулировать для любых компактов $K\subset\Omega$ таких, что $\hat{K}_\Omega\cap\overline{\Omega}_\Gamma=K\cap\overline{\Omega}_\Gamma$.

Данная теорема допускает обобщение на случай, когда K — мероморфно p-выпуклый компакт, которое для $p=q=0$ приведено в [5]. Если K есть компактное множество в Ω, тогда под мероморфной p-оболочкой $\tilde{K}_p$ компакта K понимается следующее множество: $\tilde{K}_p=\Omega\setminus\bigcup_{\{h\}}(\Omega\setminus h^{-1}(h(K)))$, где класс $\{h\}$ состоит из всех вектор-функций h вида $(h_1,\dots,h_p):\Omega\to\mathbb{C}^p$ и $h_j\in\mathcal{O}(\Omega), j=1,\dots,p$.

Наше определение немного отличается от определения Г. Лупаччиолу [16].

Компактное множество K называется мероморфно p-выпуклым, если $K = \tilde{K}_p$. Свойства таких компактных множеств детально были описаны в [16]. Ясно, что $\tilde{K}_p \supset \tilde{K}_{p+1}$, следовательно, $K = \tilde{K}_{p+1}$, если $K = \tilde{K}_p$.

Рассмотрим теперь мероморфно p-выпуклое множество $K \subset \overline{\Omega}_\Gamma$. Нас интересует вопрос, когда CR-форма f с гладкими коэффициентами, заданная на $\Gamma \setminus K$ продолжается $\overline{\partial}$-замкнуто в $\Omega_\Gamma \setminus K$?

Также как и в случае $p = q = 0$ ответ зависит от p. Как показывает пример, рассмотренный Г. Лупаччиолу в случае функций, в общем мы не можем ожидать $\overline{\partial}$-замкнутого продолжения, если $2p \geq n$. Следовательно, нам нужно налагать некоторые дополнительные условия на K.

В дальнейшем будем предполагать, что $n \geq 3$.

Теорема 4. *Пусть $n \geq 3$ и $k = 1$, т.е. Γ есть гиперповерхность в Ω и рассмотрим компактное множество $K = \tilde{K}_p \subset \overline{\Omega}_\Gamma$ с $2p < n - r$ (соответственно, $2p < r + 1$). В дополнение предположим, что для некоторой точки $z^0 \in \Gamma \setminus K$ существует голоморфная вектор-функция $h = (h_1, \dots, h_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p$ такая, что множество $L_{z^0}(h) \cap \overline{\Omega}_\Gamma = \{z^0\}$ и $\Gamma \setminus K$ является связной. Тогда каждая CR-форма f, заданная на $\Gamma \setminus K$ класса $C^1_{l,r}(\Gamma \setminus K)$ продолжается $\overline{\partial}$-замкнуто в $\Omega_\Gamma \setminus K$. Если такой барьер h существует в каждой точке $z \in \Gamma$, то условие связности $\Gamma \setminus K$ может быть опущено.*

Теорема 5. *Пусть $k > 1$, $n \geq 3$, многообразие Γ является q-вогнутым (соответственно, q-выпуклым) для $z \in \Gamma$ в направлениях $x \in S \setminus \pm U$, и рассмотрим компактное множество $K = \tilde{K}_p$ с $2p \leq q - r + 1$ (соответственно, $2p \leq r - n + k + q + 1$). Если в некоторой точке $z^0 \in \Gamma \setminus K$ существует множество $L_{z^0}(h)$ для некоторой голоморфной вектор-функции $h : \Omega \to \mathbb{C}^p$, такое, что $L_{z^0}(h) \cap \overline{\Omega}_\Gamma = \{z^0\}$ и $\Gamma \setminus K$ является связным, тогда каждая CR-форма f, заданная на $\Gamma \setminus K$ класса $C^1_{l,r}(\Gamma \setminus K)$ продолжается $\overline{\partial}$-замкнуто в $\Omega_\Gamma \setminus K$. Если такой барьер h существует в каждой точке $z \in \Gamma$, то условие связности $\Gamma \setminus K$ может быть опущено.*

На многообразии Γ существует барьер $L_z(h)$ для $h : \Omega \to \mathbb{C}^{n+1-k-q}$, поэтому если мы не желаем налагать дополнительных условий на Γ, мы должны выбрать q так, что $3q \geq 2n - 2k + 1 + r$ (соответственно, $3q \geq 3n - 3k - r + 1$) и выбрать p так, что $2n - 2k - 2q + 2 \leq 2p \leq q - r + 1$ (соответственно, $2n - 2k - 2q + 2 \leq 2p \leq r - n + k + q + 1$). Следовательно, мы получили утверждение.

Следствие 1. *Если $k > 1$, $n \geq 3$, многообразие Γ является q-вогнутым (соответственно, q-выпуклым) для $z \in \Gamma$ в направлениях $x \in S \setminus \pm U$ с $2n - 2k - 2q + 2 \leq 2p \leq q - r + 1$ (соответственно, $2n - 2k - 2q + 2 \leq 2p \leq r - n + k + q + 1$), тогда любая CR-форма f, заданная на $\Gamma \setminus K$ класса $C^1_{l,r}(\Gamma \setminus K)$ продолжается $\overline{\partial}$-замкнуто в $\Omega_\Gamma \setminus K$. Например, если $q = n - k$, тогда $2p \leq n - k + 1 - r$ (соответственно, $2p \leq r + 1$).*

2. Вспомогательные результаты

Мы придерживаемся обозначений и определений из §1.

Лемма 2. *Для* $\zeta \in \Gamma \cap \Omega_s$, $z \in \Omega_\Gamma \cap \Omega_s$ *и* $x \in S$ *имеем*

$$\int_0^1 K_{l,r}(t_0\eta_s(\zeta, z) + (1-t_0)\eta_1(\zeta, z, x)) =$$
$$\int_0^1 K_{l,r}\Big(\frac{t_0P_s(\zeta, z) + (1-t_0)P_1(\zeta, z, x)}{< t_0P_s(\zeta, z) + (1-t_0)P_1(\zeta, z, x), \zeta - z >}\Big),$$

где $\eta_s = P_s/ < P_s, \zeta - z >$ *и* $\eta_1 = P_1/ < P_1, \zeta - z >$ *(см. §1).*

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 из [6].

Обозначим (для краткости) оператор $\overline{\partial}_\zeta + d_x$ через $\overline{d}$.

Рассмотрим голоморфное отображение $h = (h_1, \dots, h_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p$ и аналитическое множество $L_z(h) = \{\zeta \in \Omega : h(\zeta) = h(z)\}$. Пусть

$$h_k(\zeta) - h_k(z) = \sum_{j=1}^{n} h_{kj}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$$

— разложение Гефера для h_k, $h_{kj} \in \mathcal{O}(\Omega \times \Omega)$. (Напомним, что Ω — область голоморфности.)

Через s_j^h обозначим выражение

$$s_j^h = \Big(\sum_{k=1}^{p} |h_k(\zeta) - h_k(z)|^2\Big)^{-1} \sum_{k=1}^{p} h_{kj}(\zeta, z)\overline{(h_k(\zeta) - h_k(z))},$$

тогда $< s^h, \zeta - z >= \sum_{j=1}^{n} s_j^h(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) = 1$ вне $L_z(h)$.

Пусть $\mu_{r-1}^1(s^h, \eta_1)$, $\mu_r^2(s^h, \eta_1)$ есть дифференциальные формы

$$\mu_{r-1}^1(s^h, \eta_1) = \sum_{m=0}^{n-1-r} \sum_{j=m}^{r-1+m} C_{n-1-r}^m C_r^{j-m}(r+m-j)/C_{n-2}^j(n-1)$$
$$D_{1,1,j-m,r-1+m-j,m,n-1-r-m}(s^h, \eta_1, \overline{\partial}_z s^h, \overline{\partial}_z \eta_1, \overline{\partial}_\zeta s^h, \overline{d}\eta_1),$$

$$\mu_r^2(s^h, \eta_1) = \sum_{m=0}^{n-2-r} \sum_{j=m}^{r+m} C_{n-1-r}^m C_r^{j-m}(n-1-r-m)/C_{n-2}^j(n-1) \tag{15}$$
$$D_{1,1,j-m,r+m-j,m,n-2-r-m}(s^h, \eta_1, \overline{\partial}_z s^h, \overline{\partial}_z \eta_1, \overline{\partial}_\zeta s^h, \overline{d}\eta_1).$$

Лемма 3. *Для точек* $\zeta \in \Gamma$, $z \in \Omega_\Gamma \setminus L_z(h)$, $x \in S$ *имеем*

$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}(\overline{\partial}_z \mu_{r-1}^1(s^h, \eta_1) + (-1)^r(\overline{\partial}_\zeta + d_x)\mu_r^2(s^h, \eta_1))\wedge$$
$$D_{l,n-l}(\partial z, \partial\zeta) = \overline{\partial}_z \Phi_{r-1}^1(s^h, \eta_1) + (-1)^r(\overline{\partial}_\zeta + d_x)\Phi_r^2(s^h, \eta_1) = K_{l,r}(\eta_1) -$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l} D_{1,r,n-1-r}(s^h, \overline{\partial}_z s^h, \overline{\partial}_\zeta s^h) \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial\zeta).$$

Если $p \leq n-1-r$, *тогда*

$$\overline{\partial}_z \Phi_{r-1}^1(s^h, \eta_1) + (-1)^r(\overline{\partial}_\zeta + d_x)\Phi_r^2(s^h, \eta_1) = K_{l,r}(\eta_1).$$

Доказательство следует из непосредственных вычислений.

Лемма 3 в случае $l = r = 0$ и $l = 0, r = 1$ доказана в [14].

Точно так же для вектор-функции η_{t_0} имеем

$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}(\overline{\partial}_z\mu^1_{r-1}(s^h,\eta_{t_0})+(-1)^r(\overline{\partial}_\zeta+d_x+d_{t_0})\mu^2_r(s^h,\eta_{t_0}))\wedge$$
$$D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta)=\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_{t_0})+(-1)^r(\overline{\partial}_\zeta+d_x+dt0)\Phi^2_r(s^h,\eta_{t_0})=K_{l,r}(\eta_{t_0})-$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}D_{1,r,n-1-r}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,(\overline{\partial}_\zeta+d_x+d_{t_0})s^h)\wedge$$
$$D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta)$$

вне множества $L_z(h)$.

Лемма 4. *Определитель вида* $D_{1,m,1,\ldots,1}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,\tau_1,\ldots,\tau_{n-m-1})=0$, *если* $m\geq p$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 2 из [14].

Лемма 5. *Форма*

$$\mu^2_r(s^h,\eta_1)=\sum_{m=0}^{min\{n-2-r,p-1\}}\ \sum_{j=m}^{min\{r+m,m+p-1\}} C^m_{n-1-r}C^{j-m}_r(n-1-r-m)/$$
$$C^j_{n-2}(n-1)D_{1,1,j-m,r+m-j,m,n-2-r-m}(s^h,\eta_1,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_z\eta_1,\overline{\partial}_\zeta s^h,\overline{d}\eta_1).$$

Пусть теперь h и g голоморфные отображения из Ω в $\mathbb{C}^p$.

Пусть $\mu^1_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1)$, $\mu^2_r(s^h,s^g,\eta_1)$ есть дифференциальные формы

$$\mu^1_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1)=$$
$$\sum_{s=0}^{n-2-r}\sum_{m=s}^{n-2-r}\sum_{k=s}^{r-1+s}\sum_{j=m-s}^{r-1+m-k} C^s_{n-2-r}C^{m-s}_{n-2-r-s}C^{k-s}_r C^{j-m+s}_{r-k+s}(r+m-j-k)(n-1-r)/$$
$$C^j_{n-3-k}C^k_{n-3}(n-2)(n-1)D_{1,1,1,j-m+s,k-s,r-1+m-j-k,m-s,s,n-2-r-m}$$
$$(s^h,s^g,\eta_1,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_z s^g,\overline{\partial}_z\eta_1,\overline{\partial}_\zeta s^h,\overline{\partial}_\zeta s^g,\overline{d}\eta_1),$$

$$\mu^2_r(s^h,s^g,\eta_1)=$$
$$\sum_{s=0}^{n-3-r}\sum_{m=s}^{n-3-r}\sum_{k=s}^{r+s}\sum_{j=m-s}^{r+m-k} C^s_{n-2-r}C^{m-s}_{n-2-r-s}C^{k-s}_r C^{j-m+s}_{r-k+s}(n-2-r-m)(n-1-r)/$$
$$C^j_{n-3-k}C^k_{n-3}(n-2)(n-1)D_{1,1,1,j-m+s,k-s,r+m-j-k,m-s,s,n-3-r-m}$$
$$(s^h,s^g,\eta_1,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_z s^g,\overline{\partial}_z\eta_1,\overline{\partial}_\zeta s^h,\overline{\partial}_\zeta s^g,\overline{d}\eta_1).$$

Лемма 6. *Пусть f и g голоморфные отображения из Ω в $\mathbb{C}^p$. Тогда для всех $\zeta\in\Gamma$, $z\in\Omega_\Gamma\setminus(L_z(h)\cup L_z(g))$, $x\in S$ справедливо равенство*

$$\mu^2_r(s^h,\eta_1)-\mu^2_r(s^g,\eta_1)=\overline{\partial}_z\mu^1_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1)+(-1)^r\overline{d}\mu^2_r(s^h,s^g,\eta_1)+\mu^2_r(s^h,s^g),$$

где $\mu^2_r(s^h,\eta_1)$, $\mu^2_r(s^g,\eta_1)$, $\mu^2_r(s^h,s^g)$ — формы вида (15).

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 6 в случае $r=0$ доказана в [14].

Лемма 7. *Определители*

$$\mu_r^2(s^h,s^g)=\sum_{m=n-1-r-p}^{p-1}\sum_{j=m+r-p+1}^{m+p-1}C_{n-1-r}^{m}C_r^{j-m}(n-1-r-m)/C_{n-2}^{j}(n-1)$$
$$D_{1,1,j-m,r+m-j,m,n-2-r-m}(s^h,s^g,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_z s^g,\overline{\partial}_\zeta s^h,\overline{\partial}_\zeta s^g)$$

и

$$\mu_r^2(s^h,s^g,\eta_1)=$$
$$\sum_{s=0}^{min\{n-3-r,p-1\}}\sum_{m=s}^{min\{n-3-r,s+p-1\}}\sum_{k=s}^{min\{r+s,s+p-1\}}\sum_{j=m-s}^{min\{r+m-k,m-s+p-1\}}$$
$$C_{n-2-r}^{s}C_{n-2-r-s}^{m-s}C_r^{k-s}C_{r-k+s}^{j-m+s}(n-2-r-m)(n-1-r)/C_{n-3-k}^{j}C_{n-3}^{k}(n-2)(n-1)$$
$$D_{1,1,1,j-m+s,k-s,r+m-j-k,m-s,s,n-3-r-m}$$
$$(s^h,s^g,\eta_1,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_z s^g,\overline{\partial}_z\eta_1,\overline{\partial}_\zeta s^h,\overline{\partial}_\zeta s^g,\overline{d}\eta_1)$$

и, следовательно, $\mu_r^2(s^h,s^g)=0$, *если* $2p<n-r$ *(соответственно,* $2p<r+2$*).*

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Omega^\delta=\{\zeta\in\Omega:\varrho_0<\delta\}$, $G^\delta=\{\zeta\in\Omega:|\varrho|<\delta\}$, где $\delta>0$ достаточно мала. Для $\zeta\in\Omega^\delta\setminus\Gamma$ и $z\in\Omega^\delta$ положим $P_1(\zeta,z)=P_1(\zeta,z,x(\zeta))$, где вектор $x(\zeta)$ определен равенством

$$x(\zeta)=(x^1(\zeta),\ldots,x^k(\zeta))=\Big(-\frac{\varrho_1(\zeta)}{|\varrho(\zeta)|},\ldots,-\frac{\varrho_k(\zeta)}{|\varrho(\zeta)|}\Big). \tag{16}$$

Согласно предложению 3.3.2 из [2], вектор-функция P_1 является сильно регулярным барьером для многообразия $\Gamma\cap\Omega^0$ со свойством

$$K_{l,r}(P_1(\zeta,z))=0 \tag{17}$$

для всех $z\in\Omega^\delta$ и $\zeta\in\Omega^\delta\setminus\Gamma$ таких, что $x(\zeta)\in S\setminus\pm U$. Пусть $h_{z,\varepsilon}$ — допустимые циклы, являющиеся объединением графиков отображений

$$\eta_1(\zeta,z)=\frac{P_1(\zeta,z)}{<P_1(\zeta,z),\zeta-z>},\ \zeta\in\Gamma_1^\varepsilon=\{\zeta\in\Omega:|\varrho|=\varepsilon;\varrho_0\le\varepsilon\}, \tag{18}$$

$$\eta_0(\zeta,z)=\frac{P_0(\zeta,z)}{<P_0(\zeta,z),\zeta-z>},\ \zeta\in\Gamma_0^\varepsilon=\{\zeta\in\Omega:|\varrho|\le\varepsilon;\varrho_0=\varepsilon\} \tag{19}$$

и

$$\eta_{t_0}(\zeta,z)=t_0\eta_0(\zeta,z)+(1-t_0)\eta_1(\zeta,z),\ 0\le t_0\le 1,\ \zeta\in\Gamma_1^\varepsilon\cap\Gamma_0^\varepsilon \tag{20}$$

над Γ_1^ε, Γ_0^ε и $\Gamma_1^\varepsilon\cap\Gamma_0^\varepsilon\times[0,1]$, соответствующих барьерным вектор-функциям P_1 и P_0. Обозначим через $\tilde{f}$ финитное продолжение формы f в область $G^\delta\cap\Omega^\delta$ со свойством

$$\tilde{f}|_\Gamma=f \tag{21}$$

(см. лемму 2.2.1 из [2]) для $s=\infty$.

Пользуясь предложением 2.2.1 из [2], представим форму f на многообразии $\Gamma\cap\Omega^0$ в виде

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}f=\tilde{K}^\varepsilon\tilde{f}+\overline{\partial}_z\tilde{R}^\varepsilon\tilde{f}+O(\varepsilon), \tag{22}$$

где

$$\tilde{K}^{\varepsilon}\tilde{f} = \tilde{K}^{r,\varepsilon}\tilde{f} + \tilde{K}_0^{r,\varepsilon}\tilde{f} + \tilde{K}_1^{r,\varepsilon}\tilde{f}, \tag{23}$$

$$\tilde{R}^{\varepsilon}\tilde{f} = -(\tilde{R}^{r,\varepsilon}\tilde{f} + \tilde{R}_0^{r,\varepsilon}\tilde{f} + \tilde{R}_1^{r,\varepsilon}\tilde{f}) - R_*^{r,\delta}\tilde{f}; \tag{24}$$

формы в правой части (23) и (24) определяются равенствами

$$\tilde{K}^{r,\varepsilon}f(z) = \int_{\tilde{\Gamma}_1^{\varepsilon}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta, z)), \tag{25}$$

$$\tilde{K}_0^{r,\varepsilon}f(z) = \int_{\tilde{\Gamma}_0^{\varepsilon}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_0(\zeta, z)), \tag{26}$$

$$\tilde{K}_1^{r,\varepsilon}f(z) = \int_{\tilde{\Gamma}_1^{\varepsilon}\cap\tilde{\Gamma}_0^{\varepsilon}\times[0,1]} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_{t_0}(\zeta, z)), \tag{27}$$

$$\tilde{R}^{r,\varepsilon}f(z) = \int_{\tilde{\Gamma}_1^{\varepsilon}\times[0,1]} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(t_*\eta_*(\zeta, z) + (1-t_*)\eta_1(\zeta, z)), \tag{28}$$

$$\tilde{R}_0^{r,\varepsilon}f(z) = \int_{\tilde{\Gamma}_0^{\varepsilon}\times[0,1]} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(t_*\eta_*(\zeta, z) + (1-t_*)\eta_0(\zeta, z)), \tag{29}$$

(30)

$$\tilde{R}_1^{r,\varepsilon}f(z) = \int_{\tilde{\Gamma}_1^{\varepsilon}\cap\tilde{\Gamma}_0^{\varepsilon}\times\{t_*\in[0,1]\}\times\{t_0\in[0,1]\}} \overline{\partial} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(t_*\eta_*(\zeta, z) + (1-t_*)\eta_{t_0}(\zeta, z)),$$

$$R_*^{r,\delta}f(z) = \int_{G^{\delta}\cap\Omega^{\delta}} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(\eta_*(\zeta, z)), \tag{31}$$

здесь функции η_1, η_0, η_{t_0} определены, соответственно, равенствами (18), (19), (20), а $\eta_*(\zeta, z) = \frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{|\zeta-z|^2}$.

Для фиксированных δ $(0 < \varepsilon < \delta)$ и $x \in S$ положим далее

(32)

$\Gamma_x^{\varepsilon} = \{\zeta \in \Omega : \varrho_i = -\varepsilon x^i, i = 1, 2. \ldots, k\}; \tilde{\Gamma}_1^{\varepsilon} = \{\zeta \in \Omega : |\varrho| > \varrho_0; \varepsilon \le |\varrho| \le \delta\}$,

$\tilde{\Gamma}_0^{\varepsilon} = \{\zeta \in \Omega : |\varrho| < \varrho_0; \varepsilon \le \varrho_0 \le \delta\}$.

Пусть $\Gamma_J^{\varepsilon} = \{z \in \partial(G^{\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon}) : \varrho_j = \varepsilon$ для $j \in J\}$.

Выберем ориентацию на всех Γ_J^{ε} так, чтобы она была кососимметрической относительно компонент из J и имели место равенства

$$\partial(G^{\varepsilon} \cap \Omega^{\varepsilon}) = \cup_{j=0}^{1}\Gamma_j^{\varepsilon};\ \partial\Gamma_J^{\varepsilon} = \cup_{i=0}^{1}\Gamma_{J,i}^{\varepsilon}. \tag{33}$$

Рассмотрим симплекс

$$\Delta = \{t = (t_*, t_0, t_1) \in R^3 : t_j \ge 0,\ \sum_{j=*}^{1} t_j = 1\}$$

в R^3, снабженный стандартной ориентацией. Для каждого упорядоченного подмножества $J = (j_1, \ldots, j_k)$ из $(*, 0, 1)$ положим $\Delta_J = \{t \in \Delta : \sum_{j\in J} t_j = 1\}$. Ориентация каждого подсимплекса выбирается так, чтобы

$$\partial\Delta_J = \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu+1}\Delta_{J_{\hat{\nu}}}, \tag{34}$$

где $J_{\hat{\nu}} = (j_1, \ldots, j_{\nu-1}, j_{\nu+1}, \ldots, j_k)$.

В силу (33) и (34) для любого $I = (i_1, \ldots, i_m)$, из $(0,1)$ и $J = (j_1, \ldots, j_k) \subset (*, 0, 1)$ многообразия $\Gamma_I^\varepsilon \times \Delta_J$ ориентированы так, что имеем равенство:

$$\partial(\Gamma_I^\varepsilon \times \Delta_J) = \partial\Gamma_I^\varepsilon \times \Delta_J + (-1)^{|I|}\Gamma_I^\varepsilon \times \partial\Delta_J, \tag{35}$$

где $|I|$ обозначает количество компонент из I.

Для фиксированного $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ по формуле Стокса, примененной к форме $f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta)$ на многообразии $H_{z,\varepsilon} = \cup_{\varepsilon \le t \le \delta} h_{z,t}$ имеем

$$\begin{gathered}(36)\quad \tilde{K}^\varepsilon \tilde{f} = \\ K^{r,\varepsilon}\tilde{f} + K_0^{r,\varepsilon}\tilde{f} + K_1^{r,\varepsilon}\tilde{f} - \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1) - \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_0) - \\ \int_{\Gamma_1^\varepsilon \cap \Gamma_0^\varepsilon \times [0,1]} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_{t_0}) + \int_{\tilde{\Gamma}_1^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1) + \\ \int_{\tilde{\Gamma}_0^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_0) + \int_{\tilde{\Gamma}_1^\varepsilon \cap \tilde{\Gamma}_0^\varepsilon \times [0,1]} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_{t_0}).\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(37)\quad \overline{\partial}\tilde{R}^\varepsilon \tilde{f} = -\overline{\partial}(R^{r,\varepsilon}\tilde{f} + R_0^{r,\varepsilon}\tilde{f} + R_1^{r,\varepsilon}\tilde{f} + \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_*) + \\ \int_{\Gamma_1^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_1) + \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_*) + \\ \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_0) + \int_{\Gamma_1^\varepsilon \cap \Gamma_0^\varepsilon \times \{t_0 \in [0,1]\}} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_{t_0}) - \\ \int_{\tilde{\Gamma}_1^\varepsilon \cap \tilde{\Gamma}_0^\varepsilon \times [0,1]} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(\eta_{t_0}) - \int_{\tilde{\Gamma}_0^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(\eta_*) - \\ \int_{\tilde{\Gamma}_1^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(\eta_*) - \int_{\tilde{\Gamma}_1^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(\eta_1) - \\ \int_{\tilde{\Gamma}_0^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_{r-1}(\eta_0)) - \overline{\partial}R_*^{r,\delta}\tilde{f},\end{gathered}$$

где

$$K^{r,\varepsilon} f(z) = \int_{\Gamma_1^\varepsilon} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta, z)), \tag{38}$$

$$K_0^{r,\varepsilon} f(z) = \int_{\Gamma_0^\varepsilon} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_0(\zeta, z)), \tag{39}$$

$$K_1^{r,\varepsilon} f(z) = \int_{\Gamma_1^\varepsilon \cap \Gamma_0^\varepsilon \times [0,1]} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_{t_0}(\zeta, z)), \tag{40}$$

$$R^{r,\varepsilon} f(z) = \int_{\Gamma_1^\varepsilon \times [0,1]} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(t_*\eta_*(\zeta, z) + (1-t_*)\eta_1(\zeta, z)), \tag{41}$$

$$R_0^{r,\varepsilon} f(z) = \int_{\Gamma_0^\varepsilon \times [0,1]} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(t_*\eta_*(\zeta, z) + (1-t_*)\eta_0(\zeta, z)), \tag{42}$$

(43)
$$R_1^{r,\varepsilon} f(z) = \int_{\Gamma_1^\varepsilon \cap \Gamma_0^\varepsilon \times \{t_* \in [0,1]\} \times \{t_0 \in [0,1]\}} f(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(t_* \eta_*(\zeta, z) + (1-t_*)\eta_{t_0}(\zeta, z)).$$

Отсюда имеем

(44)
$$\tilde{K}^\varepsilon \tilde{f} + \overline{\partial}_z \tilde{R}^\varepsilon \tilde{f} = K^{r,\varepsilon} \tilde{f} + K_0^{r,\varepsilon} \tilde{f} + K_1^{r,\varepsilon} \tilde{f} - \overline{\partial}_z (R^{r,\varepsilon} \tilde{f} + R_0^{r,\varepsilon} \tilde{f} + R_1^{r,\varepsilon} \tilde{f}) - \overline{\partial}_z R_*^{r,\delta} \tilde{f} -$$
$$\overline{\partial}_z \Big(\int_{\Gamma_1^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_{r-1}^2(s^h, \eta_*) + \int_{\Gamma_0^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_{r-1}^2(s^h, \eta_*) -$$
$$\int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus G^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_{r-1}^2(\eta_*) \Big).$$

Используя неравенство (8) для функции $< P_0(\zeta, z), \zeta - z >$, заметим, что коэффициенты форм $K_0^{r,\varepsilon} \tilde{f}$ и $R_0^{r,\varepsilon} \tilde{f}$ равномерно на $\Gamma \cap \Omega^0$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Из неравенства (8) для функций $< P_0(\zeta, z), \zeta - z >$ и $< P_1(\zeta, z, x), \zeta - z >$ вытекает, что коэффициенты формы

(45)
$$K_{l,r}(\eta_{t_0}(\zeta, z, x)) =$$
$$\sum_{|I|+|J|=n-2-r}{}' a_{I,J}(\zeta, z, x) d\overline{\zeta}_J \wedge dx_I \wedge dt_0 \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial \zeta),$$

где $I \subset (1, \dots, k)$, являются формами с непрерывными коэффициентами переменных $\zeta \in \{\zeta \in G^\delta \cap \Omega^\delta : \varrho_0 = |\varrho|\}$, $z \in \Gamma \cap \Omega^0$, $x \in S$.

Положим
$$\gamma_{x_I}^\varepsilon = \{\zeta \in \partial \Gamma_1^\varepsilon : x^i(\zeta) = x^i, i \in I\},$$

где
$$\partial \Gamma_1^\varepsilon = \{\zeta \in \Omega : |\varrho| = \varepsilon, \varrho_0 = \varepsilon\}.$$

Поскольку $mes_{n-2-|I|}(\gamma_{x_I}^\varepsilon) = O(\varepsilon^{k-1-|I|})$, то для мультииндексов I длины меньше $k-1$ интегралы от дифференциальных форм: $a_{I,J}(\zeta, z, x) d\overline{\zeta}_J \wedge dx_I \wedge dt_0 \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial \zeta)$, стоящих под знаком интеграла (40), стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Отсюда и из теоремы Фубини следует равенство

(46)
$$K_1^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) = \int_{\tilde{x} \in \tilde{S}} \int_{\zeta \in \partial(\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_{t_0}(\zeta, z, x)),$$

где Γ_x^ε — многообразие вида (32), $\tilde{x} = (t_0, (1-t_0)x)$.

Переходя в равенстве (46) к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

(47)
$$lim_{\varepsilon \to 0} K_1^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) = \int_{\partial(\Gamma \cap \Omega^0) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_{t_0}(\zeta, z, x)),$$

где правая часть в точности равна правой части (13).

Отметим, что интеграл в правой части (47) корректно определен для точек z из некоторой окрестности $\tilde{\Omega}$ многообразия $\Gamma \cap \Omega^0$.

Из неравенства (8) для функций $< P_0(\zeta, z), \zeta - z >$ и $< P_1(\zeta, z, x), \zeta - z >$ вытекает, что коэффициенты формы

$$(48)\quad K_{l,r-1}(t_*\eta_* + (1-t_*)\eta_{t_0}(\zeta, z, x)) = \sum_{|I|+|J|=n-2-r}{}' a_{I,J}(\zeta, z, x) d\overline{\zeta}_J \wedge dx_I \wedge dt_* \wedge dt_0 \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial\zeta),$$

где $I \subset (1, \ldots, k)$, являются формами с непрерывными коэффициентами переменных $\zeta \in \{\zeta \in G^\delta \cap \Omega^\delta : \varrho_0 = |\varrho|\}$, $z \in \Gamma \cap \Omega^0$, $x \in S$.

Поскольку $mes_{n-2-|I|}(\gamma^\varepsilon_{x_I}) = O(\varepsilon^{k-1-|I|})$, то для мультииндексов I длины меньше $k-1$ интегралы от дифференциальных форм: $a_{I,J}(\zeta, z, x) d\overline{\zeta}_J \wedge dx_I \wedge dt_* \wedge dt_0 \wedge D_{l,n-l}(\partial z, \partial\zeta)$, стоящих под знаком интеграла (43), стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Отсюда и из теоремы Фубини следует равенство

$$(49)\quad \overline{\partial} R_1^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) =$$

$$\overline{\partial}\Big(\int_{\tilde{S}} \int_{\partial(\Gamma^\varepsilon_x \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_{t_0}) + \int_{\tilde{S}} \int_{\partial(\Gamma^\varepsilon_x \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_* + (1-t_*)\eta_0) -$$
$$\int_{\tilde{S}} \int_{\partial(\Gamma^\varepsilon_x \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_* + (1-t_*)\eta_1) -$$
$$\int_{\{t_* \in [0,1]\} \times \{t_0 \in [0,1]\} \times S} \int_{\partial(\Gamma^\varepsilon_x \cap \Omega^\varepsilon)} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_* + (1-t_*)\eta_{t_0})\Big).$$

где Γ^ε_x — многообразие вида (32).

Переходя в равенстве (49) к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем

$$(50)\quad lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\partial} R_1^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) = \overline{\partial}\Big(\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega^0) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_{t_0}(\zeta, z, x)) -$$
$$\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega^0) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_* + (1-t_*)\eta_1(\zeta, z, x))\Big).$$

Отметим, что интегралы в правой части (50) корректно определены для точек z из некоторой окрестности $\tilde{\Omega}$ многообразия $\Gamma \cap \Omega^0$.

Покажем теперь, что для $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ имеем

$$(51)\quad lim_{\varepsilon \to 0} K^{r,\varepsilon} \tilde{f} = K_{\pm U} f,$$

где форма $K_{\pm U} f$ определена равенством (12).

В силу предложения 3.3.2 из [2] имеем

$$(52)\quad < \overline{\partial}_\zeta P_1(\zeta, z, x(\zeta)) \wedge d\zeta >^{n-k-r+1} = 0$$

для $\zeta \in \Omega^\delta \setminus \Gamma$ и $z \in \Omega^0 \cap \Gamma$.

Поэтому форма $K_{l,r}(\eta_1(\zeta, z, x))$ имеет порядок $n-k-r$ относительно $d\overline{\zeta}$ и, соответственно, порядок $k-1$ относительно x.

Далее, в силу (6) (соответственно, (7)) имеем $K_{l,r}(\eta_1(\zeta, z, x)) = 0$ для $\zeta \in \Gamma^\varepsilon_x \cap \Omega^\varepsilon$, $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ и $x \in S \setminus \pm U$.

Отсюда и из теоремы Фубини получаем равенство

$$(53)\quad K^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) = \int_{x \in \pm U} \int_{\zeta \in \Gamma^\varepsilon_x \cap \Omega^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge K_{l,r}\Big(\frac{P_1(\zeta, z, x)}{< P_1(\zeta, z, x), \zeta - z >}\Big).$$

Покажем. что интеграл в правой части (53) корректно определен при $\varepsilon = 0$ и $z \in \Gamma \cap \Omega^0$.

Для этого при фиксированных $x \in \pm U$ и $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ рассмотрим интеграл вида

$$A_\varepsilon(x,z) = \int_{\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta,z,x)).$$

По формуле Стокса, примененной к форме $f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1)$ на многообразии точек $\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon = \cup_{\varepsilon \le t \le \delta}(\Gamma_x^t \cap \Omega^t)$ с учетом (52) имеем

$$A_\varepsilon(x,z) = \int_{\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta,z,x)) - \int_{\partial \tilde{\Gamma}_x^\varepsilon \setminus (\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta,z,x)).$$

Используя лемму 2.2.2 из [2] и неравенство (8) для вектор-функции P_1, получим, что коэффициенты формы $A_\varepsilon(x,z)$ принадлежат классу $C^\infty(\pm U \times (\Gamma \cap \Omega^0))$ для всех $\varepsilon \ge 0$.

Теперь можем перейти в равенстве (53) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить равенство

$$lim_{\varepsilon \to 0} K^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) = \int_{\Gamma \cap \Omega^0 \times \pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta,z,x)), \tag{54}$$

правая часть которого в точности есть $K_{\pm U} f$.

Поскольку диаметр области $\pm U$ меньше двух, то область $\Omega_{\pm U}$ не пуста, а форма $K_{\pm U} f$ корректно определена в этой области и принадлежит классу $C^\infty_{l,r}(\Omega_{\pm U} \cup (\Gamma \cap \Omega^0))$.

Покажем теперь, что для $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ имеем

$$\begin{aligned} (55) \quad & lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\partial} R^{r,\varepsilon} \tilde{f} = \\ & \int_{(\Gamma \cap \Omega^0) \times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1(\zeta,z,x)) + \int_{\Gamma \cap \Omega^0} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(\eta_*(\zeta,z)) + \\ & \int_{\partial(\Gamma \cap \Omega^0) \times \{(t_*,(1-t_*)x):\ t_* \in [0,1],\ x \in S\}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial} \Phi^1_{r-1}(s^h, t_* \eta_*(\zeta,z) + (1-t_*)\eta_1(\zeta,z,x)). \end{aligned}$$

В силу (52) форма $\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_1)$ имеет порядок $n-k-r$ относительно $d\overline{\zeta}$ и, соответственно, порядок $k-1$ относительно x.

Далее, в силу (6) (соответственно, (7)) имеем $\overline{\partial}_z \Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_1) = 0$ для $\zeta \in \Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon$, $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ и $x \in S \setminus \pm U$.

Отсюда и из теоремы Фубини получаем равенство

$$\begin{aligned} (56) \quad & \overline{\partial} R^{r,\varepsilon} \tilde{f}(z) = \\ & \int_{\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(\eta_*) + \int_{x \in \pm U} \int_{\zeta \in \Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1(\zeta,z,x)) + \\ & \int_{\{(t_*,(1-t_*)x): t_* \in [0,1], x \in S\}} \int_{\partial(\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, t_* \eta_* + (1-t_*)\eta_1) - \\ & \int_{\{(t_*,(1-t_*)x): t_* \in [0,1], x \in S\}} \int_{\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, t_* \eta_* + (1-t_*)\eta_1). \end{aligned}$$

Покажем, что интегралы в правой части (56) корректно определены при $\varepsilon = 0$ и $z \in \Gamma \cap \Omega^0$.

Для этого при фиксированных $x \in \pm U$ или $x \in S$, $z \in \Gamma \cap \Omega^0$ и $t_* \in [0,1]$ рассмотрим интеграл вида

$$A_\varepsilon(x,z) = \int_{\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1(\zeta, z, x))$$

или

$$A'_\varepsilon(x,z,t_*) = \int_{\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_*(\zeta,z) + (1-t_*)\eta_1(\zeta,z,x)).$$

По формуле Стокса, примененной к форме $f(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1)$ или $\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_* + (1-t_*)\eta_1)$ на многообразии точек $\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon = \cup_{\varepsilon \le t \le \delta}(\Gamma_x^t \cap \Omega^t)$ с учетом (52) имеем

$$A_\varepsilon(x,z) = \int_{\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1(\zeta,z,x)) - \int_{\partial\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon \setminus (\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon)} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1(\zeta,z,x))$$

или

$$A'_\varepsilon(x,z,t_*) = (-1)^{l+r+1} \int_{\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{d}\Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_*(\zeta,z) + (1-t_*)\eta_1(\zeta,z,x)) -$$
$$\int_{\partial\tilde{\Gamma}_x^\varepsilon \setminus (\Gamma_x^\varepsilon \cap \Omega^\varepsilon)} \overline{\partial}\tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, t_*\eta_*(\zeta,z) + (1-t_*)\eta_1(\zeta,z,x))$$

Используя лемму 2.2.2 из [2] и неравенство (8) для вектор-функции P_1, получим, что коэффициенты формы $A_\varepsilon(x,z)$ или $A'_\varepsilon(x,z,t_*)$ принадлежат классу $C^\infty(\pm U \times (\Gamma \cap \Omega^0))$ или $C^\infty(S \times [0,1] \times (\Gamma \cap \Omega^0))$ для всех $\varepsilon \ge 0$.

Теперь можем перейти в равенстве (56) к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить равенство (55). Форма (55) корректно определена в области $\Omega_{\pm U}$ и принадлежит классу $C^\infty_{l,r}(\Omega_{\pm U} \cup (\Gamma \cap \Omega^0))$.

Теперь перейдем к пределу (при $\varepsilon \to 0$) в равенстве (22), учитывая (36), (37), (47), (50), (54) и (55).

Осталось показать, что форма F из равенства (11) $\overline{\partial}$-замкнута в области $\Omega_{\pm U}$.

Действительно, при фиксированном $z \in \Omega_{\pm U}$, пользуясь соотношением

$$(\overline{\partial}_\zeta + d_x) K_{l,r}(\eta_1) = (-1)^{l+r} \overline{\partial}_z K_{l,r-1}(\eta_1), \tag{57}$$

формулой Стокса и равенством $\partial\tilde{S} = S$, получаем

$$\overline{\partial}F = \tag{58}$$
$$\int_{(\Gamma\cap\Omega^0)\times\partial\pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r+1}(\eta_1(\zeta,z,x)) + \int_{\partial(\Gamma\cap\Omega^0)\times S\setminus\pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r+1}(\eta_1(\zeta,z,x)).$$

Интегралы в правой части (58) исчезают: первый интеграл в силу (6), второй интеграл в силу леммы 4.1.1 из [2].

Доказательство теоремы 3. Пусть компакт $K = \hat{K}_\Omega$ и $K \cap \Gamma \ne \emptyset$. Форма f типа (l,r) с коэффициентами класса $C^1(\Gamma \setminus K)$ и f — CR-форма на $\Gamma \setminus K$. Рассмотрим такую последовательность строго псевдовыпуклых областей K_s, чтобы $\bigcap_s K_s = K$, $K_{s+1} \subset\subset K_s$, ∂K_s пересекается с Γ трансверсально и, кроме того,

$$\int_{\Gamma\setminus K_s} f \wedge \overline{\partial}\lambda = -(-1)^{l+r} \int_{\Gamma\cap\partial K_s} f \wedge \lambda \tag{59}$$

для любой формы λ типа $(n-l, n-r-k-1)$ с коэффициентами из $C_0^1(\Omega \setminus K)$. (Знак "минус"возник из-за того, что ориентация ∂K_s согласована с K_s.)

Рассмотрим функцию $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ и множества

$$U_s(h) = \{z \in \Omega : |h(z)| > max_{\overline{K}_s}|h|\},$$

$$U(h) = \{z \in \Omega : |h(z)| > max_K|h|\};$$

тогда $U(h) = \cup_{s=1}^{\infty} U_s(h)$. В силу равенства $K = \hat{K}_\Omega$ имеем

$$\Omega \setminus K = \cup_{h \in \mathcal{O}(\Omega)} U(h).$$

Пусть $z \in U_s(h) \cap \Omega_\Gamma \cap \Omega_j \setminus K_s$; тогда положим

$$(60) \quad F_{s,j}^h(z) = \int_{[(\Gamma \setminus K_s) \cap \Omega_j] \times \pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta, z, x)) + \int_{\partial(\Gamma \cap \Omega_j) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(t_0 \eta_j(\zeta, z) + (1-t_0)\eta_1(\zeta, z, x)) + \int_{(\partial K_s \cap \Gamma) \times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_r^2(s^h, \eta_1(\zeta, z, x)) - \int_{[(\Gamma \setminus K_s) \cap \Omega_j]) \times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi_{r-1}^1(s^h, \eta_1(\zeta, z, x)) - \int_{\partial(\Gamma \cap \Omega_j) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi_{r-1}^1(s^h, t_0 \eta_j(\zeta, z) + (1-t_0)\eta_1(\zeta, z, x)) - \overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi_{r-1}^1(s^h, \eta_*(\zeta, z)) - \overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \tilde{f} \wedge K_{l,r-1}(\eta_*(\zeta, z)) + \int_{\partial K_s} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z (-1)^l \Phi_{r-1}^2(s^h, \eta_*(\zeta, z)),$$

где $\eta_j = P_j / < P_j, \zeta - z >$, а P_j — сильно регулярный барьер к $\partial \Omega_j$. Третий и последний интегралы в этой формуле не имеют особенностей, поскольку $|h(z)| > |h(\zeta)|$, если $z \in U_s(h)$, а $\zeta \in \overline{K}_s$.

Покажем, что форма $F_{s,j}^h(z)$ в (60) на самом деле не зависит от s и h. Действительно, если $s < m$, то

$$F_{m,j}^h(z) - F_{s,j}^h(z) = \int_{\Gamma \cap (K_s \setminus K_m) \times \pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1) - \int_{\partial K_s} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z (-1)^l \Phi_{r-1}^2(\eta_*) + \int_{(\partial K_m \cap \Gamma) \times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_r^2(s^h, \eta_1) - \int_{(\partial K_s \cap \Gamma) \times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_r^2(s^h, \eta_1) + \int_{\partial K_m} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z (-1)^l \Phi_{r-1}^2(\eta_*) - \int_{\Gamma \cap (K_s \setminus K_m) \times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi_{r-1}^1(s^h, \eta_1) - \overline{\partial} \int_{K_s \setminus K_m} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi_{r-1}^1(\eta_*) - \overline{\partial} \int_{K_s \setminus K_m} \tilde{f}(\zeta) \wedge K_{l,r-1}(\eta_*).$$

На множестве $K_s \backslash K_m$ первый и последний интегралы в этой формуле особенностей не имеют, так как $z \in U_s(h)$; тогда $K_{l,r}(\eta_1) = \overline{\partial}_z \Phi_{r-1}^1(s^h, \eta_1) + (-1)^r(\overline{\partial}_\zeta +$

$d_x)\Phi_r^2(s^h,\eta_1)$ на $K_s\setminus K_m$ по лемме 3. Отсюда

$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)=\int_{\Gamma\cap\partial(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_r^2(s^h,\eta_1)-$$
$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_r^2(s^h,\eta_1)+\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^h,\eta_1),$$

$$-\overline{\partial}\int_{K_s\setminus K_m}\tilde f(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*)=$$
$$\int_{\partial(K_s\setminus K_m)}\tilde f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h,\eta_*)-\int_{K_s\setminus K_m}\overline{\partial}\tilde f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h,\eta_*).$$

Так как $\partial\pm U\subset S\setminus\pm U$, а форма $\Phi_r^2(s^h,\eta_1)$ состоит на $(K_s\setminus K_m)\cap\Gamma$ из форм $\overline{\partial}_\zeta P_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_\zeta P_1^{j_{n-k-r}}\overline{\partial}_z P_1^{l_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_z P_1^{l_r}$, то из (6), (7) (теорема 1) имеем $\Phi_r^2(s^h,\eta_1)=0$, и, следовательно,

$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)=\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_r^2(s^h,\eta_1)-$$
$$\int_{(\partial K_m\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_r^2(s^h,\eta_1)+\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^h,\eta_1).$$

Поэтому индекс s в форме $F_{s,j}^h$ мы будем в дальнейшем опускать.

Пусть теперь $g\in\mathcal{O}(\Omega)$. Рассмотрим $F_j^h(z)-F_j^g(z)$ для $z\in U_s(h)\cap U_s(g)$. Имеем

$$(61)\quad F_j^h(z)-F_j^g(z)=$$
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_r^2(s^h,\eta_1)-\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_r^2(s^g,\eta_1)-$$
$$\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j])\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^h,\eta_1)+\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j])\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^g,\eta_1)-$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde S} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^h,t_0\eta_j+(1-t_0)\eta_1)+$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde S} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^g,t_0\eta_j+(1-t_0)\eta_1)-$$
$$\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus K_s}\overline{\partial}\tilde f(\zeta)\wedge\Phi_{r-1}^1(s^h,\eta_*)+\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus K_s}\overline{\partial}\tilde f(\zeta)\wedge\Phi_{r-1}^1(s^g,\eta_*)+$$
$$\int_{\partial K_s} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z(-1)^l\Phi_{r-1}^2(s^h,\eta_*)-\int_{\partial K_s} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z(-1)^l\Phi_{r-1}^2(s^g,\eta_*).$$

Если $n=2$, то

$$\Phi_r^2(s^h,\eta_1)-\Phi_r^2(s^g,\eta_1)=$$
$$\frac{(-1)^l}{(2\pi i)^2 2!}\binom{2}{l}\frac{h_1g_2-h_2g_1}{(h(\zeta)-h(z))(g(\zeta)-g(z))}\wedge D_{l,2-l}(\partial z,\partial\zeta),\ \text{если } r=0;$$

так как для $z\in U_s(h)\cap U_s(g)$ и $\zeta\in\partial K_s$,

$$|h(z)|>|h(\zeta)|,\ |g(z)|>|g(\zeta)|,$$

то

$$\frac{1}{h(\zeta)-h(z)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{h^k(\zeta)}{h^{k+1}(z)},\ \frac{1}{g(\zeta)-g(z)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k(\zeta)}{g^{k+1}(z)},$$

а интеграл

$$\int_{\partial K_s\cap\Gamma} f(\zeta)P(\zeta)d\zeta=0$$

для функций P, голоморфных в Ω, (если Γ не замкнуто, то интеграл может быть отличен от нуля). Заметим, что при $r=0$ все слагаемые в равенстве (61), кроме первого и второго, заведомо нулевые.

Если $n\geq 3$, то по лемме 6

$$\begin{gathered}
F_j^h(z)-F_j^g(z)=\\
\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l(\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1)+(-1)^r(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\Phi^2_r(s^h,s^g,\eta_1))-\\
\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j])\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)+\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j])\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^g,\eta_1)-\\
\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,t_0\eta_j+(1-t_0)\eta_1)+\\
\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^g,t_0\eta_j+(1-t_0)\eta_1)+\\
\int_{\partial K_s}\tilde{f}(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z(\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-2}(s^h,s^g,\eta_*)+(-1)^{r-1}\overline{d}\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_*))-\\
\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*)+\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^g,\eta_*).
\end{gathered}$$

Изменим коэффициенты формы $\Phi^2_r(s^h,s^g,\eta_1)$ вне $(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U$ так, чтобы новая форма $\tilde{\Phi}^2_r(s^h,s^g,\eta_1)$ являлась формой с компактным носителем в Ω_j с гладкими коэффициентами. Так как

$$\partial((\Gamma\cap(\Omega_j\setminus K_s))\times\pm U)=-(\Gamma\cap(\Omega_j\setminus K_s))\times\partial\pm U+\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\pm U-(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U,$$

а

$$\int_{\Gamma\cap(\Omega_j\setminus K_s)\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\tilde{\Phi}^2_r(s^h,s^g,\eta_1)=0$$

в силу теоремы 1, то

(62)

$$F_j^h(z) - F_j^g(z) = -\int_{\partial[\Gamma\cap(\Omega_j\setminus K_s)\times\pm U]} f(\zeta)\wedge(-1)^l(-1)^r(\overline{\partial}_\zeta + d_x)\tilde{\Phi}_r^2(s^h, s^g, \eta_1)+$$
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^h, s^g, \eta_1)+$$
$$\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j])\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, \eta_1)-$$
$$\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j])\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^g, \eta_1)+$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, t_0\eta_j + (1-t_0)\eta_1)-$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^g, t_0\eta_j + (1-t_0)\eta_1)-$$
$$\int_{\partial K_s} \tilde{f}(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z(-1)^r\overline{d}\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_*)+$$
$$\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_{r-1}^2(s^h,\eta_*) - \overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi_{r-1}^2(s^g,\eta_*) =$$
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^1(s^h, s^g, \eta_1)+$$
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_1)+\int_{[(\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j]\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_1)-$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_1)+\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times S} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_1)+$$
$$\int_{\partial K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_*) - \int_{\partial K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi_{r-1}^2(s^h, s^g, \eta_*) = 0.$$

Покажем теперь, что форма $F_j(z) = F_j^h(z)$ $\overline{\partial}$-замкнута в $U_s(h)$. Рассмотрим

$$\overline{\partial}F_j(z) = -\int_{\partial((\Gamma\setminus K_s)\cap\Omega_j)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1) + \int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times S} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1)-$$
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(K_{l,r+1}(\eta_1) - (-1)^{r+1}(\overline{\partial}_\zeta + d_x)\Phi_{r+1}^2(s^h,\eta_1)) =$$

(мы использовали леммы 2 и 3)

$$= \int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times(S\setminus\pm U)} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1(\zeta, z, x)).$$

Осталось использовать лемму 4.1.1 из [2], согласно которой

$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times(S\setminus\pm U)} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1) = 0.$$

Пусть теперь $\zeta^0 \in \Gamma\setminus K$ и $x^0 \in \pm U$ такие, что $P_1(\zeta^0, z, x^0)$ — сильно регулярный голоморфный (в Ω) барьер к уровням функции $\tilde{\varrho}_{x^0}$. Обозначим $h(z) =< P_1(\zeta^0, z, x^0), \zeta^0 - z >$. Если взять шар $B = B(\zeta^0, r)$ так, чтобы

$B\cap K=\emptyset$, то $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение F формы f в область $B\cap\Omega_\Gamma$ дается формулой типа (14):

$$F=\int_{(\Gamma\cap B)\times\pm U}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)+\int_{(\partial B\cap\Gamma)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(t_0\eta_B+(1-t_0)\eta_1)-$$
$$\overline{\partial}\int_B\overline{\partial}\tilde f(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*)-\int_{(\Gamma\cap B)\times\pm U}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)-$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap B)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,t_0\eta_B+(1-t_0)\eta_1)-\overline{\partial}\int_B\tilde f(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*),$$

где $\eta_B=\frac{P_B(\zeta,z)}{<P_B,\zeta-z>}$, а P_B — сильно регулярный барьер к ∂B. Покажем, что для всех $z\in\Omega_\Gamma\cap B$, достаточно близких к ζ^0, форма $F(z)=F^h_{j,s}(z)$. Действительно, в силу (8)

$$2|h(\zeta)|\geq 2Reh(\zeta)=2Re<P_1(\zeta^0,\zeta,x^0),\zeta^0-\zeta>\geq\gamma|\zeta^0-\zeta|^2,$$

если $\zeta\in\Gamma\setminus B$; а $h(\zeta)\to 0$ при $\zeta\to\zeta^0$, т.е. $|h(\zeta)|>|h(z)|$, если $\zeta\in\Gamma\setminus B$, а z достаточно влизко к ζ^0. Поэтому для таких z и $\tilde\eta_{t_0}=t_0\eta_B+(1-t_0)\eta_1$

(63)
$$F^h_{j,s}(z)-F(z)=\int_{(\Gamma\setminus(B\cup K_s)))\cap\Omega_j\times\pm U}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)+\int_{(\Gamma\cap\partial\Omega_j)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_{t_0})-$$
$$\int_{(\Gamma\cap\partial B)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\tilde\eta_{t_0})+\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U}f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)-$$
$$\int_{(\Gamma\setminus(K_s\cup B))\cap\Omega_j\times\pm U}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)-\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega_j)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_{t_0})+$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap B)\times\tilde S}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\tilde\eta_{t_0})-\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus(K_s\cup B)}\overline{\partial}\tilde f(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*)-$$
$$\overline{\partial}\int_{G^\delta\cap\Omega^\delta\setminus(K_s\cup B)}\tilde f(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*)+\int_{\partial K_s}\tilde f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z(-1)^l\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_*)=$$
$$\int_{\Gamma\cap\partial\Omega_j\times\pm U}f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)-\int_{(\Gamma\cap\partial B)\times\pm U}f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)-$$
$$\int_{(\Gamma\cap\partial\Omega_j)\times S}f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)+\int_{(\Gamma\cap\partial B)\times S}f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)-$$
$$\overline{\partial}\int_{\partial B}\tilde f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_*)=-\int_{\Gamma\cap(\Omega_j\setminus B)\times(S\setminus\pm U)}f(\zeta)\wedge(-1)^r\overline{d}\Phi^2_r(s^h,\eta_1)=$$
$$-\int_{\Gamma\cap(\Omega_j\setminus B)\times(S\setminus\pm U)}f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)+\int_{\Gamma\cap(\Omega_j\setminus B)\times(S\setminus\pm U)}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)=$$
$$\int_{\Gamma\cap(\Omega_j\setminus B)\times(S\setminus\pm U)}f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)=0$$

в силу теоремы 1. Поскольку $\Gamma\setminus K$ связно и в окрестности точки ζ^0 интеграл (14) дает $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение $f(\zeta)$ в Ω_Γ, то интеграл $F^h_{j,k}(z)$ дает $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение f в $\Omega_\Gamma\setminus K$.

Если сильно регулярный голоморфный барьер есть в любой точке $\zeta^0\in\Gamma\setminus K$, то условие связности $\Gamma\setminus K$ не нужно, поскольку предыдущее рассуждение показывает, что интеграл (14) дает $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение $f(\zeta)$ в окрестность любой точки $\zeta^0 \in \Gamma \setminus K$.

Доказательство теорем 4 и 5. Пусть компакт $K = \tilde{K}_p$ и $K \cap \Gamma \neq \emptyset$. Форма f типа (l, r) с коэффициентами класса $C^1(\Gamma \setminus K)$ и f — CR-форма на $\Gamma \setminus K$. Рассмотрим последовательность открытых множеств K_s (каждое K_s состоит из конечного числа связных компонент) с границнй класса C^∞ таких, что $\bigcap_s K_s = K$, $K_{s+1} \subset\subset K_s$, ∂K_s пересекается с Γ трансверсально и, кроме того, выполняется равенство (59). Если мы покажем, что для каждого s форма f продолжается $\overline{\partial}$-замкнуто с $(\Omega_s \cap \Gamma) \setminus K$ в $\Omega_\Gamma \cap \Omega_s \setminus K$, тогда теоремы 4 и 5 будут доказаны (по теореме единственности для порождающих многообразий). Поэтому мы можем предположить, что $\Omega_s = \Omega$.

Пусть h есть вектор-функция вида $h = (h_1, \ldots, h_p) : \Omega \to \mathbb{C}^p, h_j \in \mathcal{O}(\Omega), j = 1, \ldots, p$. Пусть $U_s(h) = \Omega \setminus h^{-1}(h(\overline{K}_s))$, а $U(h) = \Omega \setminus h^{-1}(h(K))$. Тогда $U(h) = \bigcup_s U_s(h)$, а $\Omega \setminus K = \bigcup_{\{h\}} U(h)$, поскольку $K = \tilde{K}_p$

Для $z \in U_s(h) \cap \Omega_\Gamma$ и $\zeta \in \Gamma \setminus K_s$ положим

$$
(64) \quad F^h_s(z) = \int_{(\Gamma \setminus K_s) \times \pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1(\zeta, z, x)) +
\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(t_0\eta_0(\zeta, z) + (1 - t_0)\eta_1(\zeta, z, x)) +
\int_{(\partial K_s \cap \Gamma) \times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_r(s^h, \eta_1(\zeta, z, x)) -
\int_{(\Gamma \setminus K_s) \times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1(\zeta, z, x)) -
\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega) \times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, t_0\eta_0(\zeta, z) + (1 - t_0)\eta_1(\zeta, z, x)) -
\overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_*(\zeta, z)) -
\overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \tilde{f} \wedge K_{l,r-1}(\eta_*(\zeta, z)) + \int_{\partial K_s} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_*(\zeta, z)),
$$

где $\eta_0 = P_0 / < P_0, \zeta - z >$, а P_0 — сильно регулярный барьер к $\partial\Omega$ (напомним, что $\Omega = \Omega_s$, т.е. Ω является строго псевдовыпуклой областью).

Формы $\Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1)$, $\Phi^2_r(s^h, \eta_1)$ определены для $z \in U_s(h) \cap \Omega_\Gamma$, а $\zeta \in \overline{K}_s$, поскольку $h(\zeta) - h(z) \neq 0$ в этом случае.

Во-первых покажем, что форма $F^h_s(z)$ в (64) не зависит от s и h. Пусть $s < m$, тогда

$$
F^h_m(z) - F^h_s(z) = \int_{\Gamma \cap (K_s \setminus K_m) \times \pm U} f(\zeta) \wedge K_{l,r}(\eta_1) +
\int_{(\partial K_m \cap \Gamma) \times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_r(s^h, \eta_1) - \int_{(\partial K_s \cap \Gamma) \times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi^2_r(s^h, \eta_1) -
$$

$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)-\overline{\partial}\int_{K_s\setminus K_m}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*)-$$
$$\overline{\partial}\int_{K_s\setminus K_m}\tilde{f}(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*)+\int_{\partial K_m}\tilde{f}(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z(-1)^l\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_*)-$$
$$\int_{\partial K_s}\tilde{f}(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z(-1)^l\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_*).$$

По лемме 3 на множестве $\overline{K}_s\setminus K_m$ выполняется равенство

$$K_{l,r}(\eta_1)=\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)+(-1)^r(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\Phi^2_r(s^h,\eta_1)+$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}D_{1,r,n-1-r}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_\zeta s^h)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta)$$

(точка $z\in U_s(h)$ и, следовательно, формы $\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)$ и $\Phi^2_r(s^h,\eta_1)$ не имеют особенностей на $\overline{K}_s\setminus K_m$). Тогда по формуле Стокса и в силу равенства (59) имеем

$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)=$$
$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)+(-1)^r(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\Phi^2_r(s^h,\eta_1)+$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}D_{1,r,n-1-r}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_\zeta s^h)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta))=$$
$$\int_{\Gamma\cap\partial(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)-\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\Phi^2_r(s^h,\eta_1)+$$
$$\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)+\int_{\Gamma\cap(K_s\setminus K_m)\times\pm U} f(\zeta)\wedge$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}D_{1,r,n-1-r}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_\zeta s^h)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta),$$

$$-\overline{\partial}\int_{K_s\setminus K_m}\tilde{f}(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*)=\int_{\partial(K_s\setminus K_m)}\tilde{f}(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_*)-$$
$$\int_{K_s\setminus K_m}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,\eta_*)-\overline{\partial}\int_{K_s\setminus K_m}\tilde{f}(\zeta)\wedge$$
$$\frac{(-1)^{r-1+l(n-r)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{l}D_{1,r-1,n-r}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,\overline{\partial}_\zeta s^h)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta).$$

Если $k=1$, то второй интеграл в верхней формуле равен 0. Пусть $k>1$. Так как $\partial\pm U\subset S\setminus\pm U$, а форма $\Phi^2_r(s^h,\eta_1)$ содержит множество дифференциалов $\overline{\partial}_\zeta P_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_\zeta P_1^{j_{n-m-k-r}}\wedge d_x P_1^{i_1}\wedge\ldots\wedge d_x P_1^{i_{k-2}}\wedge\overline{\partial}_\zeta s^h_{l_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_\zeta s^h_{l_m}\overline{\partial}_z P_1^{k_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_z P_1^{k_{r+m-j}}\wedge\overline{\partial}_z s^h_{k_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_z s^h_{k_{j-m}}$, тогда для того, чтобы $\Phi^2_r(s^h,\eta_1)=0$ на $(K_s\setminus K_m)\times\partial\pm U$, мы должны иметь (по теореме 1), что $n-m-k-r\geq n-q-k+1$ (соответственно, $r+m-j\geq n-q-k+1$), т.е. $m\leq q-1-r$ (соответственно, $j\leq r+m-n+k+q-1$); с другой стороны (по лемме 5) $m\leq p-1$ (соответственно, $j-m\leq p-1$, т.е. $j\leq m+p-1$). Следовательно $\Phi^2_r(s^h,\eta_1)=0$ на $(K_s\setminus K_m)\times\partial\pm U$, если $p-1\leq q-1-r$ (соответственно, $m+p-1\leq r+m-n+k+q-1$), т.е.

$p \leq q - r$ (соответственно, $p \leq r - n + k + q$). Поэтому индекс s в форме F_s^h мы будем в дальнейшем опускать.

Пусть теперь $z \in U_s(h) \cap U_s(g) \cap \Omega_\Gamma$, где g — голоморфная вектор-функция такая же как h. Рассмотрим

$$
\begin{aligned}
(65)\quad F^h(z) - F^g(z) = &\int_{(\partial K_s \cap \Gamma)\times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_r^2(s^h, \eta_1) - \\
&\int_{(\partial K_s \cap \Gamma)\times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l \Phi_r^2(s^g, \eta_1) - \int_{(\Gamma \setminus K_s)\times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1) + \\
&\int_{(\Gamma \setminus K_s)\times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^g, \eta_1) - \int_{\partial K_s} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^g, \eta_*) - \\
&\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega)\times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, t_0\eta_0 + (1-t_0)\eta_1) + \\
&\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega)\times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^g, t_0\eta_0 + (1-t_0)\eta_1) - \overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_*) + \\
&\overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^g, \eta_*) + \int_{\partial K_s} \tilde{f}(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z (-1)^l \Phi^2_{r-1}(s^h, \eta_*).
\end{aligned}
$$

По лемме 6 эта разность состоит из двух членов: первый имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\int_{(\partial K_s \cap \Gamma)\times \pm U} f(\zeta) \wedge (-1)^l (\overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, s^g, \eta_1) + (-1)^r (\overline{\partial}_\zeta + d_x) \Phi_r^2(s^h, s^g, \eta_1)) - \\
&\int_{(\Gamma \setminus K_s)\times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_1) + \int_{(\Gamma \setminus K_s)\times \pm U} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^g, \eta_1) + \\
&\overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^g, \eta_*) - \int_{\partial(\Gamma \cap \Omega)\times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^h, t_0\eta_0 + (1-t_0)\eta_1) + \\
&\int_{\partial(\Gamma \cap \Omega)\times \tilde{S}} f(\zeta) \wedge \overline{\partial}_z \Phi^1_{r-1}(s^g, t_0\eta_0 + (1-t_0)\eta_1) - \overline{\partial} \int_{G^\delta \cap \Omega^\delta \setminus K_s} \overline{\partial} \tilde{f}(\zeta) \wedge \Phi^1_{r-1}(s^h, \eta_*) + \\
&\int_{\partial K_s} \tilde{f}(\zeta) \wedge (-1)^l \overline{\partial}_z (\overline{\partial}_z \Phi^1_{r-2}(s^h, s^g, \eta_*) + (-1)^{r-1} \overline{d} \Phi^2_{r-1}(s^h, s^g, \eta_*)).
\end{aligned}
$$

Изменим знаменатель формы $\Phi_r^2(s^h, s^g, \eta_1)$ вне $(\partial K_s \cap \Gamma) \times \pm U$ так, чтобы новая форма $\tilde{\Phi}_r^2(s^h, s^g, \eta_1)$ являлась формой с компактным носителем в $\Omega \times \pm U$ с гладкими коэффициентами. Имеем

$$
\int_{\Gamma \cap (\Omega \setminus K_s) \times \partial \pm U} f(\zeta) \wedge (\overline{\partial}_\zeta + d_x) \tilde{\Phi}_r^2(s^h, s^g, \eta_1) = 0,
$$

если $k = 1$. Пусть $k > 1$. Используя леммы 2 из [14], 4, 7 и теорему 1 получим, что форма $(\overline{\partial}_\zeta + d_x)\Phi_r^2(s^h, s^g, \eta_1) = 0$ на множестве $\Gamma \cap (\Omega \setminus K_s) \times \partial \pm U$, если $2p \leq q - r + 1$ (соответственно, $2p \leq r - n + k + q + 1$) и $p \leq n - 2 - r$ (соответственно, $p \leq r + 1$), но если $p = n - 1 - r$ (соответственно, $p = r + 2$), тогда это выражение равно 0, когда $q \geq 2n - r - 4$ (соответственно, $q \geq n + r - k + 2$). Продолжим прерванную цепочку равенств

$$= \int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(-1)^l\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1) - \int_{\partial K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_*) +$$

$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1) + \int_{(\Gamma\setminus K_s)\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1) -$$

$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1) + \int_{\partial(\Gamma\cap\Omega)\times S} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_1) +$$

$$\int_{\partial K_s}\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^2_{r-1}(s^h,s^g,\eta_*) = 0$$

(см. равенство (62)).

Далее, остаток $\mu^2_r(s^h,s^g)=0$ на $(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U$, если $k>1$, поскольку он не содержит дифференциалов dx_j, и если $k=1$, тогда $\mu^2_r(s^h,s^g)=0$ для $2p<n-r$ (соответственно, $2p<r+2$) по лемме 7.

Остаток $\mu^2_{r-1}(s^h,s^g)=0$ на $\partial(\Omega\cap\Gamma)\times\tilde{S}$ и $(\Gamma\setminus K_s)\times\pm U$, если $k>1$, поскольку он не содержит дифференциалов dx_j, и если $k=1$, тогда $\mu^2_{r-1}(s^h,s^g)=0$ для $2p<n-r+1$ (соответственно, $2p<r+1$) по лемме 7.

Остаток $\mu^2_{r-1}(s^h,s^g)=0$ на $\Omega^\delta\cap G^\delta\setminus K_s$, если $k\ge 1$ для $2p<n-r+1$ (соответственно, $2p<r+1$) по лемме 7.

Таким образом мы получили, что форма $F^h(z)$ не зависит от выбора h в следующих случаях: *a*) $k=1$, $2p<n-r$ (соответственно, $2p<r+1$); *b*) $k>1$, $2p\le q-r+1$ (соответственно, $2p\le r-n+k+q+1$). Поэтому мы можем опускать индекс h в этих случаях.

Чтобы доказать $\overline{\partial}$-замкнутость формы $F(z)$, мы должны показать, что $\overline{\partial}_zF(z)=0$ для точек $z\in\Omega_\Gamma\cap U_s(h)$. Имеем (используя лемму 2)

$$\overline{\partial}_zF(z)=\overline{\partial}_zF^h_s(z)=$$
$$-\int_{\partial(\Gamma\setminus K_s)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1) + \int_{\partial(\Gamma\cap\Omega)\times S} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1) -$$
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(K_{l,r+1}(\eta_1)-(-1)^{r+1}(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\Phi^2_{r+1}(s^h,\eta_1)-$$
$$\frac{(-1)^{r+1+l(n-r-2)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r+1}\binom{n}{l}D_{1,r+1,n-2-r}(s^h,\overline{\partial}_zs^h,\overline{\partial}_\zeta s^h)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta)) =$$

(мы использовали лемму 3)

$$= \int_{\partial(\Gamma\cap\Omega)\times(S\setminus U)} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1(\zeta,z,x)),$$

так как $\partial U\subset S\setminus U$,

$$K_{l,r}(\eta_1)=$$
$$\frac{(-1)^{r+l(n-r-1)}}{(2\pi i)^n n!}\binom{n-1}{r}\binom{n}{l}D_{1,r,n-r-1}(\eta_1,\overline{\partial}_z\eta_1,(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\eta_1)\wedge D_{l,n-l}(\partial z,\partial\zeta)$$

и, следовательно, на $(\Gamma\setminus K_s)\times\partial\pm U$ эта форма должна содержать множество дифференциалов $\overline{\partial}_\zeta P_1^{j_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_\zeta P_1^{j_{n-k-r+1}}\overline{\partial}_zP_1^{k_1}\wedge\ldots\wedge\overline{\partial}_zP_1^{k_r}=0$; тогда по

теореме 1
$$\int_{(\Gamma\setminus K_s)\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}=0.$$
Интеграл
$$\int_{(\partial K_s\cap\Gamma)\times\pm U} f(\zeta)\wedge(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\Phi^2_{r+1}(s^h,\eta_1)=$$
$$-\int_{(\Gamma\cap(\Omega\setminus K_s))\times\partial\pm U} f(\zeta)\wedge(\overline{\partial}_\zeta+d_x)\tilde{\Phi}^2_{r+1}(s^h,\eta_1)$$
по формуле Стокса, где $\tilde{\Phi}^2_{r+1}(s^h,\eta_1)$ есть некоторое гладкое продолжение $\Phi^2_{r+1}(s^h,\eta_1)$ в Ω, не изменяющее числителей $\Phi^2_{r+1}(s^h,\eta_1)$.

Используя теорему 1, получим, что этот интеграл обращается в нуль, если $p\le q-r$ (соответственно, $p\le r-n+k+q+1$) и $k>1$, а для $k=1$ он всегда равен нулю.

Форма $D_{1,r+1,n-2-r}(s^h,\overline{\partial}_z s^h,\overline{d}s^h)=0$ на $\partial(\Gamma\cap K_s)\times\pm U$, если $k>1$ или если $k=1$ и $p\le n-2-r$ (соответственно, $p\le r+1$).

Осталось использовать лемму 4.1.1 из [2], согласно которой
$$\int_{\partial(\Gamma\cap\Omega)\times(S\setminus U)} f(\zeta)\wedge K_{l,r+1}(\eta_1)=0.$$

Таким образом, форма $F(z)$ является $\overline{\partial}$-замкнутой, если: $a)$ $k>1$ и $p\le q-r$ (соответственно, $p\le r-n+k+q+1$); $b)$ $k=1$ и $p\le n-2-r$ (соответственно, $p\le r+1$).

Следовательно, мы видим что форма $F^h_s(z)$ не зависит от s,h и является $\overline{\partial}$-замкнутой, если: $a)$ $k=1$ и $2p<n-r$ (соответственно, $2p<r+1$); $b)$ $k>1$ и $2p\le q+1-r$ (соответственно, $2p\le r-n+k+q+1$).

Осталось показать, что $F(z)$ является $\overline{\partial}$-замкнутым продолжением формы f с $\Gamma\setminus K$ в $\Omega_\Gamma\setminus K$. Предположим, что существует голоморфная вектор-функция $h_0=(h^0_1,\dots,h^0_p):\Omega\to\mathbb{C}^p$ такая, что $L_{z^0}(h_0)\cap\Omega_\Gamma=\{z^0\}$ (для некоторой точки $z^0\in\Gamma\setminus K$). Рассмотрим шар $B(z^0,r)=B$ достаточно малого радиуса r, такой что $B\cap K=\emptyset$. Пусть $P_B(\zeta,z)$ — строго регулярный барьер к ∂B и $\eta_B(\zeta,z)=P_B/<P_B,\zeta-z>$. $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение F формы f в область $B\cap\Omega_\Gamma$ дается формулой типа (14):
$$F=\int_{(\Gamma\cap B)\times\pm U} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(\eta_1)+\int_{(\partial B\cap\Gamma)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge K_{l,r}(t_0\eta_B+(1-t_0)\eta_1)-$$
$$\overline{\partial}\int_B\overline{\partial}\tilde{f}(\zeta)\wedge\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_*)-\int_{(\Gamma\cap B)\times\pm U} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,\eta_1)-$$
$$\int_{\partial(\Gamma\cap B)\times\tilde{S}} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_z\Phi^1_{r-1}(s^h,t_0\eta_B+(1-t_0)\eta_1)-\overline{\partial}\int_B\tilde{f}(\zeta)\wedge K_{l,r-1}(\eta_*).$$
Покажем, что для всех $z\in\Omega_\Gamma\cap B$, достаточно близких к z^0, форма $F(z)=F^{h^0}_s(z)$. Если z принадлежит достаточно малой окрестности z^0, тогда $z\in U_s(h_0)$ для достаточно большого s. Следовательно имеем $F^h_s(z)-F(z)=0$ (см. равенство (63). Если $\Gamma\setminus K$ связно, тогда мы получим, что $F^h_s(z)$ дает $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение f во все $\Omega_\Gamma\setminus K$.

Если такой барьер есть в любой точке $\zeta^0\in\Gamma\setminus K$, то условие связности $\Gamma\setminus K$ не нужно.

Список литературы

[1] Л.А. Айзенберг , Ш.А. Даутов, *Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства*, Наука, Новосибирск, 1975.

[2] Р.А. Айрапетян, Г.М. Хенкин, *Интегральные представления дифференциальных форм на многообразиях Коши-Римана и теория CR-функций*, УМН, **39** (1984), 23–124.

[3] А.М. Кытманов, *Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения*, Наука, Новосибирск, 1992.

[4] А.М. Кытманов, *Голоморфное продолжение CR-функций с особенностями на гиперповерхности*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **98** (1990), 591–623.

[5] А.М. Кытманов, Т.Н. Никитина, *Устранимые особенности CR-функций на порождающих многообразиях*, ДАН, **326** (1992), 414–416.

[6] А.М. Кытманов, Т.Н. Никитина, *Голоморфное продолжение CR-функций с особенностями на порождающем многообразии*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **56** (1992), 673–686.

[7] Т.Н. Никитина, *Аналоги формул Грина и Коппельмана для когомологий Дольбо на основе логарифмического вычета с особенностями на границе*, Вопросы математического анализа, Красноярск, 2002, 152–186.

[8] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва, 1981.

[9] Ж. Рам, *Дифференцируемые многообразия*, Изд-во иностр. лит., Москва, 1956.

[10] Г.М. Хенкин, *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНИТИ, Москва, 1985, Т.7, 23–124.

[11] Е.М. Чирка, *Аналитическое представление CR-функции*, Мат. сб., **98** (1975), 591–622.

[12] M.S. Baouendi, L.P. Rothshild , *Extension of holomorphic functions in generic wedges and their wave front sets*, Commun. Part. Differ. Equat., **13** (1988), 1441–1466.

[13] J.J. Kohn, H. Rossi, *On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold*, Ann. of Math., **81** (1965), 451–472.

[14] A.M. Kytmanov, T.N. Nikitina, *On the Removable Singularities of CR Functions Given on a Generic Manifold*, Annali Mat. Pura ed Applicata (IV), **CLXVII** (1994), 165–189.

[15] G. Lupacciolu, *A theorem on holomorphic extension of CR-functions*, Pasific J. Math., **124** (1986), 177–191.

[16] G. Lupacciolu, *Holomorphic and meromorphic q-hulls*, Preprint Univ. Roma, 1991.

[17] W. Rothstein, *Zur Theories der analytischen Manuigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen*, Math. Ann., **129** (1955), 96–138.

[18] Т.Н. Никитина, *$\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии*, Тезисы докладов международной школы-конференции по анализу и геометрии, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2004.

[19] Т.Н. Никитина, *$\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии*, Тезисы докладов международной школы-конференции "Комплексный анализ и его приложения", Кубанский государственный университет, Краснодар, 2005.

Татьяна Николаевна Никитина
Красноярский государственный технический университет,
ул. академика Киренского 26,
660074, Красноярск, Россия
E-mail address: nick@fivt.krasn.ru