Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Bernhard Riemann

[Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.]

Transcribed by D. R. Wilkins

Preliminary Version: December 1998
Corrected: April 2000

Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Bernhard Riemann

[Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1860.]

Obwohl die Differentialgleichungen, nach welchen sich die Bewegung der Gase bestimmt, längst aufgestellt worden sind, so ist doch ihre Integration fast nur für den Fall ausgeführt worden, wenn die Druckverschiedenheiten als unendlich kleine Bruchtheile des ganzen Drucks betrachtet werden können, und man hat sich bis auf die neueste Zeit bengügt, nur die ersten Potenzen dieser Bruchtheile zu berücksichtigen. Erst ganz vor Kurzem hat *Helmholtz* auch die Glieder zweiter Ordnung mit in die Rechnung gezogen und daraus die objective Entstehung von Combinationstönen erklärt. Es lassen sich indess für den Fall, dass die anfängliche Bewegung allenthalben in gleicher Richtung stattfindet und in jeder auf dieser Richtung senkrechten Ebene Geschwindigkeit und Druck constant sind, die exacten Differentialgleichungen vollständig integriren; und wenn auch zur Erklärung der bis jetzt experimentell festgestellten Erscheinungen die bisherige Behandlung vollkommen ausreicht, so könnten doch, bei den grossen Fortschritten, welche in neuester Zeit durch *Helmholtz* auch in der experimentallen Behandlung akustischer Fragen gemacht worden sind, die Resultate dieser genaueren Rechnung in nicht allzu ferner Zeit vielleicht der experimentellen Forschung einige Anhaltspunkte gewähren; und dies mag, abgesehen von dem theoretischen Interesse, welches die Behandlung nicht linearer partieller Differentialgleichungen hat, die Mittheilung derselben rechtfertigen.

Für die Abhängigkeit des Drucks von der Dichtigkeit würde das *Boyle*'sche Gesetz vorauszusetzen sein, wenn die durch die Druckveränderungen bewirkten Temperaturverschiedenheiten sich so schnell ausglichen, dass die Temperatur des Gases als constant betrachtet werden dürfte. Es ist aber wahrscheinlich der Wärmeaustauch ganz zu vernachlässigen, und man muss daher für diese Abhängigkeit das Gesetz zu Grunde legen, nach welchem sich der Druck des Gases mit der Dichtigkeit ändert, wenn es keine Wärme aufnimmt oder abgiebt.

Nach dem *Boyle*'schen und *Gay-Lussac*'schen Gesetze ist, wenn v das Volumen der Gewichtseinheit, p den Druck und T die Temperatur von $-273°$C an gerechnet bezeichnet,

$$\log p + \log v = \log T + \text{const.}$$

Betrachten wir hier T als Function von p und v und nennen die specifische Wärme bei constantem Drucke c, bei constantem Volumen c', beide auf die Gewichtseinheit bezogen, so wird von dieser Gewichtseinheit, wenn p und v sich um dp und dv ändern, die Wärmemenge

$$c\frac{\partial T}{\partial v}\,dv + c'\frac{\partial T}{\partial p}\,dp$$

oder, da $\dfrac{\partial \log T}{\partial \log v} = \dfrac{\partial \log T}{\partial \log p} = 1$,

$$T(c\,d\log v + c'\,d\log p)$$

aufgenommen. Wenn daher keine Wärmeaufnahme stattfindet, so ist

$$d\log p = -\frac{c}{c'}\,d\log v,$$

und also, wenn man mit *Poisson* annimmt, dass das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen $\dfrac{c}{c'} = k$ von Temperatur und Druck unabhängig ist,

$$\log p = -k\log v + \text{const.}$$

Nach neueren Versuchen von *Regnault*, *Joule* und *W. Thomson* sind diese Sätze für Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff und deren Gemenge unter allen darstellbaren Drucken und Temperaturen wahrscheinlich sehr nähe gültig.

Durch *Regnault* ist für diese Gase eine sehr nahe Anschmiegung an das *Boyle*'sche und *Gay-Lussac*'sche Gesetz und die Unabhängigkeit der specifischen Wärme c von Temperatur und Druck festgestellt worden.

Für atmosphärische Luft fand *Regnault*

zwischen	$-30°$C	und	$+10°$C	$c = 0,2377$
„	$+10°$C	„	$+100°$C	$c = 0,2379$
„	$+100°$C	„	$+215°$C	$c = 0,2376$.

Ebenso ergab sich für Drucke von 1 bis 10 Atmosphären kein merklicher Unterschied der specifischen Wärme.

Nach Versuchen von *Regnault* und *Joule* scheint ferner für die Gase die von *Clausius* adoptirte Annahme *Mayer*'s sehr nahe richtig zu sein, dass ein bei constanter Temperatur sich ausdehnendes Gas nur so viel Wärme aufnimmt, als zur Erzeugung des äusseren Arbeit erforderlich ist. Wenn das Volumen des Gases sich um dv ändert, während die Temperatur constant bleibt, so ist $d\log p = -d\log v$, die aufgenommene Wärmemenge $T(c-c')\,d\log v$, die geleistete Arbeit $p\,dv$. Diese Hypothese giebt daher, wenn A das mechanische Aequivalent der Wärme bezeichnet,

$$AT(c-c')\,d\log v = p\,dv$$

oder

$$c - c' = \frac{pv}{AT},$$

also von Druck und Temperatur unabhängig.

Hiernach ist auch $k = \dfrac{c}{c'}$ von Druck und Temperatur unabhängig und ergiebt sich, wenn $c = 0,237733$, A nach *Joule* $= 424,55$ Kilogr. met. und, für die Temperatur $0°C$ oder $T = \dfrac{100°\mathrm{C}}{0,3665}$, pv nach *Regnault* $= 7990^{\mathrm{m}}, 267$ angenommen wird, gleich 1,4101. Die Schallgeschwindigkeit in trockner Luft von 0°C beträgt in der Secunde

$$\sqrt{7990^{\mathrm{m}}, 267\,.\,9^{\mathrm{m}}, 8088k},$$

und würde also mit diesem Werthe von k gleich $332^{\mathrm{m}}, 440$ gefunden werden, während die beiden vollständigsten Versuchsreihen von *Moll* und *van Beek* dafür, einzeln berechnet, $332^{\mathrm{m}}, 528$ und $331^{\mathrm{m}}, 867$, vereinigt $332^{\mathrm{m}}, 271$ geben und die Versuche von *Martins* und *A. Bravais* nach ihrer eignen Berechnung $332^{\mathrm{m}}, 37$.

1.

Für's erste ist es nicht nöthig, über die Abhängigkeit des Drucks von der Dichtigkeit eine bestimmte Voraussetzung zu machen; wir nehmen daher an, dass bei der Dichtigkeit ϱ der Druck $\varphi(\varrho)$ sei, und lassen die Function φ vorläufig noch unbestimmt.

Man denke sich nun rechtwinklige Coordinaten x, y, z eingeführt, die x-Axe in der Richtung der Bewegung, und bezeichne durch ϱ die Dichtigkeit, durch p den Druck, durch u die Geschwindigkeit für die Coordinate x zur Zeit t und durch ω ein Element der Ebene, deren Coordinate x ist.

Der Inhalt des auf dem Element ω stehenden geraden Cylinders von der Höhe dx ist dann $\omega\, dx$, die in ihm enthaltene Masse $\omega\varrho\, dx$. Die Aenderung dieser Masse während des Zeitelements dt oder die Grösse $\omega\frac{\partial\varrho}{\partial t}\,dt\,dx$ bestimmt sich durch die in ihn einströmende Masse, welche $= -\omega\frac{\partial\varrho u}{\partial x}\,dx\,dt$ gefunden wird. Ihre Beschleunigung ist $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$ und die Kraft, welche sie in der Richtung der positiven x-Axe forttreibt, $= -\frac{\partial p}{\partial x}\omega\, dx = -\varphi'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial x}\omega\, dx$, wenn $\varphi'(\varrho)$ die Derivirte von $\varphi(\varrho)$ bezeichnet. Man hat daher für ϱ und u die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\frac{\partial\varrho u}{\partial x}$$

und

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\varphi'(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial x}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\varphi'(\varrho)\frac{\partial\log\varrho}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial\log\varrho}{\partial t} + u\frac{\partial\log\varrho}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wenn man die zweite Gleichung, mit $\pm\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ multiplicirt, zur ersteren addirt und zur Abkürzung

(1) $$\int\sqrt{\varphi'(\varrho)}\,d\log\varrho = f(\rho)$$

und

(2) $$f(\varrho) + u = 2r, \quad f(\varrho) - u = 2s$$

setzt, so erhalten diese Gleichungen die einfachere Gestalt

(3) $$\frac{\partial r}{\partial t} = -(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\frac{\partial s}{\partial x},$$

worin u und ϱ durch die Gleichungen (2) bestimmte Functionen von r und s sind. Aus ihnen folgt

(4) $$dr = \frac{\partial r}{\partial x}(dx - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\,dt)$$

(5) $$ds = \frac{\partial s}{\partial x}(dx - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\,dt).$$

Unter der in der Wirklichkeit immer zutreffenden Vorasusetzung, dass $\varphi'(\varrho)$ positiv ist, besagen diese Gleichungen, dass r constant bleibt, wenn x sich mit t so ändert, dass $dx = (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})\,dt$, und s constant bleibt, wenn x sich mit t so ändert, dass $dx = (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})\,dt$ ist.

Ein bestimmter Werth von r oder von $f(\varrho) + u$ rückt daher zu grösseren Werthen von x mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u$ fort, ein bestimmter Werth von s oder von $f(\varrho) - u$ zu kleineren Werthen von x mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} - u$.

Ein bestimmter Werth von r wird also nach und nach mit jedem vor ihm stattfindenden Werthe von s zusammentreffen, und die Geschwindigkeit seines Fortrückens wird in jedem Augenblicke von dem Werthe von s abhängen, mit welchem er zusammentrifft.

2.

Die Analysis bietet nun zunächst die Mittel, die Frage zu beantworten, wo und wann ein Werth r' von r einem vor ihm befindlichen Werthe s' von s begegnet, d. h. x und t als Functionen von r und s zu bestimmen. In der That, wenn man in den Gleichungen (3) des vor. Art. r und s als unabhängige Variable einführt, so gehen diese Gleichungen in lineare Differentialgleichungen für x und t über und lassen sich also nach bekannten Methoden integriren. Um die Zurückführung der Differentialgleichungen auf eine lineare zu bewirken, ist es am zweckmässigsten, die Gleichungung (4) und (5) des vorigen Art. in der Form zu setzen:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad dr &= \frac{\partial r}{\partial x}\Bigg\{ d(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})t) \\
&\qquad + \left[dr\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right) + ds\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} - 1\right)\right] t \Bigg\} \\
(2)\quad ds &= \frac{\partial s}{\partial x}\Bigg\{ d(x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})t) \\
&\qquad - \left[ds\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right) + dr\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} - 1\right)\right] t \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Man erhält dann, wenn man s und r als unabhängige Variable betrachtet, für x und t die beiden linearen Differentialgleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})t)}{\partial s} &= -t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} - 1\right) \\
\frac{\partial(x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})t)}{\partial r} &= t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} - 1\right).
\end{aligned}
$$

In Folge derselben ist

$$(3)\qquad (x-(u+\sqrt{\varphi'(\varrho)})t)\,dr-(x-(u-\sqrt{\varphi'(\varrho)})t)\,ds$$

ein vollständiges Differential, dessen Integral, w, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s}=-t\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho}-1\right)=m\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)$$

genügt, worin

$$m=\frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho}-1\right),$$

also eine Function von $r+s$ ist. Setzt man $f(\varrho)=r+s=\sigma$, so wird

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)}=\frac{d\sigma}{d\log\varrho},$$

folglich

$$m=-\tfrac{1}{2}\frac{d\log\dfrac{d\varrho}{d\sigma}}{d\sigma}.$$

Bei der *Poisson*'schen Annahme $\varphi(\varrho)=aa\varrho^k$ wird

$$f(\varrho)=\frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}}+\text{const.}$$

und, wenn man für die willkürliche Constante den Werth Null wählt,

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)}+u=\frac{k+1}{2}r+\frac{k-3}{2}s,\quad \sqrt{\varphi'(\varrho)}-u=\frac{k-3}{2}r+\frac{k+1}{2}s,$$

$$m=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma}=\frac{k-3}{2(k-1)(r+s)}.$$

Unter Voraussetzung des *Boyle*'schen Gesetzes $\varphi(\varrho)=aa\varrho$ erhält man

$$f(\varrho)=a\log\varrho,$$

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)}+u=r-s+a,\quad \sqrt{\varphi'(\varrho)}-u=s-r+a,$$

$$m=-\frac{1}{2a},$$

Werthe, die aus den obigen fliessen, wenn man $f(\varrho)$ um die Constante $\dfrac{2a\sqrt{k}}{k-1}$, also r und s um $\dfrac{a\sqrt{k}}{k-1}$ vermindert und dann $k=1$ setzt.

Die Einführung von r und s als unabhängig veränderlichen Grössen ist indess nur möglich, wenn die Determinante dieser Functionen von x und t, welche $= 2\sqrt{\varphi'(\varrho)}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}$, nicht verschwindet, also nur wenn $\frac{\partial r}{\partial x}$ und $\frac{\partial s}{\partial x}$ beide von Null verschieden sind.

Wenn $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$ ist, ergiebt sich aus (1) $dr = 0$ und aus (2) $x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})t =$ einer Function von s. Es ist folglich auch dann der Ausdruck (3) ein vollständiges Differential, und es wird w eine blosse Function von s.

Aus ähnlichen Gründen werden, wenn $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ ist, s auch in Bezug auf t constant, $x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})t$ und w Functionen von r.

Wenn endlich $\frac{\partial r}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ beide $= 0$ sind, so werden in Folge der Differentialgleichungen r, s und w Constanten.

3.

Um die Aufgabe zu lösen, muss nun zunächst w als Function von r und s so bestimmt werden, dass sie der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0 \tag{1}$$

und den Anfangsbedingungen genügt, wodurch sie bis auf eine Constante, die ihr offenbar willkürlich hinzugefügt werden kann, bestimmt ist.

Wo und wann ein bestimmter Werth von r mit einem bestimmten Werthe von s zusammentrifft, ergiebt sich dann aus der Gleichung

$$(x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})t)\,dr - (x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})t)\,ds = dw, \tag{2}$$

und hierauf findet man schliesslich u und ϱ als Functionen von x und t durch Hinzuziehung der Gleichungen

$$f(\varrho) + u = 2r, \quad f(\varrho) - u = 2s. \tag{3}$$

In der That folgen, wenn nicht etwa in einer endlichen Strecke dr oder ds Null und folglich r oder s constant ist, aus (2) die Gleichungen

$$x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})t = \frac{\partial w}{\partial r}, \tag{4}$$

$$x - (u - \sqrt{\varphi'(\varrho)})t = -\frac{\partial w}{\partial s}, \tag{5}$$

durch deren Verbindung mit (3) man u und ϱ in x und t ausgedrückt erhält.

Wenn aber r anfangs in einer endlichen Strecke denselben Werth r' hat, so rückt diese Strecke allmählich zu grösseren Werthen von x fort. Innerhalb dieses Gebietes, wo $r = r'$, kann man dann aus der Gleichung (2) den Werth von $x - (u + \sqrt{\varphi'(\varrho)})t$ nicht ableiten, da $dr = 0$; und in der That lässt die Frage, wo und wann dieser Werth r' einem bestimmten Werthe von s begegnet, dann keine bestimmte Antwort zu. Die Gleichung (4) gilt dann nur an den Grenzen dieses Gebietes und giebt an, zwischen welchen Werthen von x zu einer bestimmten Zeit der constante Werth r' von r stattfindet, oder auch, während welches Zeitraums r an einer bestimmten Stelle diesen Werth behält. Zwischen diesen Grenzen bestimmen sich u und ϱ als Functionen von x und t aus dem Gleichungen (3) und (5). Auf ähnlichem Wege findet man diese Functionen, wenn s den Werth s' in einem endlichen Gebiete besitzt, während r veränderlich ist, sowie auch wenn r und s beide constant sind. In letzterem Falle nehmen sie zwischen gewissen durch (4) und (5) bestimmten Grenzen constante aus (3) fliessende Werthe an.

4.

Bevor wir die Integration der Gleichung (1) des vor. Art. in Angriff nehmen, scheint es zweckmässig, einige Erörterungen vorauszuschicken, welche die Ausführung dieser Integration nicht voraussetzen. Ueber die Function $\varphi(\varrho)$ ist dabei nur die Annahme nöthig, dass ihre Derivirte bei wachsendem ϱ nicht abnimmt, was in der Wirklichkeit gewiss immer der Fall ist; und wir bemerken gleich hier, was in folgenden Art. mehrfach angewandt werden wird, dass dann

$$\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2} = \int_0^1 \varphi'(\alpha\varrho_1 + (1-\alpha)\varrho_2)\, d\alpha,$$

wenn nur eine der Grössen ϱ_1 und ϱ_2 sich ändert, entweder constant bleibt oder mit dieser Grösse zugleich wächst und abnimmt, woraus zugleich folgt, dass der Werth dieses Ausdrucks stets zwischen $\varphi'(\varrho_1)$ und $\varphi'(\varrho_2)$ liegt.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo die anfängliche Gleichgewichtsstörung auf ein endliches durch die Ungleichheiten $a < x < b$ begrenztes Gebiet beschränkt ist, so dass ausserhalb desselben u und ϱ und folglich auch r und s constant sind; die Werthe dieser Grössen für $x < a$ mögen durch Anhängung des Index 1, für $x > b$ durch den Index 2 bezeichnet werden. Das Gebiet, in welchem r veränderlich ist, bewegt sich nach Art. 1 allmählich vorwärts und zwar seine hintere Grenze mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho_1)} + u_1$, während die vordere Grenze des Gebiets, in welchem s veränderlich ist, mit der

Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho_2)} - u_2$ rückwärts geht. Nach Verlauf der Zeit

$$\frac{b-a}{\sqrt{\varphi'(\varrho_1)} + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} + u_1 - u_2}$$

fallen daher beide Gebiete auseinander, und zwischen ihnen bildet sich ein Raum, in welchem $s = s_2$ und $r = r_1$ ist und folglich die Gastheilchen wieder im Gleichgewicht sind. Von der anfangs erschütterten Stelle gehen also zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen aus. In der vorwärtsgehenden ist $s = s_2$; es ist daher mit einem bestimmten Werthe ϱ der Dichtigkeit stets die Geschwindigkeit $u = f(\varrho) - 2s_2$ verbunden, und beide Werthe rücken mit der constanten Geschwindigkeit

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u = \sqrt{\varphi'(\varrho)} + f(\varrho) - 2s_2$$

vorwärts. In der rückwärtslaufenden ist dagegen mit der Dichtigkeit ϱ die Geschwindigkeit $-f(\varrho) + 2r_1$ verbunden, und diese beiden Werthe bewegen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} + f(\varrho) - 2r_1$ rückwarts. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist für grössere Dichtigkeiten eine grössere, da sowohl $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$, als $f(\varrho)$ mit ϱ zugleich wächst.

Denkt man sich ϱ als Ordinate einer Curve für die Abscisse x, so bewegt sich jeder Punkt dieser Curve parallel der Abscissenaxe mit constanter Geschwindigkeit fort und zwar mit desto grösserer, je grösser seine Ordinate ist. Man bemerkt leicht, dass bei diesem Gesetze Punkte mit grösseren Ordinaten schliesslich voraufgehende Punkte mit kleineren Ordinaten überholen würden, so dass zu einem Werthe von x mehr als ein Werth von ϱ gehören würde. Da nun dieses in Wirklichkeit nicht stattfinden kann, so muss ein Umstand eintreten, wodurch dieses Gesetz ungültig wird. In der That liegt nun der Herleitung der Differentialgleichungen die Voraussetzung zu Grunde, dass u und ϱ stetige Functionen von x sind und endliche Derivirten haben; diese Voraussetzung hört aber auf erfüllt zu sein, sobald in irgend einem Punkte die Dichtigkeitscurve senkrecht zur Abscissenaxe wird, und von diesem Augenblicke an tritt in dieser Curve eine Discontinuität ein, so dass ein grösserer Werth von ϱ einem kleineren unmittelbar nachfolgt; ein Fall, der im nächsten Art. erörtert werden wird.

Die Verdichtungswellen, d. h. die Theile der Welle, in welchen die Dichtigkeit in der Fortpflanzungsrichtung abnimmt, werden demnach bei ihrem Fortschreiten immer schmäler und gehen schliesslich in Verdichtungsstösse über; die Breite der Verdünnungswellen aber wächst beständig der Zeit proportional.

Es lässt sich, wenigstens unter Voraussetzung des *Poisson*'schen (oder *Boyle*'schen) Gesetzes, leicht zeigen, dass auch dann, wenn die anfängliche Gleichgewichtsstörung nicht auf ein endliches Gebiet beschränkt ist, sich stets, von ganz besonderen Fällen abgesehen, im Laufe der Bewegung Verdichtungsstösse bilden müssen. Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Werth von r vorwärts rückt, ist bei dieser Annahme

$$\frac{k+1}{2}r + \frac{k-3}{2}s;$$

grössere Werthe werden sich also durchschnittlich mit grösserer Geschwindigkeit bewegen, und ein grösserer Werth r' wird einen voraufgehenden kleineren Werth r'' schliesslich einholen müssen, wenn nicht der mit r'' zusammentreffende Werth von s durchschnittlich um

$$(r' - r'')\frac{1+k}{3-k}$$

kleiner ist, als der gleichzeitig mit r' zusammentreffende. In diesem Falle würde s für ein positiv unendliches x negativ unendlich werden, und also für $x = +\infty$ die Geschwindigkeit $u = +\infty$ (oder auch statt dessen *Boyle*'schen Gesetz die Dichtigkeit unendlich klein) werden. Von speciellen Fällen abgesehen, wird also immer der Fall eintreten müssen, dass ein um eine endliche Grösse grösserer Werth von r einem kleineren unmittelbar nachfolgt; es werden folglich, durch ein Unendlichwerden von $\frac{\partial r}{\partial x}$, die Differentialgleichungen ihre Gültigkeit verlieren und vorwärtslaufende Verdichtungsstösse entstehen müssen. Ebenso werden fast immer, indem $\frac{\partial s}{\partial x}$ unendlich wird, rückwärtslaufende Verdichtungsstösse sich bilden.

Zur Bestimmung des Zeiten und Orte, für welche $\frac{\partial r}{\partial x}$, oder $\frac{\partial s}{\partial x}$ unendlich wird und plötzliche Verdichtungen ihren Anfang nehmen, erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) des Art. 2, wenn man darin die Function w einführt,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right)t\right) &= 1,\\
\frac{\partial s}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right)t\right) &= 1.
\end{aligned}$$

5.

Wir müssen nun, da sich plötzliche Verdichtungen fast immer einstellen, auch wenn sich Dichtigkeit und Geschwindigkeit anfangs allenthalben stetig ändern, die Gesetze für das Fortschreiten von Verdichtungsstössen aufsuchen.

Wir nehmen an, dass zur Zeit t für $x = \xi$ eine sprungweise Aenderung von u und ϱ stattfinde, und bezeichnen die Werthe dieser und der von ihnen abhängigen Grössen für $x = \xi - 0$ durch Anhängung des Index 1 und für $x = \xi + 0$ durch die Index 2; die relativen Geschwindigkeiten, mit welchen das Gas sich gegen die Unstetigkeitsstelle bewegt,

$$u_1 - \frac{d\xi}{dt}, \quad u_2 - \frac{d\xi}{dt},$$

mögen durch v_1 und v_2 bezeichnet werden. Die Masse, welche durch ein Element ω der Ebene, wo $x = \xi$, in Zeitelement dt in positiver Richtung hindurchgeht, ist dann $= v_1\varrho_1\omega\,dt = v_2\varrho_2\omega\,dt$; die ihr eingedrückte Kraft $(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))\omega\,dt$ und der dadurch bewirkte Zuwachs an Geschwindigkeit $v_2 - v_1$; man hat daher

$$(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))\omega\,dt = (v_2 - v_1)v_1\varrho_1\omega\,dt \quad \text{und} \quad v_1\varrho_1 = v_2\varrho_2,$$

woraus folgt

$$v_1 = \mp\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

also

$$(1) \qquad \frac{d\xi}{dt} = u_1 \pm \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}} = u_2 \pm \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}}.$$

Für einen Verdichtungsstoss muss $\varrho_2 - \varrho_1$ dasselbe Zeichen, wie v_1 und v_2, haben, und zwar für einen vorwärtslaufenden das negative, für einen rückwärtslaufenden das positive. Im ersten Falle gelten die oberen Zeichen und ϱ_1 ist grösser als ϱ_2; es ist daher, bei der zu Anfang des vorigen Artikels gemachten Annahme über die Function $\varphi(\varrho)$

$$(2) \qquad u_1 + \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} > \frac{d\xi}{dt} > u_2 + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)},$$

und folglich rückt die Unstetigkeitsstelle langsamer fort als die nachfolgenden und schneller als die voraufgehenden Werthe von r; r_1 und r_2 sind also in jedem Augenblicke durch die zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle geltenden Differentialgleichungen bestimmt. Dasselbe gilt, da die Werthe von s sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{\varphi'(\varrho)} - u$ rückwärts bewegen, auch für s_2 und folglich für ϱ_2 und u_2, aber nicht für s_1. Die Werthe von s_1 und $\dfrac{d\xi}{dt}$ bestimmen sich aus r_1, ϱ_2 und u_2 eindeutig durch die Gleichungen (1). In der That genügt der Gleichung

$$(3) \qquad 2(r_1 - r_2) = f(\varrho_1) - f(\varrho_2) + \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1\varrho_2}}$$

nur ein Werth von ϱ_1; denn die rechte Seite nimmt, wenn ϱ_1 von ϱ_2 an in's Unendliche wächst, jeden positiven Werth nur einmal an, da sowohl $f(\varrho_1)$ als auch die beiden Factoren

$$\sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}} - \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2}},$$

in welche sich das letzte Glied zerlegen lässt, beständig wachsen oder doch nur der letztere Factor constant bleibt. Wenn aber ϱ_1 bestimmt ist, erhält man durch die Gleichungen (1) offenber völlig bestimmte Werthe für u_1 und $\dfrac{d\xi}{dt}$.

Ganz Aehnliches gilt für einen rückwärtslaufenden Verdichtungsstoss.

6.

Wir haben eben gefunden, dass in einem fortschreitenden Verdichtungsstosse zwischen den Werthen von u und ϱ zu beiden Seiten desselben stets die Gleichung

$$(u_1 - u_2)^2 = \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1\varrho_2}$$

stattfindet. Es fragt sich nun, was eintritt, wenn zu einer gegebenen Zeit an einer gegebenen Stelle beliebig Unstetigkeiten vorhanden sind. Es können dann von dieser Stelle, je nach den Werthen von u_1, ϱ_1, u_2, ϱ_2, entweder zwei nach entgegengesetzten Seiten laufende Verdichtungsstösse ausgehen, oder ein vorwärtslaufender, oder ein rückwärtslaufender, oder endlich kein Verdichtungsstoss, so dass die Bewegung nach den Differentialgleichungen erfolgt.

Bezeichnet man die Werthe, welche u und ϱ hinter oder zwischen den Verdichtungsstössen im ersten Augenblicke ihres Fortschreitens annehmen, durch Hinzufügung eines Accents, so ist im ersten Falle $\varrho' > \varrho_1$ und $> \varrho_2$, und man hat

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_1 - u' &= \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_1)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_1))}{\varrho'\varrho_1}}, \\ u' - u_2 &= \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_2))}{\varrho'\varrho_2}}; \end{aligned}$$

$$(2) \quad u_1 - u_2 = \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_1)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_1))}{\varrho'\varrho_1}} + \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(\varphi(\varrho') - \varphi(\varrho_2))}{\varrho'\varrho_2}}.$$

Es muss also, da beide Glieder der rechten Seite von (2) mit ϱ' zugleich wachsen, $u_1 - u_2$ positiv sein und

$$(u_1 - u_2)^2 > \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1\varrho_2};$$

und umgekehrt giebt es, wenn diese Bedungungen erfüllt sind, stets ein und nur ein den Gleichungen (1) genügendes Werthenpaar von u' und ϱ'.

Damit der letzte Fall eintritt und also die Bewegung sich den Differentialgleichungen gemäss bestimmen lässt, ist es nothwending und hinreichend, dass $r_1 \leqq r_2$ und $s_1 \geqq s_2$ sei, also $u_1 - u_2$ negativ und $(u_1 - u_2)^2 \geqq (f(\varrho_1) - f(\varrho_2))^2$. Die Werthe r_1 und r_2, s_1 und s_2 treten dann, da der voraufgehende Werth mit grösserer Geschwindigkeit fortrückt, im Fortschreiten auseinander, so dass die Unstetigkeit verschwindet.

Wenn weder die ersteren, noch die letzteren Bedungungen erfüllt sind, so genügt den Anfangswerthen *Ein* Verdichtungsstoss, und zwar ein vorwärts oder rückwärts laufender, je nachdem ϱ_1 grösser oder kleiner als ϱ_2 ist.

In der That ist dann, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$,

$$2(r_1 - r_2) \quad \text{oder} \quad f(\varrho_1) - f(\varrho_2) + u_1 - u_2$$

positiv,—weil $(u_1 - u_2)^2 < (f(\varrho_1) - f(\varrho_2))^2$ —, und zugleich

$$\leqq f(\varrho_1) - f(\varrho_2) + \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2}}$$

weil

$$(u_1 - u_2)^2 \leqq \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2))}{\varrho_1 \varrho_2};$$

es lässt sich also für die Dichtigkeit ϱ' hinter dem Verdichtungsstoss ein der Bedingung (3) des vor. Art. genügender Werth finden und dieser ist $\leqq \varrho_1$. Folglich wird, da $s' = f(\varrho') - r_1$, $s_1 = f(\varrho_1) - r_1$, auch $s' \leqq s_1$, so dass die Bewegung hinter dem Verdichtungsstosse nach den Differentialgleichungen erfolgen kann.

Der andere Fall, wenn $\varrho_1 < \varrho_2$, ist offenbar von diesem nicht wesentlich verschieden.

7.

Um das Bisherige durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, wo sich die Bewegung mit den bis jetzt gewonnenen Mitteln bestimmen lässt, wollen wir annehmen, dass Druck und Dichtigkeit von einander nach dem *Boyle*'schen Gesetz abhängen und anfangs Dichtigkeit und Geschwindigkeit sich bei $x = 0$ sprungweise ändern, aber zu beiden Seiten dieser Stelle constant sind.

Es sind dann nach dem Obigen vier Fälle zu unterscheiden.

I. Wenn $u_1 - u_2 > 0$, also die beiden Gasmassen sich einander entgegen bewegen und

$$\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 > \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)^2}{\varrho_1 \varrho_2},$$

so bilden sich sich zwei entgegengesetzt laufende Verdichtungsstösse. Nach Art. 6 (1) ist, wenn $\sqrt[4]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ durch α und durch θ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{u_1 - u_2}{a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)} = \theta + \frac{1}{\theta}$$

bezeichnet wird, die Dichtigkeit zwischen den Verdichtungsstössen

$$\varrho' = \theta\theta\sqrt{\varrho_1\varrho_2},$$

und nach Art. 5 (1) hat man für den vorwärtslaufenden Verdichtungsstoss

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\alpha\theta = u' + \frac{a}{\alpha\theta},$$

für den rückwärtslaufenden

$$\frac{d\xi}{dt} = u_1 - a\frac{\theta}{\alpha} = u' - a\frac{\alpha}{\theta};$$

die Werthe der Geschwindigkeit und Dichtigkeit sind also nach Verlauf der Zeit t, wenn

$$\left(u_1 - a\frac{\theta}{\alpha}\right)t < x < (u_2 + a\alpha\theta)t,$$

u' und ϱ', für ein kleineres x u_1 und ϱ_1 und für ein grösseres u_2 und ϱ_2.

II. Wenn $u_1 - u_2 < 0$, folglich die Gasmassen sich aus einander bewegen, und zugleich

$$\left(\frac{u_1 - u_2}{a}\right)^2 \geqq \left(\log\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2,$$

so gehen von der Grenze nach entgegengesetzten Richtungen zwei allmählich breiter werdende Verdünnungswellen aus. Nach Art. 4 ist zwischen ihnen $r = r_1$, $s = s_2$, $u = r_1 - s_2$. In der vorwärtslaufenden ist $s = s_2$ und $x - (u + a)t$ eine Function von r, deren Werth, aus den Anfangwerthen $t = 0$, $x = 0$, sich $= 0$ findet; für die rückwärtslaufende dagegen hat man $r = r_1$ und $x - (u - a)t = 0$. Die eine Gleichung zur Bestimmung von u und ϱ ist also, wenn

$$(r_1 - s_2 + a)t < x < (u_2 + a)t, \quad u = -a + \frac{x}{t},$$

für kleinere Werthe von x $r = r_1$ und für grössere $r = r_2$; die andere Gleichung ist, wenn

$$(u_1 - a)t < x < (r_1 - s_2 - a)t, \quad u = a + \frac{x}{t},$$

für ein kleineres x $s = s_1$ und für ein grösseres $s = s_2$.

III. Wenn keiner dieser beiden Fälle stattfindet und $\varrho_1 > \varrho_2$, so entsteht eine rückwärtslaufende Verdünnungswelle und ein vorwärtsschreitender Verdichtungsstoss. Für letzteren findet sich aus Art. 5 (3), wenn θ die Wurzel der Gleichung

$$\frac{2(r_1 - r_2)}{a} = 2\log\theta + \theta - \frac{1}{\theta}$$

bezeichnet $\varrho' = \theta\theta\varrho_2$ und aus Art. 5 (1)

$$\frac{d\xi}{dt} = u_2 + a\theta = u' + \frac{a}{\theta}.$$

Nach Verlauf der Zeit t ist demnach vor dem Verdichtungsstosse, also wenn $x > (u_2 + a\theta)t$, $u = u_2$, $\varrho = \varrho_2$, hinter dem Verdichtungsstosse aber hat man $r = r_1$ und ausserdem, wenn

$$(u_1 - a)t < x < (u' - a)t, \quad u = a + \frac{x}{t},$$

für ein kleineres x $u = u_1$ und für ein grösseres $u = u'$.

IV. Wenn endlich die beiden ersten Fälle nicht stattfinden und $\varrho_1 < \varrho_2$, so ist der Verlauf ganz wie in III., nur der Richtung nach entgegengesetzt.

8.

Um unsere Aufgabe allgemein zu lösen, muss nach Art. 3 die Function w so bestimmt werden, dass sie der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0$$

und den Anfangsbedingungen genügt.

Schliessen wir den Fall aus, dass Unstetigkeiten eintreten, so sind offenbar nach Art. 1 Ort und Zeit oder die Werthe von x und t, für welche ein bestimmter Werth r' von r mit einem bestimmten Werthe s' von s zusammentrifft, völlig bestimmt, wenn die Anfangswerthe von r und s für die Strecke zwischen den beiden Werthen r' von r und s' von s gegeben sind und überall in dem Grössengebiet (S), welches für jeden Werth von t die zwischen den beiden Werthen, wo $r = r'$ und $s = s'$, liegenden Werthe von x umfasst, die Differentialgleichungen (3) des Art. 1 erfüllt sind. Es ist also auch der Werth von w für $r = r'$, $s = s'$ völlig bestimmt, wenn w überall in dem Grössengebiet (S) der Differentialgleichung (1) genügt und für die Anfangswerthe von r und s die Werthe von $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$, also, bis auf eine additive Constante, auch von w gegeben sind und diese Constante beliebig gewählt worden ist.

Denn diese Bedingungen sind mit den obigen gleichbedeutend. Auch folgt aus Art. 3 noch, dass $\frac{\partial w}{\partial r}$ zwar zu beiden Seiten eines Werthes r'' von r, wenn dieser Werth in einen endlichen Strecke stattfindet, verschiedene Werthe annimmt, sich aber allenthalben stetig mit s ändert; ebenso ändert sich $\frac{\partial w}{\partial s}$ mit r, die Function w selbst aber sowohl mit r, als mit s allenthalben stetig.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun an die Lösung unserer Aufgabe gehen, an die Bestimmung des Werthes von w für zwei beliebige Werthe, r' und s', von r und s.

Zur Veranschaulichung denke man sich x und t als Abscisse und Ordinate eines Punkts in einer Ebene und in dieser Ebene die Curven gezogen, wo r und wo s constante Werthe hat. Von diesen Curven mögen die ersteren durch (r) die letzteren durch (s) bezeichnet und in ihnen die Richtung, in welcher t wächst, als die positive betrachtet werden. Das Grössengebiet (S) wird dann repräsentirt durch ein Stück der Ebene, welche begrenzt ist durch die Curve (r'), die Curve (s') und das zwischen beiden liegende Stück der Abscissenaxe, und es handelt sich darum, den Werth von w in dem Durchschittspunkte der beiden ersteren aus den in letzterer Linie gegebenen Werthen zu bestimmen. Wir wollen die Aufgabe noch etwas verallgemeinern und annehmen, dass die Grössengebiet (S), statt durch die letztere Linie, durch eine beliebige Curve c begrenzt werde, welche keine der Curven (r) und (s) mehr als einmal schneidet, und dass für die dieser Curve angehörigen Werthenpaare von r und s die Werthe von $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ gegeben seien. Wie sich der Auflösung der Aufgabe ergeben wird, unterliegen auch dann diese Werthe von $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial s}$ nur der Bedingung, sich stetig mit dem Ort in der Curve zu ändern, können aber übrigens willkürlich angenommen werden, während diese Werthe nicht von einander unabhängig sein würden, wenn die Curve c eine der Curven (r) oder (s) mehr als einmal schnitte.

Um Functionen zu bestimmen, welche linearen partiellen Differentialgleichungen und linearen Grenzbedingungen genügen sollen, kann man ein ganz ähnliches Verfahren anwenden, wie wenn man zur Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen sämmtliche Gleichungen, mit unbestimmten Factoren multiplicirt, addirt und diese Factoren dann so bestimmt, dass aus der Summe alle unbekannten Grössen bis auf eine herausfallen.

Man denke sich das Stück (S) der Ebene durch die Curven (r) und (s) in unendlich kleine Parallelogramme zerschnitten und bezeichne durch δr und δs die Aenderungen, welche die Grössen r und s erleiden, wenn die Curvenelemente, welche die Seiten dieser Parallelogramme bilden, in positiver Richtung durchlaufen werden; man bezeichne ferner durch v eine beliebige

Function von r und s, welche allenthalben stetig ist und stetige Derivirten hat. In Folge der Gleichung (1) hat man dann

$$0 = \int v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \, \partial s} - m \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s} \right) \right) \delta r \, \delta s \tag{2}$$

über die ganze Grössengebiet (S) ausgedehnt. Es muss nun die rechte Seite dieser Gleichung nach den Unbekannten geordnet, d. h. hier, als Integral durch partielle Integration so umgeformt werden, dass es ausser bekannten Grössen nur die gesuchte Function, nicht ihre Derivirten enthält. Bei Ausführung dieser Operation geht das Integral zunächst über in das über (S) ausgedehnte Integral

$$\int w \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r \, \partial s} + \frac{\partial mv}{\partial r} + \frac{\partial mv}{\partial s} \right) \delta r \, \delta s$$

und ein einfaches Integral, welches sich, weil sich $\frac{\partial w}{\partial r}$ mit s, $\frac{\partial w}{\partial s}$ mit r und w mit beiden Grössen stetig ändert, nur über die Begrenzung von (S) erstrecken wird. Bedeuten dr und ds die Aenderungen von r und s in einem Begrenzungselement, wenn die Begrenzung in der Richtung durchlaufen wird, welche gegen die Richtung nach Innen ebenso liegt, wie die positive Richtung in den Curven (r) gegen die positive Richtung in den Curven (s), so ist dies Begrenzungsintegral

$$= -\int \left(v \left(\frac{\partial w}{\partial s} - mw \right) ds + w \left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv \right) dr \right).$$

Das Integral durch die ganze Begrenzung von S ist gleich der Summe der Integrale durch die Curven c, (s'), (r'), welche diese Begrenzung bilden, also, wenn ihre Durchschnittspunkte durch (c, r'), (c, s'), (r', s') bezeichnet werden,

$$= \int\limits_{c,r'}^{c,s'} + \int\limits_{c,s'}^{r',s'} + \int\limits_{s',r'}^{c,r'} .$$

Von diesen drei Bestandtheilen enthält der erste ausser der Function v nur bekannte Grössen, der zweite enthält, da in ihm $ds = 0$ ist, nur die unbekannte Function w selbst, nicht ihre Derivirten; der dritte Bestandtheil aber kann durch partielle Integration in

$$(vw)_{r',s'} - (vw)_{c,r'} + \int\limits_{s',r'}^{c,r'} w \left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv \right) ds$$

verwandelt werden, so dass in ihm ebenfalls nur die gesuchte Function w selbst vorkommt.

Nach diesen Umformungen liefert die Gleichung (2) offenbar den Werth der Function w im Punkte (r', s'), durch bekannte Grössen ausgedrückt, wenn man die Function v den folgenden Bedingungen gemäss bestimmt:

$$
(3) \qquad \begin{array}{lll}
1) \text{ allenthalben in } S: & \dfrac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s} + \dfrac{\partial mv}{\partial r} + \dfrac{\partial mv}{\partial s} = 0, \\[2ex]
2) \text{ für } r = r': & \dfrac{\partial v}{\partial s} + mv = 0, \\[2ex]
3) \text{ für } s = s': & \dfrac{\partial v}{\partial r} + mv = 0, \\[2ex]
4) \text{ für } r = r',\ s = s': & v = 1.
\end{array}
$$

Man hat dann

$$
(4) \qquad w_{r',s'} = (vw)_{c,r'} + \int\limits_{c,r'}^{c,s'} \left(v \left(\frac{\partial w}{\partial s} - mw \right) ds + w \left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv \right) dr \right).
$$

9.

Durch das eben angewandte Verfahren wird die Aufgabe, eine Function w einer linearen Differentialgleichung und linearen Grenzbedingungen gemäss zu bestimmen, auf die Lösung einer ähnlichen, aber viel einfacheren Aufgabe für eine andere Function v zurückgeführt; die Bestimmung dieser Function erreicht man meistens am Leichtesten durch Behandlung eines speciellen Falls jener Aufgabe nach dem *Fourier*'schen Methode. Wir müssen uns hier begnügen, diese Rechnung nur anzudeuten und das Resultat auf anderem Wege zu beweisen.

Führt man in der Gleichung (1) des vor. Art. für r und s als unabhängig veränderliche Grössen $\sigma = r + s$ und $u = r - s$ ein und wählt man für die Curve c eine Curve, in welcher σ constant ist, so lässt sich die Aufgabe nach den Regeln *Fourier*'s behandeln, und man erhält durch Vergleichung des Resultats mit der Gleichung (4) des vor. Art., wenn $r' + s' = \sigma'$, $r' - s' = u'$ gesetzt wird,

$$
v = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \cos \mu(u - u') \frac{d\varrho}{d\sigma} (\psi_1(\sigma')\psi_2(\sigma) - \psi_2(\sigma')\psi_1(\sigma))\, d\mu,
$$

worin $\psi_1(\sigma)$ und $\psi_2(\sigma)$ zwei solche particulare Lösungen der Differentialgleichung

$$
\psi'' - 2m\psi' + \mu\mu\psi = 0
$$

bezeichnen, dass

$$\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' = \frac{d\sigma}{d\varrho}.$$

Bei Voraussetzung des *Poisson*'schen Gesetzes, nach welchem

$$m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}\right)\frac{1}{\sigma},$$

kann man ψ_1 und ψ_2 durch bestimmte Integrale ausdrücken, so dass man für v ein dreifaches Integral erhält, durch dessen Reduction sich ergiebt

$$v = \left(\frac{r'+s'}{r+s}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{k-1}} F\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}, 1, -\frac{(r-r')(s-s')}{(r+s)(r'+s')}\right).$$

Man kann nun die Richtigkeit dieses Ausdrucks leicht beweisen, indem man zeigt, dass er wirklich den Bedingungen (3) des vor. Art. genügt.

Setzt man

$$v = e^{-\int\limits_{\sigma'}^{\sigma} m\,d\sigma} y,$$

so gehen diese für y über in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial s} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - mm\right) y = 0$$

und $y = 1$ sowohl für $r = r'$, als für $s = s'$. Bei der *Poisson*'schen Annahme kann man aber diesen Bedingungen genügen, wenn man annimmt, dass y eine Function von

$$z = -\frac{(r-r')(s-s')}{(r+s)(r'+s')}$$

sei. Denn es wird dann, wenn man $\frac{1}{2} - \frac{1}{k-1}$ durch λ bezeichnet, $m = \frac{\lambda}{\sigma}$, also

$$\frac{dm}{d\sigma} - mm = -\frac{\lambda + \lambda^2}{\sigma^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial r} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d^2 y}{d\log z^2}\left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{dy}{d\log z}\right).$$

Es ist folglich $v = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\lambda} y$ und y eine Lösung der Differentialgleichung

$$(1-z)\frac{d^2 y}{d\log z^2} - z\frac{dy}{d\log z} + (\lambda + \lambda^2) z y = 0$$

oder nach der in meiner Abhandlung über die *Gauss*'sche Reihe eingeführten Bezeichnung eine Function

$$P\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \\ 0 & 1+\lambda & 0 & z \end{pmatrix}$$

und zwar diejenige particulare Lösung, welche für $z = 0$ gleich 1 wird.

Nach den in jener Abhandlung entwickelten Transformationsprincipien lässt sich y nicht bloss durch die Functionen $P(0, 2\lambda + 1, 0)$, sondern auch durch die Functionen $P(\frac{1}{2}, 0, \lambda+\frac{1}{2})$, $P(0, \lambda+\frac{1}{2}, \lambda+\frac{1}{2})$ ausdrücken; man erhält daher für y eine grosse Menge von Darstellungen durch hypergeometrische Reihen und bestimmte Integrale, von denen wir hier nur die folgenden

$$\begin{aligned} y &= F(1+\lambda, -\lambda, 1, z) = (1-z)^{\lambda} F\left(-\lambda, -\lambda, 1, \frac{z}{z-1}\right) \\ &= (1-z)^{-1-\lambda} F\left(1+\lambda, 1+\lambda, 1, \frac{z}{z-1}\right) \end{aligned}$$

bemerken, mit denen man in allen Fällen ausreicht.

Um aus diesen für das *Poisson*'sche Gesetz gefundenen Resultaten die für das *Boyle*'sche geltenden abzuleiten, muss man nach Art. 2 die Grössen r, s, r', s', um $\dfrac{a\sqrt{k}}{k-1}$ vermindern und dann $k = 1$ werden lassen, wodurch man erhält $m = -\dfrac{1}{2\alpha}$ und

$$v = e^{\frac{1}{2\alpha}(r-r'+s-s')} \sum_{0}^{\infty} \frac{(r-r')^n (s-s')^n}{n!n!(2a)^{2n}}.$$

10.

Wenn man den im vor. Art. gefundenen Ausdruck für v in die Gleichung (4) des Art. 8 einsetzt, erhält man den Werth von w für $r = r'$, $s = s'$ durch die Werthe von w, $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ in der Curve c ausgedrückt; da aber bei unserm Problem in dieser Curve immer nur $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ unmittelbar gegeben sind und w erst durch eine Quadratur aus ihnen gefunden werden müsste, so ist es zweckmässig, den Ausdruck für $w_{r',s'}$ so umzuformen, dass unter dem Integralzeichen nur die Derivirten von w vorkommen.

Man bezeichne die Integrale der Ausdrücke

$$-mv\, ds + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr$$

und

$$\left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv\right) ds - mv\,dr,$$

welche in Folge der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial mv}{\partial r} + \frac{\partial mv}{\partial s} = 0$$

vollständige Differentiale sind, durch P und Σ und das Integral von $P\,dr + \Sigma\,ds$, welcher Ausdruck wegen

$$\frac{\partial P}{\partial s} = -mv = \frac{\partial \Sigma}{\partial r}$$

ebenfalls ein vollständiges Differential ist, durch ω.

Bestimmt man nun die Integrationsconstanten in diesen Integralen so, dass ω, $\dfrac{\partial \omega}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial \omega}{\partial s}$ für $r = r'$, $s = s'$ verschwinden, so genügt ω den Gleichungen

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} + 1 = v, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r\,\partial s} = -mv$$

und sowohl für $r = r'$, als für $s = s'$ der Gleichung $\omega = 0$ und ist, beiläufig bemerkt, durch diese Grenzbedingung und die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r\,\partial s} + m\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial s} + 1\right) = 0$$

völlig bestimmt.

Führt man nun in dem Ausdrucke von $w_{r',s'}$ für v die Function ω ein, so kann man ihn durch partielle Integration in

$$(1) \qquad w_{r',s'} = w_{c,r'} + \int\limits_{c,r'}^{c,s'} \left(\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + 1\right)\frac{\partial w}{\partial s}\,ds - \frac{\partial \omega}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}\,dr\right)$$

umwandeln.

Um die Bewegung des Gases aus dem Anfangszustande zu bestimmen, muss man für c die Curve, in welcher $t = 0$ ist, nehmen; in dieser Curve hat man dann $\dfrac{\partial w}{\partial r} = x$, $\dfrac{\partial w}{\partial s} = -x$, und man erhält durch abermalige partielle Integration

$$w_{r',s'} = w_{c,r'} + \int\limits_{c,r'}^{c,s'} (\omega\,dx - x\,ds),$$

folglich nach Art. 3, (4) und (5)

$$(2)\qquad \begin{aligned} (x - (\sqrt{\varphi'(\varrho)} + u)t)_{r',s'} &= x_{r'} + \int\limits_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{\partial \omega}{\partial r'}\, dx \\ (x + (\sqrt{\varphi'(\varrho)} - u)t)_{r',s'} &= x_{s'} - \int\limits_{x_{r'}}^{x_{s'}} \frac{\partial \omega}{\partial s'}\, dx. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (2) drücken aber die Bewegung nur aus, so lange

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1 \right) t$$

und

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1 \right) t$$

von Null verschieden bleiben. Sobald eine dieser Grössen verschwindet, entsteht ein Verdichtungsstoss, und die Gleichung (1) gilt dann nur innerhalb solcher Grössengebiete, welche ganz auf einer und derselben Seite dieses Verdichtungsstosses liegen. Die hier entwickelten Principien reichen dann, wenigstens im Allgemeinen, nicht aus, um aus dem Anfangszustande die Bewegung zu bestimmen; wohl aber kann man mit Hülfe der Gleichung (1) und der Gleichungen, welche nach Art. 5 für den Verdichtungsstoss gelten, die Bewegung bestimmen, wenn der Ort der Verdichtungsstosses zur Zeit t, also ξ als Function von t, gegeben ist. Wir wollen indess dies nicht weiter verfolgen und verzichten auch auf die Behandlung des Falles, wenn die Luft durch eine feste Wand begrenzt ist, da die Rechnung keine Schwierigkeiten hat und eine Vergleichung der Resultate mit der Erfahrung gegenwärtig noch nicht möglich ist.